

第1節 関数

(1) ともなって変わる量と関数

小学校4年生のときに、2つのともなって変わる量について学習しました。また、6年生では比例と反比例について学習しました。そこでは、どのような場面について考えたかをふりかえってみましょう。

例えば、次のような場面にあられるともなって変わる量について調べ、そのようすを表やグラフに表したり、2つの量の関係を式で表したりしてきました。

◇ 深さ 36cm の水そうに 1 秒当たり 0.1 cm (つまり 1 分当たり 6 cm) ずつ水を入れるときの、水を入れた時間と水の深さ。

http://www.juen.ac.jp/g_katei/nunokawa/function/covariation_1.html

◇ 重さ 7 kg の水そうに 1 秒当たり 0.2 kg (つまり 1 分当たり 12 kg) ずつ水を入れるときの、水を入れた時間と水そう全体の重さ。

http://www.juen.ac.jp/g_katei/nunokawa/function/covariation_2.html

◇ 48cm のひもで長方形を作るときの縦の長さと横の長さ。

http://www.juen.ac.jp/g_katei/nunokawa/function/covariation_3.html

◇ 48cm のひもで長方形を作るときの縦の長さと面積。

http://www.juen.ac.jp/g_katei/nunokawa/function/covariation_4.html

◇ 14 cm の線香を燃やすときの、燃やした時間と残りの長さ。

http://www.juen.ac.jp/g_katei/nunokawa/function/covariation_5.html

◇ ボールを投げ上げたときの、時間と高さの関係

http://www.juen.ac.jp/g_katei/nunokawa/function/covariation_6.html

問：6つの場面について、そのようすをイメージしてみるとともに、上のオンラインワークシートで2つの量の変わり方を観察しましょう。そして、量の変わり方で似ているものや異なるものについて、どのように似ているか、どのように異なっているかを説明してみましょう。

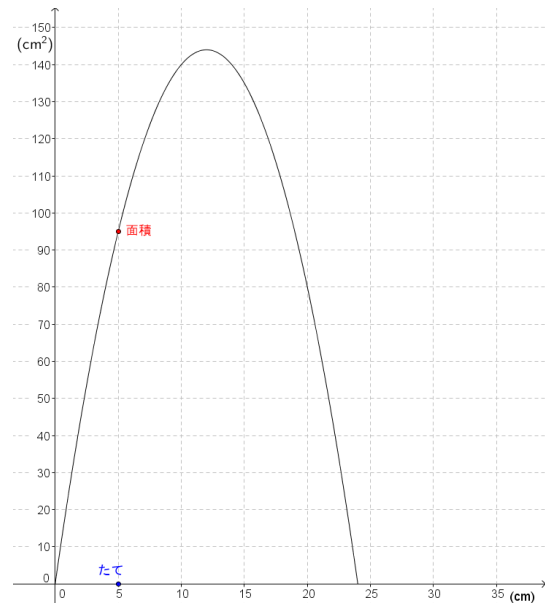
2つの量がともなって変わっているとき、その場面を考える上で次のようなことが大切

になってきます。

1. 一方の量が変わるとき、もう一方の量は全体としてどのような変わり方をするだろうか。
2. 一方の量がある値のときに、もう一方の値はいくつになるだろうか。

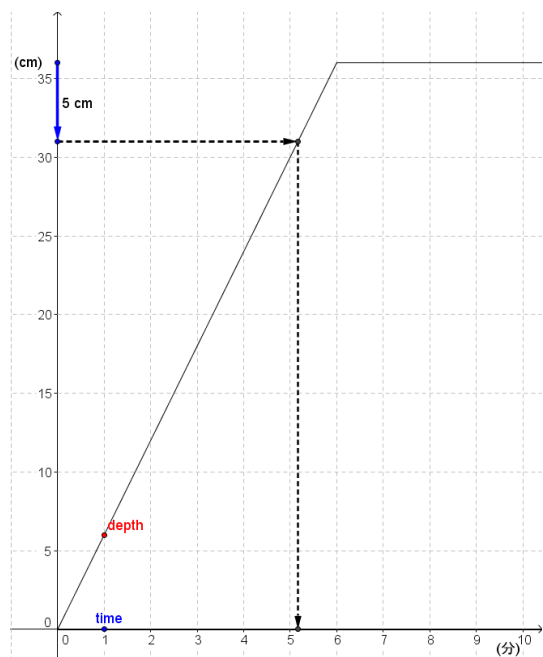
1 のことがわかると、一方の量が変わるときに、もう一方の量が途中でどのような状態になるか、あるいは最後はどのようなようになっていくかを予想することができます。例えば、ひも

