

第3節 1次関数の表現

☆ 第2節では1年生で学習した比例や反比例と異なる、新しい種類の関数があることを確認し、それが1次関数と呼ばれることを学習しました。

(1) 1次関数の表現

1次関数 $y=2x+1$ (x の変域は数全体)¹を考えてみましょう。

「1次関数 $y=2x+1$ 」という言い方は、次の2つのことを意味しているのです。

- ・変数 y は変数 x の関数である。つまり、変数 x の値が決めると、それに対応して変数 y の値がただ1つ決まる。
- ・変数 y の決まり方は、 $y=2x+1$ という式により表現することができる。いいかえると、変数 x と変数 y の間にはいつでもという関係が成り立っている。

$y=2x+1$ という式は、それぞれの x の値に対応する y の値をいつでも教えてくれ、それにより、 x の関数 y のようすを知ることができます。したがって、 $y=2x+1$ という式はいま考えている関数を十分に表しており、関数の表現であるといえます。

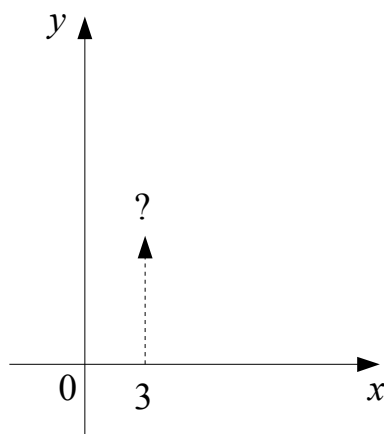
1年生で比例と反比例を学習したときは、比例の式や反比例の式とともに、比例のグラフや反比例のグラフを学習しました。また、比例や反比例について表をつくって考えたりもしました。グラフや表が1次関数の表現としても使えるのかを考えてみましょう。

1次関数のグラフ

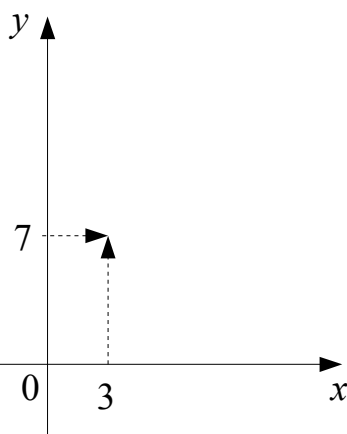
1次関数 $y=2x+1$ では、 x の値を1つ決めるとそれに対応して y の値が1つ決まります。例えば、 x の値を $x=3$ に決めると y の値は、 $y=2\times 3+1=7$ なので $y=7$ と決まります。このように x の値を1つ決めるとそれに対応した y の値がいくつに決まるかを、座標を利用して、次のように表現することができます。

