第4節　１次関数の特徴

☆　前節では、１次関数$y=2x+1$を例にとり、１次関数を表現する方法について考えてきました。そして、式、グラフ、表を用いることで、xの１次関数yのようすを表現することができました。本節では、これらの表現を利用しながら、１次関数にはどのような特徴があるのかを探っていきましょう。第１節で述べたように、関数を考えているときには、

・yはxとどのような関係にあるか。

・yはxの変化に対応してどのように変化するか。

に着目することが大切です。式、グラフ、表は１番目の「yはxとどのような関係にあるか」を教えてくれます。そこで、本節では主として２番目の「yはxの変化に対応してどのように変化するか」について調べていきましょう。

（１）１次関数の変化の特徴

１次関数$y=3x+2$について、次の表をうめてみましょう。そして、xの値が1増えるとき、yの値がどのように変化するかを調べてみましょう。

x	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y							-4	-1	2	5	8						

１次関数の特徴をはっきりさせるために、反比例と比較をしてみます。反比例　$y=\dfrac{12}{x}$ についても下の表をうめて、xの値が1増えるとき、yの値がどのように変化するかを調べてみましょう[1]。

x	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y								-12	×	12	6	4	3	2.4	2	1.7	1.5

ここを見つけたことを、下の２つのオンラインワークシートに入って、確かめてみましょう。

１次関数：http://www.juen.ac.jp/g_katei/nunokawa/function/change_in_linear_function.html

反比例　：http://www.juen.ac.jp/g_katei/nunokawa/function/change_in_inverse_proportion2.html

1　$x=7$のとき y=12/7 は割り切れませんが、計算を容易にするためにおよその小数にしておきます。

前のページでの観察からわかるように、反比例では、x の値が 1 増えるときに y の値がいくつ変化するかは x の値により異なるのに対して、１次関数では、x の値が 1 増えるときの y の値の変化は x の値によらず一定になっています。つまり、この変化の仕方は、１次関数と反比例とでは違っているようです。

では、この特徴は、x の値の増え方が別のときでも言えるでしょうか？x の値の増加量が 0.5 のときと、0.1 のときについて、下の表をうめて調べてみましょう。また、下のオンラインワークシートで、x の増加量の部分を 0.5 や 0.1 に変えて、y の増加量を観察してみましょう。

x	-3.5	-3	-2.5	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5
y				-4		-1		2		5		8			

x	-0.7	-0.6	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
y								2							

ワークシート：http://www.juen.ac.jp/g_katei/nunokawa/function/change_in_linear_function2.html

１次関数 $y=3x+2$ では、x の増加量が 1 から 0.5 へと 1/2 倍になると、y の増加量も 1/2 倍になります。また、x の増加量が 1 から 0.1 へと 1/10 倍になると、y の増加量も 1/10 倍になります。このことから、ある決まった数があり、それに x の増加量をかけると y の増加量になると予想されます。つまり、決まった数を a とすると、

$$(y\text{の増加量}) = a \times (x\text{の増加量})$$

です。ここから、 $\dfrac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}} = a\,(\text{一定})$ となります。

ここで考えた $\dfrac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$ 、つまり(x の増加量)をもとにしたときの(y の増加量)の割合のことを１次関数 $y=3x+2$ の**変化の割合**とよびます。ここまでのことから１次関数 $y=3x+2$ では、変化の割合が一定の値 3 であることが予想できました。この予想が正しいのか、今度は式に戻って考えてみましょう。

例えば、x の値が 5 から 5.1 に増えたときを考えてみます。x の増加量 は $0.1=5.1-5$ です。$x=5$ のときの y の値は $3\times5+2$、$x=5.1$ のときの y の値は $3\times5.1+2$ となりますから、結局、y の増加量は $(3\times5.1+2)-(3\times5+2)$ となります。これらを変化の割合の式に代入すると、次のように

なります。

$$\frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}=\frac{(3\times5.1+2)-(3\times5+2)}{5.1-5}$$
$$=\frac{3\times(5.1-5)}{5.1-5}$$
$$=3$$