で長方形を作る場面では、縦の長さが変わるときに面積の変わり方がわかると、その途中で面積がもっとも大きいときがあり、そして、その後は面積がまた小さくなっていくことを見通すことができます(右図)。また線香が燃えている場面では、時間の変化に対して線香がある一定のペースで燃えるという変化のようすがわかると、その後の変わり方の見当がつけます。



2 のことがわかると、一方の量がある値になったときに、もう一方の量はいくつになるか、あるいは一方の量がある値になるためには、もう一方の量はいくつであればよいか、などを

考えることができます。例えば、水を入れる時間と深さを考える場面では、水そうの縁から 5 cm 下のところまで水を入れるには、何分くらい入れればよいかの見当が付き、その間は水そうのそばをはなれていても大丈夫になります(右図)。またボールを投げ上げる場面では、ボールが一番高くなる時間を決めるたり、何秒後に落ちてくるかを予想することができます。



実は、2番目のことがわかると、1番目のことも調べることができます。つまり、ともなって変わる2つの量を x, y で表すとき、 x をきめると y がどうきまるのかがわかると、 x が変わるとき y が全体的にどのような変わり方をするかも調べることができるのです。

そこで、中学校の数学では、この「 x をきめると y がどうきまるのか」に着目して、ともなって変わる2つの量について考えていきます。

そのために文字 x, y を、いろいろな値を取る量、変化する量を表すために使います。文字をこのように使うとき、それらを変数 (variable) と呼びます。

2つの変数 x と y がともなって変わるとき、「変数 x の値をきめると変数 y の値が1つきまる」と考えていくことにします。そして、「変数 x の値をきめると変数 y の値が1つきまる」と考えているとき、「 y は x の関数 (function) である」といいます。つまりここでは、別の変数 x によりきまる変数 y を関数と呼びます。

例：水そうに水を入れるとき、水を入れる時間と水の深さはともなって変わります。

水の深さが時間によりどうきまるかに着目するとき、「水の深さは水を入れる時間の関数である」と表します。

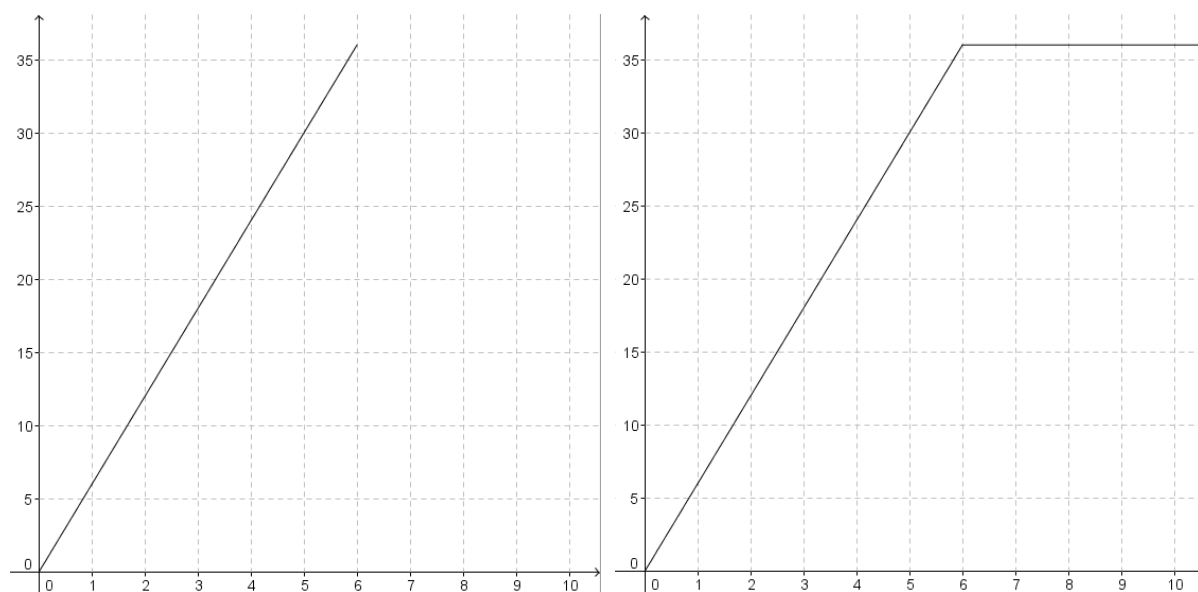
例：48 cm のひもで長方形を作るとき、縦の長さを変えると面積も変わるので、長さと面積はともなって変わります。面積が縦の長さによりどうきまるかに着目するとき、「面積は縦の長さの関数である」と表します。