1 変域は、変数のとる値の範囲のことでした。

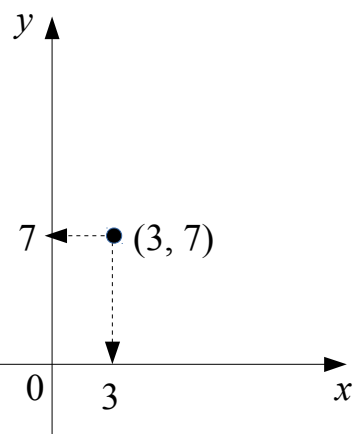
(1) $x=3$ に対応するのは？



(2) $y=7$ だ。

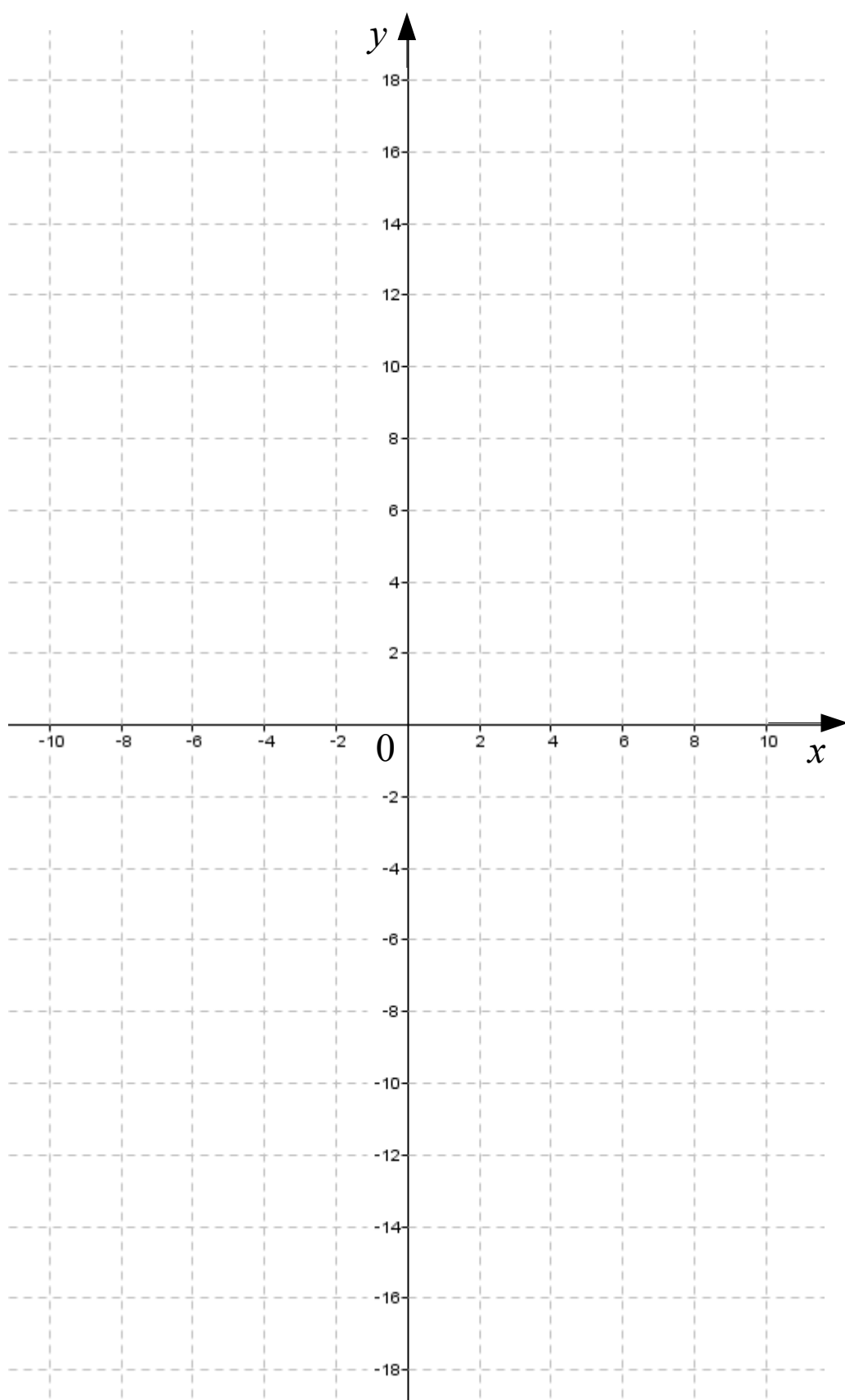


(3) この対応を点(3, 7)で表す。



このように、点の座標を用いて x の値を1つ決めるとそれに対応した y の値がいくつに決まるかを表現することができます。そこで他の x の値についても、それに対応して y の値がいくつに決まるかを点の座標を用いて表していけば、 x の関数 y のようすを表現することができるはずです。

問：1次関数 $y=2x+1$ を考えます。自分でいくつか x の値を決め、それぞれに対応して y の値がいくつに決まるかを、点の座標やその点を下の図にかきいれて表現してみましょう。