この式を見ると、最初に考える x の値、x の増加量がほかのときでも同じ計算ができそうです。

問：１次関数 $y=3x+2$ の変化の割合を次のときに計算してみましょう。

(1) x の値が－3 から－2 増えたとき　　(2) x の値が 8 から 8.5 に増えたとき

(3) x の値が 0 から 0.1 に増えたとき　　(4) x の値が－5 から－4.9 に増えたとき

また、以下のオンラインワークシートに入り、ほかの x の値のときや、他の１次関数についても調べて見ましょう。

http://www.juen.ac.jp/g_katei/nunokawa/function/rate_of_change.html

式で確かめてわかるように、１次関数 $y=3x+2$ の変化の割合は一定で、その値は x の係数である 3 と同じになっています。

上と同じ計算を、１次関数 $y=ax+b$ について考えてみましょう。x の値が x_1 から x_2 まで変化したとします[2]。$x=x_1$ のときの y の値は ax_1+b、$x=x_2$ のときの y の値は ax_2+b なので、x の値が x_1 から x_2 まで変化したときの１次関数 $y=ax+b$ の変化の割合は次のようになります。

$$\frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}=\frac{(a\times x_2+b)-(a\times x_1+b)}{x_2-x_1}$$
$$=\frac{a\times(x_2-x_1)}{x_2-x_1}$$
$$=a$$

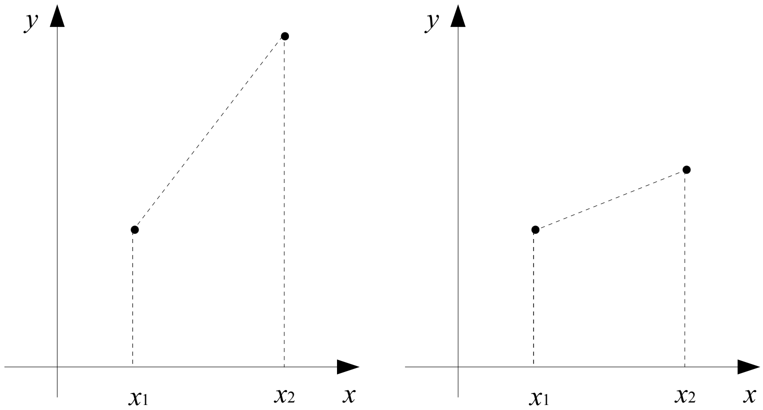
これより、１次関数 $y=ax+b$ の変化の割合は、いつでも x の係数 a に等しくなることがわかります。

１次関数 $y=ax+b$ の変化の割合は一定で、x の係数 a に等しくなります。

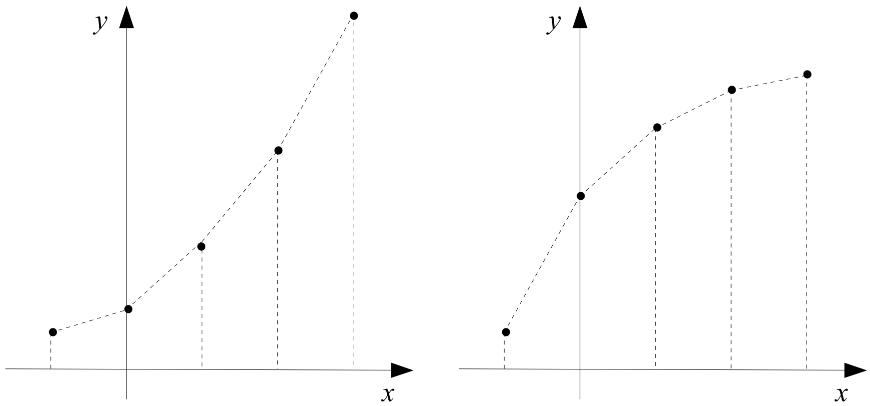
2　x_1 と x_2 はそれぞれ１番目の x の値、２番目の x の値を表しています。

次に、変化の割合が一定であるということが、何を意味をするのかを考えてみましょう。

下の左の図と右の図を比べると、x の値が同じだけ増加しているにも関わらず、左の図の方が y の増加量が大きいことから、左の図の方が変化の割合が大きくなります。



これより、もしも変化の割合がだんだん大きくなるときは、y の増加量が大きくなっていくので、グラフはおよそ下の左ような形になります。変化の割合がだんだん小さくなるときは、y の増加量が小さくなっていくので、グラフは右のような形になると考えられます。



変化の割合が一定ということは、x の増加量に対して y の増加量はいつも同じということ、つまり x の変化に対して関数 y は同じペースで変化することであり、またグラフは上のように曲がることはなく、したがって直線になることがわかります。