(2) 変域

ある変数 y を「 x の関数 y 」として考えているときは、上で見たように、「 x をきめると y がどうきまるのか」ということや、「 x を変化させたとき y はどのように変化するのか」ということを考えようとしています。そこで、 x をどの範囲で変化させて考えているのかが重要になります。

例：深さ 36cm の水そうに水を入れるときの、水を入れる時間と水の深さを考えます。1 秒あたり 0.1cm ずつ水が入るとすると、6 分で水そうの上の縁まで水が入ります。そこで、水を入れ始めてからの時間を x 分、そのときの水の深さを y cm とし、「 x の関数 y 」と

して考えるとき、水があふれない範囲で考えるのであれば、 x は0以上、6以下の値で、つまり $0 \leq x \leq 6$ の範囲で考えていることになります(下左図)。また、あふれた後も水を出しっぱなしにしていると考えるのであれば、 x は0以上で、つまり $x \geq 0$ の範囲で考えていることになります(下右図)。



このように、変数 x を変化させる範囲のことを定義域 (domain) といいます。また、 x が定義域の範囲で変化するとき、 x の関数 y がとりうる値を値域 (range) といいます。そして、定義域と値域のように x や y が取りうる値のことを、変域と呼びます。

x の変域として、数全体を考えることもありますが、上で見たように x がある範囲にある場合を考えればよいこともあります。したがって、 x の関数 y を考えるときには「変数 x がどの範囲で変化しているのか」、つまり x の変域に注意を向ける必要があります。

問：上で考えた次のような場面で y を x の関数として考えるとき、 x の変域をどのように設定したらよいかを考えてみましょう。

- (1) 48cm のひもで長方形を作るとき、横の長さ y cm は縦の長さ x cm の関数である。
 - (2) 14 cm の線香が1分当たり 0.56 cm ずつ燃えている。この線香が燃えつきるまでの間、残りの長さ y cm は燃えてからの時間 x 分の関数である。
 - (3) ボールを投げ上げたときの、ボールの高さ y m は投げてからの時間 x 秒の関数である。
- ((3)については上のオンラインワークシートを利用して考えてみましょう。また、(1)と(2)についても、イメージがしにくいときは、オンラインワークシートも観察しながら考

えてみましょう。)

(3) 関数でない関係

問：48 cm のひもで長方形を作る場面について、次のことを考えてみましょう。

長方形の面積としていろいろな値を考えると、それにともなってそのときのたての長さもいろいろに変わります。このとき、面積の値を1つにきめるとそのときのたての長さも1つきまるでしょうか。

http://www.juen.ac.jp/g_katei/nunokawa/function/covariation_7.html

このことを、上のオンラインワークシートで観察してみると、同じ面積に対してたての長さは2つの可能性があり、1つにきまらないことがわかります。したがって、「たての長さは面積の関数である」とはいえませんが¹。