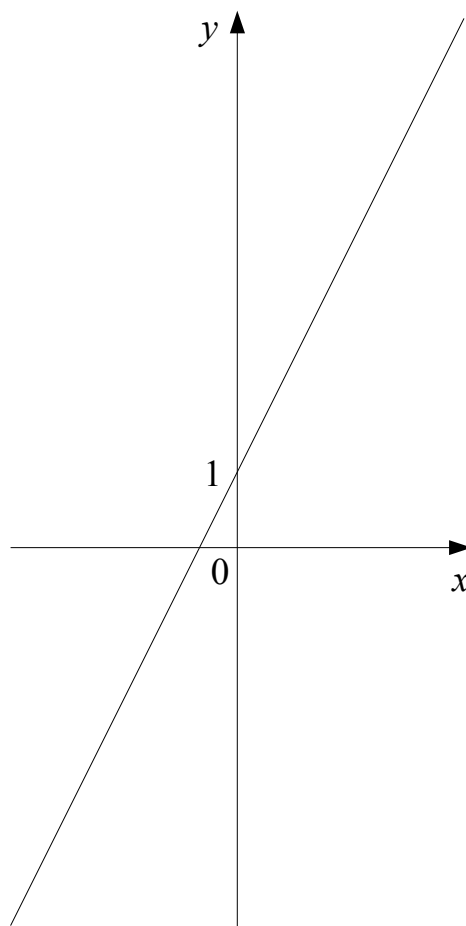


このようにして、 x の値を 1 つ決めるとそれに対応した y の値がいくつに決まるかを表現することができます。しかし x の変域は数全体でしたから、すべての数について上のようにして点を取らなければ、 x の関数 y のようすをじゅうぶんに表現することはできません。そこでもっと多くの x の値に対して、それに対応した y の値が決まることを表す点として表現してみます。多くの点が取られていくようすをイメージしてみましょう。

活動：下のオンラインワークシートに入り、 x の値に対応した y の値を表す点を多くとっていくと、直線が現れるようすを観察しましょう。

<http://www.geogebraTube.org/student/mAWxJQxpX>

このように、 x の値を 1 つ決めるとそれに対応した y の値がきまるようすを、多くの点の集まりで表すことで下図のような 1 つの直線が得られます²。これを「1 次関数 $y=2x+1$ のグラフ」と呼びます。グラフは直線ですが、これは無数の点の代わりにかかれたものです。



ここまで考えてきたことからわかるように、1 次関数のグラフは、それぞれの x の値について、それに対応した y の値がどう決まるかを表現しています。ただし、 x の変域は数全体

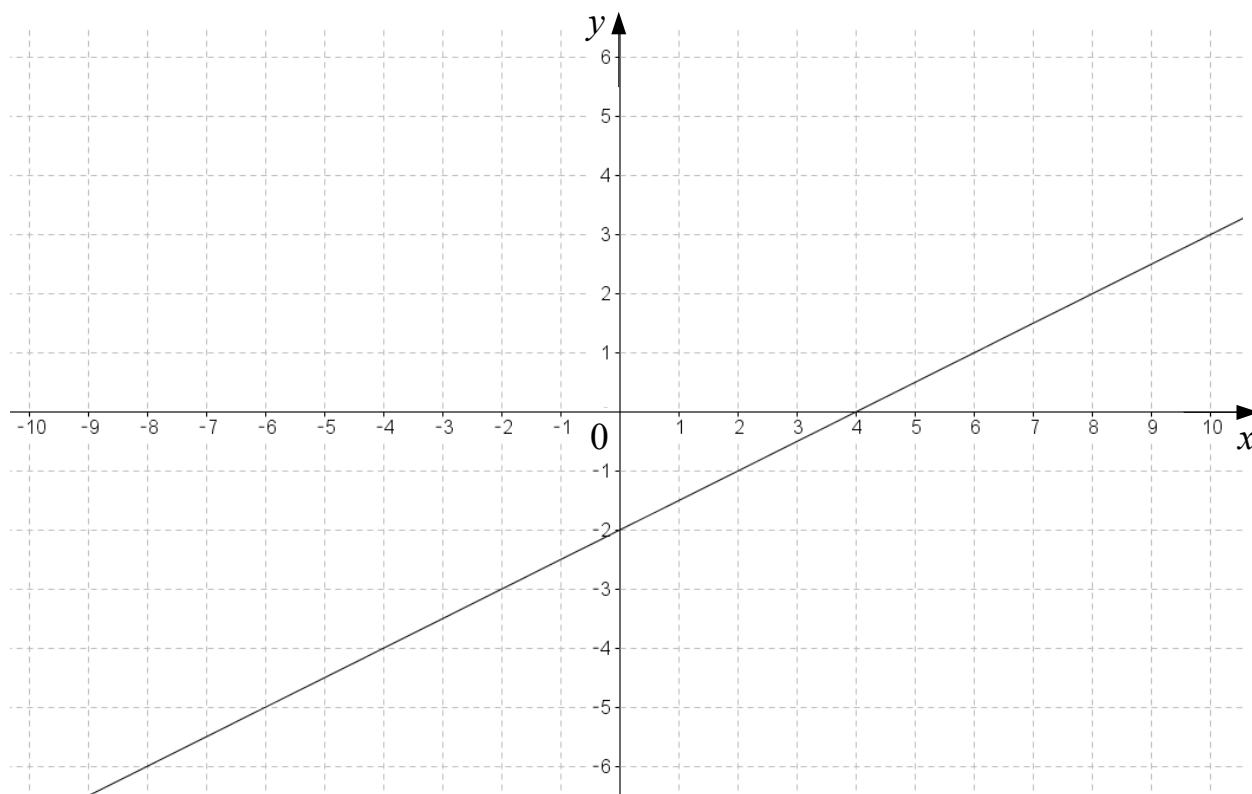
2 1 次関数 $y=2x+1$ のグラフが直線になることを、式の特徴から考えることを、この説の最後に補足として載せておきます。