１次関数 $y=ax+b$ の変化の割合が一定であることから、１次関数はいつも同じペースで変化することがわかります。また、そのために１次関数のグラフは直線になります。

前節では、いろいろな x の値に対して１次関数 y の値を求め、その値の組を点で表すことにより、１次関数のグラフをかきました。そのときにもグラフが直線になることを見つけま

したが、そのグラフが直線になるという特徴は、変化の割合が一定であるという１次関数の特徴を表していたのです。

（２）１次関数の式とグラフの関係

（１）では１次関数の式の形から、変化の割合が一定になること、そして変化の割合が一定になることから、グラフが直線になることを見てきました。ここでは、式の係数などの値とグラフの関係をさらに調べてみましょう。

<u>x の係数 a とグラフの関係</u>

先に、変化の割合は x の係数 a に等しくなることがわかりました。また変化の割合が大きいと x の増加量が同じでも y の増加量は大きくなり、変化の割合が小さいと y の増加量は小さくなりました。したがって、係数 a の大きさにより、グラフの傾きは大きくなったり小さくなったりすると考えられます。

問：下のオンラインワークシートに入り、係数 a の値を変化させたときのグラフの傾きを観察しましょう。

http://www.juen.ac.jp/g_katei/nunokawa/function/slope_of_linear_function1.html

x の係数 a が負の値になったときは、グラフはどうなるでしょうか。x が増加したときに y の増加量が負の値ということは、結局、y は減少するということになります。したがって、a が負の値のときは、１次関数のグラフは右下がりとなり、a の値が小さいほど（つまり、a の絶対値が大きいほど）その傾きは大きくなると考えられます。

問：下のオンラインワークシートに入り、係数 a の値が負のとき、その値を変化させるとグラフの傾きがどのように変わるかを観察しましょう。

http://www.juen.ac.jp/g_katei/nunokawa/function/slope_of_linear_function2.html

以上で調べてきたことをまとめると、次のようになります。

	$a>0$ (x の係数が正)	$a<0$ (x の係数が負)
関数の増減	x 増加すると y も増加	x 増加すると y は減少
グラフの向き	グラフは右上がり	グラフは右下がり
傾きの大きさ	a の絶対値が大きくなるほど傾きが大きくなる	
関数の変化	a の絶対値が大きくなるほど y の変化の程度が大きくなる	

x の係数 a やグラフの傾きは、１次関数の増加や減少の速さを表しています。a の絶対値が大きく、グラフの傾きが大きいときは、１次関数は速く増えたり、速く減ったりします。

なお、こうした関係から、 x の係数 a を１次関数の**傾き** (slope) と呼ぶことがあります。

定数項 b とグラフの関係

１次関数の式 $y=ax+b$ に対して関数 $y=ax$ を考えてみると、これは比例になる。したがって、定数項 b は１次関数 y が比例 $y=ax$ からどの程度ずれているかを表している。

問：次の表を埋めて、１次関数 $y_1=2x+3$ と比例 $y_2=2x$ の関係について調べてみましょう[3]。

x	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y_1								1	3	5	7						
y_2								-1	0	2	4						

問：次のオンラインワークシートに入り、１次関数 $y=ax+b$ の b を変化させたときに、グラフがどのように変わるかを観察しましょう。

http://www.juen.ac.jp/g_katei/nunokawa/function/y-intercept_of_linear_function.html

以上で調べたように、１次関数 $y=ax+b$ の b の値は、その１次関数が比例 $y=ax$ からどの程度ずれているかを表しています。また、$x=0$ のとき $y=b$ となることから、b は基準の点 $x=0$ のときの関数 y の状態を表しているとも言えます。$x=0$ のときの関数 y の状態が、比例 $y=ax$ からのずれであり、１次関数全体に影響をおよぼしているのです。

また、b は $x=0$ のときの y の値であることから、１次関数のグラフと y 軸との交点の y 座標になっています。グラフが y 軸を切り取る場所ということで、b を **y 切片** (y-intercept) と呼ぶことがあります。

（３）特徴をいかした１次関数の表現のしかた

第３節では、変数 x の値に対応する変数 y の値が $y=ax+b$ の式により決まることを利用して、その対応のようすを点で表したり、表の x と y の組として表したりして、１次関数を表現してきました。ここでは、（１）と（２）で１次関数の特徴について調べてきたことをいかし、１次関数の特徴を利用して式をもとめることを考えてみましょう。