このように、2つの量がともなって変わる場合でも、一方の量をきめたときにもう一方の量が1つにはきまらないことがあり、その場合、関数であるとはいえません。

なお、たて長の長方形だけを考えることにすると、このときは面積をきめるとたての長さが1つだけきまるので、「たての長さは面積の関数である」ということができます。

(4) いろいろな関数

「 x の関数 y 」には、いろいろなタイプがあります。次節以降で見ていくように、小学校で学習した「 y が x に比例している」ときや「 y が x に反比例している」ときも、 y を x の関数として考えることができます。

文字式を用いて表すことができる関数もありますが、中学校で学習する文字式を用いては表すことが難しい関数もあります。ただし、共通しているのは、変数 x の値をきめると変数 y の値が1つだけきまるという性質です。

次ページのいくつかのグラフは、すべて「 x の関数 y 」を表しています。

問：それぞれのオンラインワークシートで、変数 x の値をきめると変数 y の値が1つだけき

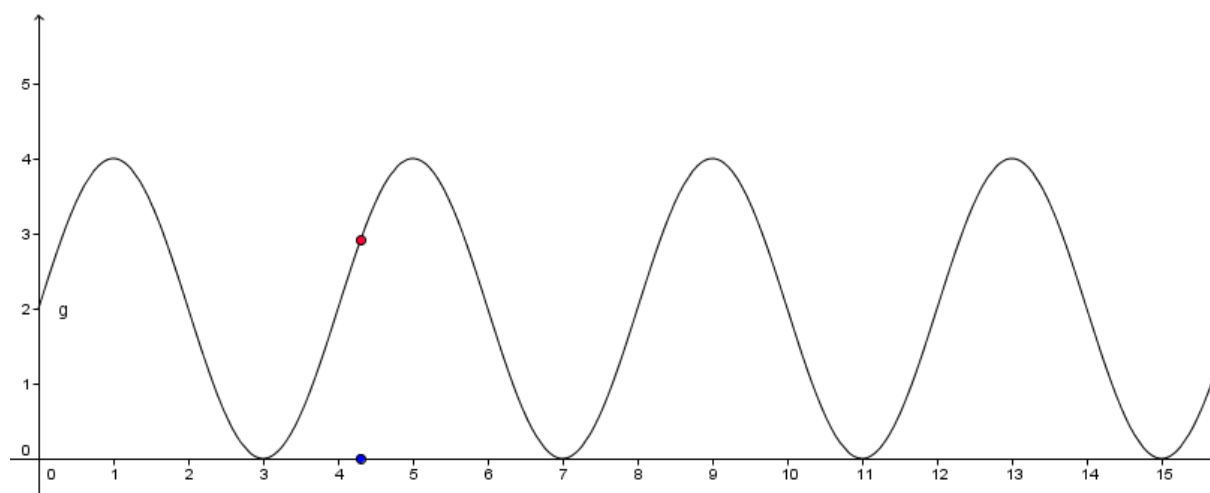
1 前に確認したように、「面積はたての長さの関数である」ということはできます。たての長さが1つきまると、面積も1つだけきまるからです。

