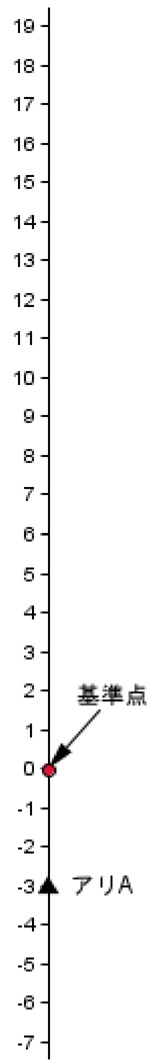
第2節　１次関数

☆　第１節では１年生のときに学習した比例や反比例が、関数の一種であることを確認しました。しかし、 y が x の関数であるときに、変数 x, y の間の関係がいつでも $y=ax$ や $y=\dfrac{a}{x}$ と表されるわけではありません。ここでは、比例や反比例とは異なる関数について学習してみることにしましょう。

（１）比例や反比例にならない変数間の関係

アリＡが右図のように、紙面の下から上に向かって毎秒 2cm の速さで歩いています。あやかさんがそれを観察していたら、ちょうど正午に右図の基準点のところを通過しました。

正午から経過した時間を x 秒、そのときにアリＡが基準点からどれだけ先に進んでいるか、その距離を $y$cm とすると、アリＡが毎秒 2cm の速さで歩いているので、時間 x が決まると、対応してそのときの距離 y が決まります。したがって、距離 y は時間 x の関数になります。



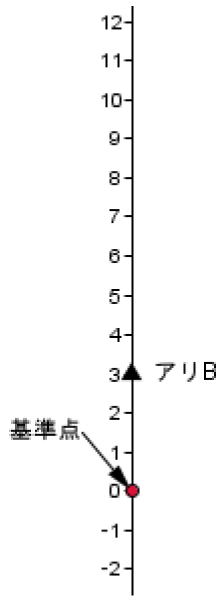
問：このとき、x の関数 y を表す式を求めましょう。
　　その x の関数 y を表すグラフをかいてみましょう。

活動：下のオンラインワークシートに入り、時間を表す点 time を動かして、時間の変化にともなってアリＡの基準点からの距離がどう変わるかを観察してみましょう。

http://www.juen.ac.jp/g_katei/nunokawa/function/Move_of_ant1.html

問：$x<0$ のとき、時間 x は何を表していると考えられるでしょうか。またそのときのアリＡの距離 y がどうなっているかをワークシートで観察し、y の値が何を意味するかを考えてみましょう。

さらに、いま考えた x や y が表していることが、先ほどかいたグラフではどのようにあらわれているかを調べて見ましょう。



さとしさんは別のアリ B を観察しています。アリ B も毎秒 2cm の速さで進んでいますが、正午には基準点から 3cm のところを通過しました。

正午から経過した時間を x 秒、そのときにアリ B が基準点からどれだけ先に進んでいるか、その距離を $y_B$cm とすると[1]、アリ B も毎秒 2cm の速さで歩いているので、時間 x が決まると、対応してそのときの距離 y_B も決まります。したがって、距離 y_B も時間 x の関数になります。

活動：下のオンラインワークシートに入り、時間を表す点 time を動かして、時間の変化にともなってアリ B の基準点からの距離がどう変わるかを観察してみましょう。

http://www.juen.ac.jp/g_katei/nunokawa/function/Move_of_ant2.html

問：アリ B が毎秒 2cm の速さで進んでいることと、正午には基準点から 3cm のところを通過したことを考慮したときに、x の関数 y_B はどのような式で表すことができますか。また、なぜそのように考えたのかを説明してみましょう。

問：上の問で求めた式に、x=0、x=1、x=5、x=−2 を代入して、それぞれのときの距離 $y_B$cm を求めてみましょう。また、オンラインワークシートでそれぞれのときにアリ B がどこにいるかを観察し、式から求めた y_B の値と一致するかを調べてみましょう。

1　y_B はアリ B の距離であることがわかりやすくするために、y に B を添えたものです。

正午から x 秒後のアリＢの基準点からの距離 y_B は、次の式で表すことができます。

$$y_B=2x+3$$

問：アリＡのときは、x 秒後の基準点からの距離 y_A は、$y_A=2x$ で表すことができました[2]。アリＡのときの式とアリＢのときの式とでは、どのような違いがありますか。また似ているところがありますか。