でしたが、 x 軸を数全体を表すようにはかけませんから、ある範囲にある x についてのグラフで、関数のようすの全体を代表させています。

問：上の 1 次関数のグラフについて、1 年生で学習した比例のグラフと似ているところと異なっているところを探してみましょう。また反比例のグラフとも比較してみましょう。

ここまでは 1 次関数が式 $y=2x+1$ で表現されているときに、それをグラフで表現することを考えてきました。では、グラフも 1 次関数の表現であるならば、グラフを見て、それがどのような関数を表しているか、その情報を受け取ることができるでしょうか。

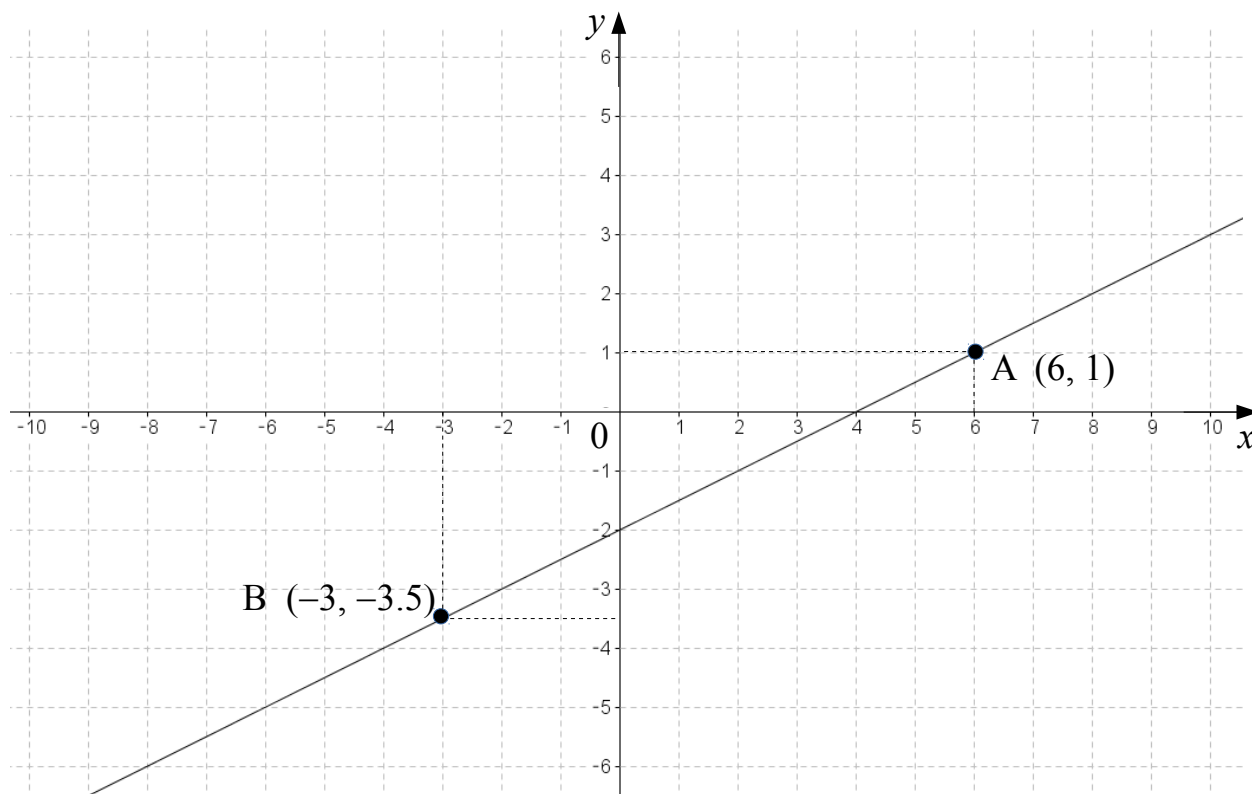
例えば、次のようなグラフが与えられたとしましょう。



すぐに、 $x=0$ と決めるとそれに対応して $y=-2$ と決まること、また $x=4$ と決めるとそれに対応して $y=0$ と決まることがわかります。では、それ以外の x の値については、対応する y の値はグラフからわかるでしょうか。