まるようすを観察してみましょう。

(1) 波のようなグラフで表される関数

同じ動きを繰り返す現象を表すときによく用いられます。

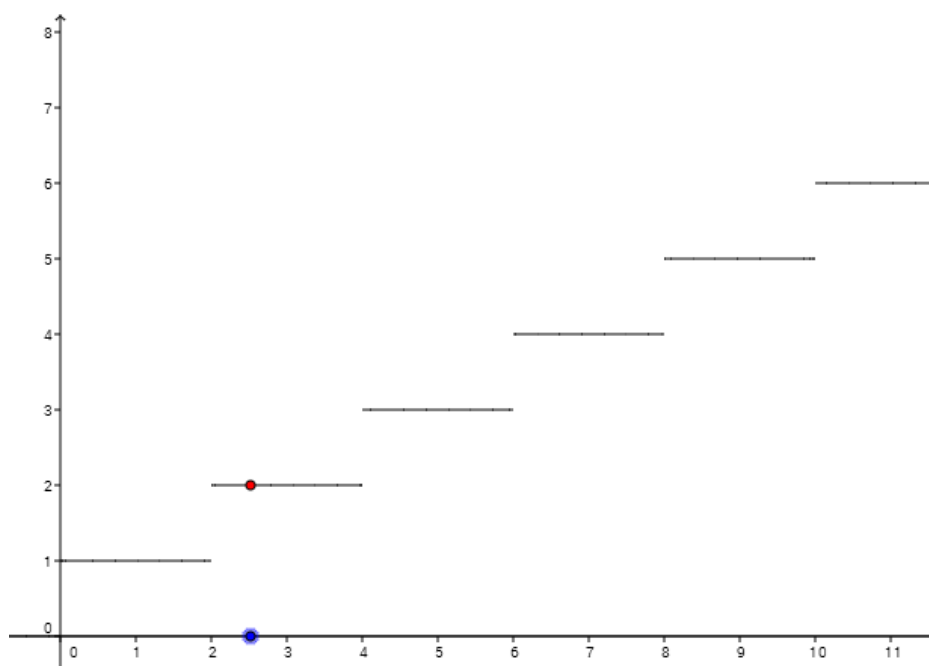
http://www.juen.ac.jp/g_katei/nunokawa/function/various_function1.html



(2) 階段のようなグラフで表される関数

価格の設定のように x がある範囲にあるときには y の値が同じ場合に用いられます。

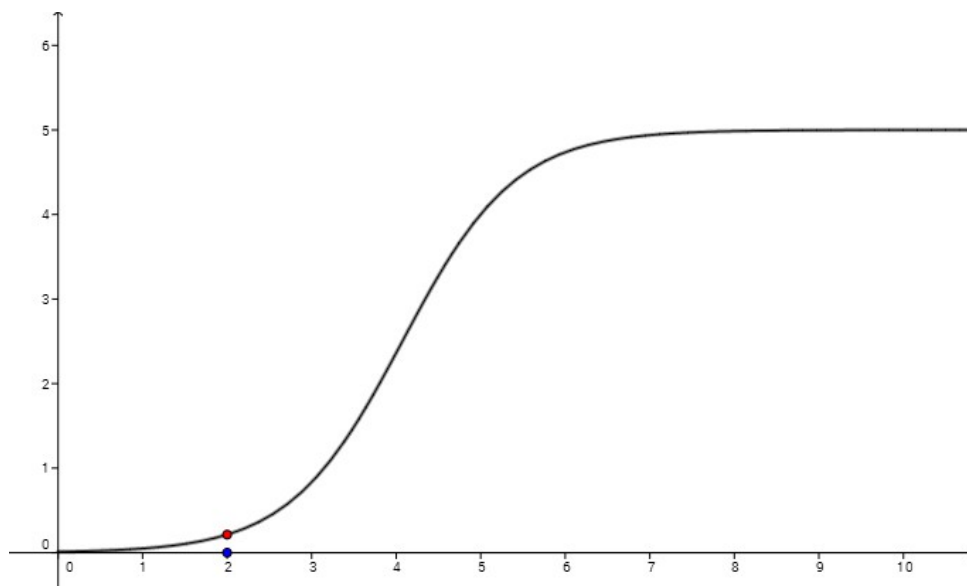
http://www.juen.ac.jp/g_katei/nunokawa/function/various_function2.html



(3) 途中ではやく増えるようなグラフで表される関数

あるものの成長を表すために用いられることがあります。

http://www.juen.ac.jp/g_katei/nunokawa/function/various_function3.html



中学校でのこれからの学習、あるいは高等学校での学習をとおして、さまざまなタイプの関数にであうことになります。

次節以降では、小学校6年生で学習した比例と反比例について、関数のとらえ方からあらためて考えてみることにします。その中で、関数について調べるときの、基本的な方法についてもみていくことにしましょう。