問：式に x の値を代入したり、オンラインワークシートで観察をしたりしながら、下の表をうめてみましょう。

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y_B																	
y_A			-4	-2	0	2	4										

（２）１次関数

アリＢの基準点からの距離 y_B のように、x の関数 y が次の式で表されるとき、変数 y を変数 x の**１次関数**といいます。

$$y=ax+b\ (a\neq 0)$$

y が x の１次関数で y が $y=ax+b$ という式で表されるとき、このことを簡単に「１次関数 $y=ax+b$」と表すこともあります。

y が x の１次関数のときは、式の「ax」の後に「$+b$」がついているので、$b=0$ のとき以外は、y は x に比例しないことになります。したがって、x が 2 倍、3 倍、・・・になったときに、y は 2 倍、3 倍、・・・にはなりません。例えば、$x=3$ のときの y の値は、

$$a\times 3+b=3a+b$$

となります。x が 2 倍になって、$x=6$ になったとすると、そのときの y の値は、

$$a\times 6+b=6a+b$$

となり、$3a+b$ の 2 倍、つまり

$$2(3a+b)=6a+2b$$

とは一致しません。x が 2 倍、3 倍、・・・になるときに「ax」の部分は 2 倍、3 倍、・・・になるのですが、「$+b$」の部分は変わらないので、それらをあわせた $y=ax+b$ は 2 倍、3 倍、・・・にならないのです。

2　ここではアリＢと区別するために、アリＡの基準点からの距離にもＡを添えました。

このように、y が x の１次関数であるときは、y が x に比例するときにくらべて、少し異なる変化の仕方をします。

活動：次のオンラインワークシートに入り、アリの速さと正午に通過する位置をいろいろ変えて、そのときのアリの動きを観察しましょう。また、それぞれの動きについて、基準点からの距離 y は、正午からの時間 x のどのような式で表すことができるか考えてみましょう。

http://www.juen.ac.jp/g_katei/nunokawa/function/Move_of_ant3.html

問：y が x の１次関数であるとき、y は x に反比例はしないことを、式の形から説明してみましょう。また、x が 2 倍、3 倍、・・・になったときに、y が 1/2 倍、1/3 倍、・・・になるかを調べることで、反比例にならないことを確認してみましょう。

ここまで見てきたように、x の１次関数 y は、比例とも反比例とも異なる仕方で変化します。次の節では、１次関数についていろいろ調べる準備として、１次関数を表現する仕方について考えてみましょう。

【補足】

１次関数 $y=ax+b$ で $b=0$ のときは、x の関数 y は比例になります。つまり、y が x に比例するということは、y が x の１次関数であることの特別な場合と考えることができます。

比例 $y=ax$ については、小学校６年や１年のときに学習したように、x が 2 倍、3 倍、・・・になると、それにともなって、y も 2 倍、3 倍、・・・になるという性質がありました。また式の形からわかるように、x を何倍かすると y になるという特徴ももっています。

２つの変数 x、y の間のこうした関係は、数学以外でもいろいろな場面に現れることが知られており、さまざまな現象を記述するのに有用です。そこで、この特別な関係を強調したいときには、「y が x に比例する」という表現を使います。

反比例という用語にも「比例」が含まれています。実は、「y が x に反比例する」ということは、「y が $\frac{1}{x}$ に比例する」ことです。実際、 $y=\frac{a}{x}$ で $\frac{1}{x}=X$ と置くと、$y=aX$ となり、「y が X に比例する」、つまり、「y が $\frac{1}{x}$ に比例する」ことが見やすくなります。

問：下の表は、反比例　$y=\dfrac{12}{x}$　を表しています。

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y	-2	-2.4	-3	-4	-6	-12	×	12	6	4	3	2.4	2
$\dfrac{1}{x}$							×	1	$\dfrac{1}{2}$				

今この表に、　$\dfrac{1}{x}$　の段を追加してみましょう。そして、　$\dfrac{1}{x}$　が 2 倍、3 倍、4 倍、5 倍、6 倍になる部分を見つけ、そのときに本当に y が 2 倍、3 倍、4 倍、5 倍、6 倍になるかを確かめましょう。

中学校３年では、「２乗に比例する関数」を学習します。このとき x の関数 y は、$y=ax^2$ と書くことができます。「２乗に比例する」というのは、「y が x^2 に比例する」ということです。今度は、$x^2=X$ と置けば、やはり $y=aX$ となり、「y が X に比例する」、つまり、「y が x^2 に比例する」ことが見やすくなります。