問： $x=2$ と決めるとき、それに対応して決まる y の値がいくつになるかを、上のグラフから求められるか考えて見ましょう。また、 $x=7$ や $x=-6$ のときはどうでしょうか。考えて見ましょう。

例えば $x=6$ と決めたときは、グラフである直線の上であり、その x 座標の値が6である点を探すと、その点の y 座標が、 $x=6$ と決めたときに対応して決まる y の値になっているはずです。探している点は下図のA(6, 1)ですから、 $x=6$ と決めたときに対応して決まる y の値は $y=1$ であるとわかります。



同じように、 $x=-3$ と決めたときには、直線上の点で x 座標の値が-3である点を探します。それは上図のB(-3, -3.5)ですから、 $x=-3$ と決めたときに対応して決まる y の値は $y=-3.5$ であるとわかります。他の x の値についても対応する y の値をグラフから求めることができます。つまりグラフは、それぞれの x の値に対応する y の値をいつでも教えてくれるので、 x の関数 y のようすを教えてくれるという意味で、1次関数の表現であると考えられます。

第4節では、いろいろな1次関数のグラフを調べて見ることで、関数の特徴を探ります。

1次関数の表

1次関数 $y=2x+1$ で x の値を $x=1$ に決めると y の値は $y=2 \times 1 + 1 = 3$ から $y=3$ と決まります。同じように x の値 $x=2$ 、 $x=3$ 、 $x=4$ 、...と1つ決めるとそれに対応して y の値が $y=5$ 、 $y=7$ 、 $y=9$ 、...と決まります。このようすを表により次のように表現することができます。

x	1	2	3	4	5	6
y	3	5	7	9	11	13

さらに、 x の値が負になる方まで考えて表を作れば、下のようになるでしょう。

x	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	-15	-13	-11	-9	-7	-5	-3	-1	1	3	5	7	9	11	13	15	17

グラフのときと同じように、 x の変域である数全体を表すようにはかけませんから、ある範囲にある x についての表になります。さらにグラフとは違う点として、例えば $x=0$ と $x=1$ の間にあるすべての x の値について、対応する y の値を示すことはできません。1次関数のようすをイメージするのに役立ちそうな、代表的な x の値についてのみ、対応する y の値を示していることになります。

では逆に、表が与えられたときに、それにより表現された x の関数 y がどのような関数であるか、その情報を受け取ることができるかを考えてみましょう。

x	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	-22	-19	-16	-13	-10	-7	-4	-1	2	5	8	11	14	17	20	23	26

表中にある x の値については、 x の関数 y の値がどのように対応しているかは、すぐにわかります。それ以外の x の値で対応する y の値がわかるものはあるでしょうか。表から x の値が1増えると y の値は3増加し、1減ると y の値は3減少するというパターンを見いだすことができます。そこで、もしもこのパターンが他の x についても成り立つとすれば、 $x=9$ のときは $y=29$ 、 $x=-9$ のときは $y=-25$ と考えることができます。

さらに、 $x=0$ と $x=1$ の間でも y の値は同じように増えているとすると、 x の値が0から1まで1増えると y の値は3増えているので、 x の値が0.5増えたときはその0.5倍の1.5増えると考えられるし、 x の値が0.1増えたときはその0.1倍の0.3増えると考えられます。このように考えると、すべての x の値に対して、それに対応して y の値がいくつになるかを見いだすことができます。つまり、 x の値に対して、対応する y の値がどのようになっているかがわかり、 x の関数 y がどのような関数であるかを、表から明らかにすることができるのです。

ただし、表から見いだされた増減のパターンが表にない部分でも成り立っていると仮定したり、 x の値が1増えるときにその途中でも同じように増えていると仮定したりすることですべての x の値に対して y の値を考えることは可能になったのでした。

以上のことから、読み取るときに仮定を置いたり、表すときにとびとびの値に限られたりといったことはありますが、表により1次関数を表現することができることがわかりました。

問：1次関数が次の表で表現されているときに、それぞれの x の値に対応する y の値がいくつになるかを考えてみましょう。

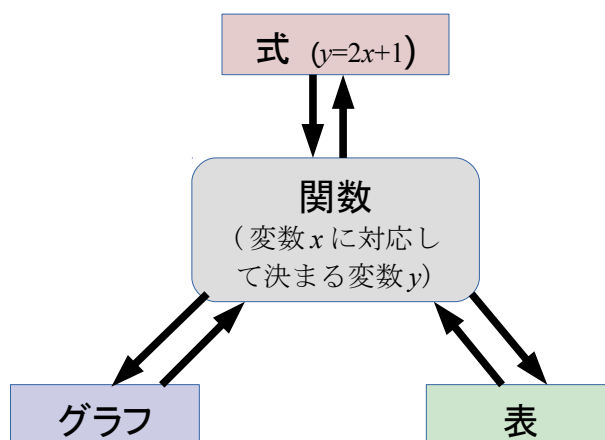
- (1) $x=10$ 、 $x=4.8$ 、 $x=-3.5$

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y	13	11	9	7	5	3	1	-1	-3	-5	-7	-9	-11

- (2) $x=24$ 、 $x=1$ 、 $x=-7$

x	-18	-15	-12	-9	-6	-3	0	3	6	9	12	15	18
y	-16	-13	-10	-7	0	1	2	3	4	5	6	7	8

本節で見てきたように、関数は式、グラフ、表を用いて表現することができます。また逆に式、グラフ、表が示されると、それぞれの x の値に対応する y の値がどのようなになっているかがわかり、 x の関数 y がどのような関数であるかをとらえることができます。



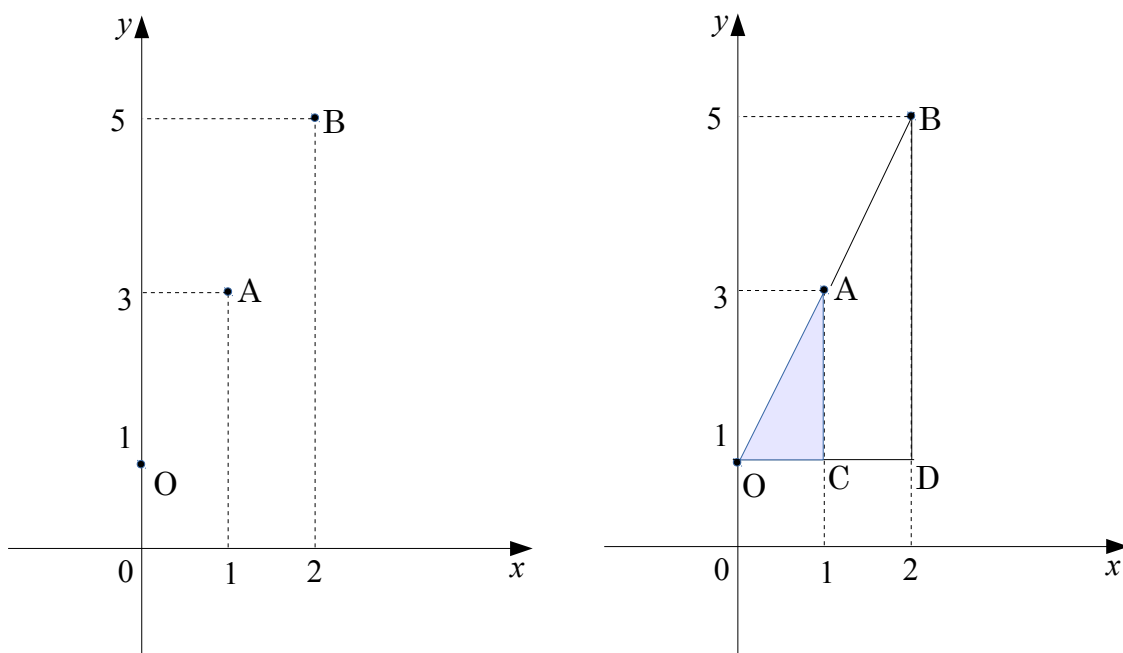
【補足】 1 次関数 $y=2x+1$ のグラフが直線になること。

1 次関数 $y=2x+1$ は、「 $y=2x+1$ 」という式で x の関数 y のようすが表現されていました。そこで、この式の特徴からそのグラフが直線になることを考えて見ましょう。そのために、3 つの x の値について、 x の関数 y のようすを表現する点をそれぞれ作ったときに、その 3 つの点とが同じ直線の上にあることを示してみます。

考えやすいように、まず、 $x=0$ と $x=1$ 、 $x=2$ のときを考えてみましょう。 $x=1$ と決めたときに、それに対応して決まる y の値は

$$y=2 \times 1 + 1 = 3$$

から $y=3$ となります。したがってこの対応を表現する点の座標は $(1, 3)$ です。この点を点 A としましょう。つまり、 $A(1, 3)$ です。同様に $x=2$ のときの対応は点 B $(2, 5)$ 、 $x=0$ のときの対応は点 O $(0, 1)$ で表すことができます。これらの点を座標軸にとると下の左図のようになります。これらの点から、右図のように 2 つの三角形 $\triangle OAC$ と $\triangle OBD$ が得られます。



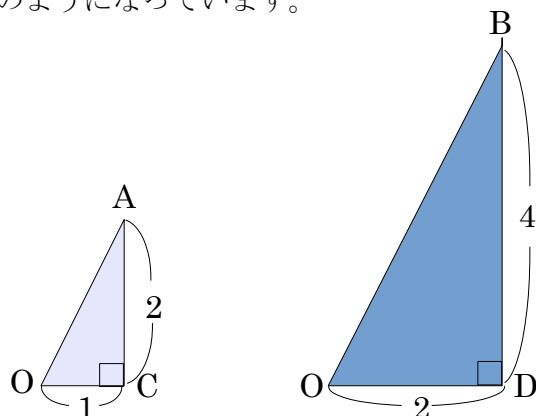
右図では点 O、A、B を通る直線が引いてあるように見えますが、これは OA と OB が重なっているように見えるだけであり、まだ点 O、A、B が同じ直線の上にあるのかはわかりません。

点 O、A、B が同じ直線にあることを示すために、 $\angle AOC$ ($=\angle AOD$) と $\angle BOD$ の大きさが等しくなるかを考えてみましょう。

$\triangle OAC$ において、辺 OC の長さは $x=1$ としたので $OC=1$ となります。また辺 AC は x 軸に垂直な直線の一部なので、 $\angle ACO$ は直角になります。最後に辺 AC の長さは点 A の y 座標の

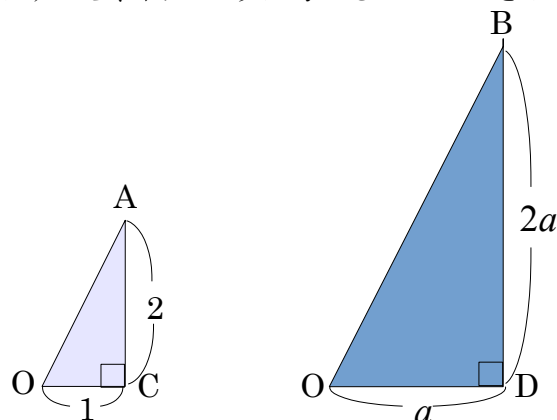
値から 1 を引いたものになりますから、 $AC=2$ となります。

同様に考えると、 $\triangle BOD$ において $OD=2$ 、 $\angle BOD$ は直角、 $BD=4$ となります。つまり、2 つの三角形は下図のようになっています。



6 年生の拡大図と縮図の学習を思い出すと、 $\triangle OBD$ は $\triangle OAC$ を 2 倍に拡大した図になっていると考えられます。したがって、 $\angle AOC = \angle BOD$ となり、点 O 、 A 、 B は同じ直線の上にあるとわかります³。

今は簡単のために $x=0$ と $x=1$ 、 $x=2$ の場合を考えましたが、 $x=0$ と $x=1$ 、 $x=a$ ($a>0$) のときも下図のようになりますから、同じように考えることができます。



この場合、 $a>1$ なら拡大図、 $a<1$ なら縮図になります。また $a<0$ の場合、つまり 3 つの目の点を x が負になるところにとる場合は、三角形が上下逆さまになりますが、できる三角形は $\triangle OAC$ の拡大図か縮図になります。

以上より、 x の関数 y が $y=2x+1$ により決まるときは、その x と y の対応を表現する点 (上の点 B) は、いつでも点 O と点 A を結ぶ直線の上にあることがわかります。したがって、この x の関数 y のグラフは直線になります。

3 拡大図と縮図については、3 年生で「相似」としてよりくわしく学習します。