今、変数 x の関数 y が下の表で与えられており、また、y が x の１次関数であることがわ

3　y_1 と y_2 で１と２を添えているのは、１番目の関数、２番目の関数を示すためです。

かっているとします。このとき、この１次関数の式を求めてみましょう。

x	3	4	5	6	7	8	9	10
y	10	14	18	22	26	30	34	38

１次関数の式は $y=ax+b$ という形をしているので、a と b の値を求めれば式が決まります。

まず a の値を求めてみましょう。

$$\text{変化の割合} = \frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}} = a$$

でしたから、x の増加量が 1 のときは、y の増加量が a の値になります。上の表から x が１増えると y は 4 増えることがわかりますから、$a=4$ となります。

今、求める式が $y=4x+b$ という形になることがわかりました。ここで表から、例えば $x=3$ のときは $y=10$ になることがわかります。したがって、

$$10=4\times3+b$$

これより、$b=-2$ とわかります。以上より、上の表で与えられた１次関数の式は、

$$y=4x-2$$

となります。

考えている１次関数の式が求められたことで、表にない x の値についても対応する y の値を考えやすくなります。また a の値により変化のようすやグラフの傾きもわかりますし、y 切片により比例 $y=4x$ からのずれのようすがわかります。

問：次の表で与えられた１次関数の式をそれぞれ求めましょう。

（１）

x	3	4	5	6	7	8	9	10
y	5	3	1	−1	−3	−5	−7	−9

（２）

x	−8	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1
y	−45	−39	−33	−27	−21	−15	−9	−3

（３）

x	2	4	6	8	10	12	14	16
y	1	6	11	16	21	26	31	36

１次関数の表から式を求めたときの考え方を使うと、例えば、次のような情報だけしかないときでも、１次関数の式を求め、関数全体を復元することができます。

・１次関数の傾きと１組の x と y の値

・２組の x と y の値

<u>傾きと１組の x と y の値についての情報を用いる場合</u>

１次関数の傾きが $-\frac{5}{3}$ 、$x=6$ のとき $y=2$ であることがわかっているとします。

傾きが $-\frac{5}{3}$ なので、この１次関数の式は、

$$y=-\frac{5}{3}x+b$$

という形をしていることがわかります。また $x=6$ のとき $y=2$ なので、今の式に $x=6$、$y=2$ を代入してみます。すると、

$$2=\left(-\frac{5}{3}\right)\times 6+b$$

これより $b=12$ であることがわかります。以上より、今の１次関数の式は、

$$y=-\frac{5}{3}x+12$$

となります。

<u>２組の x と y の値についての情報を用いる場合</u>

例えば、$x=3$ のときに $y=3$、$x=6$ のときに $y=5$ であることがわかっているとします。

考え方１：1 次関数の式は $y=ax+b$ という形なので、傾き a と y 切片 b の値を求めます。

$$a=\text{変化の割合}=\frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$$

で、これは x の増加量によらずに一定でした。そこで今わかっている 2 組の値を、この式に代入して a の値を求めます。x の増加量は 6－3、 y の増加量は 5－3 なので、

$$a=\frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}=\frac{5-3}{6-3}=\frac{2}{3}$$

したがって、傾きは $\frac{2}{3}$ であり、1 次関数の式は $y=\frac{2}{3}x+b$ となります。

$x=3$ のときに $y=3$ なので、今の式にこの値を代入します。

$$3=\frac{2}{3}\times 3+b$$

これより $b=1$ となり、1 次関数の式は $y=\frac{2}{3}x+1$ とわかります。

考え方２：1 次関数の式を $y=ax+b$ とすると、$x=3$ のときに $y=3$、$x=6$ のときに $y=5$ であるから、これらの値を今の式に代入すると、等式が成り立ちます。そこで、

$$\begin{cases} 3=a\times3+b \\ 5=a\times6+b \end{cases}$$

これを連立方程式として解くと、 $a=\dfrac{2}{3}$ 、$b=1$。よって求める 1 次関数の式は、

$y=\dfrac{2}{3}x+1$ 。

問：x の関数 y が 1 次関数であることと次の情報がわかっているときに、それぞれの 1 次関数の式を求めましょう。

（1） 傾きは－2、$x=3$ のとき $y=-1$

（2）傾きは $\dfrac{1}{7}$ 、 $x=5$ のとき $y=1$

（3） $x=-1$ のとき $y=-8$、 $x=2$ のとき $y=1$

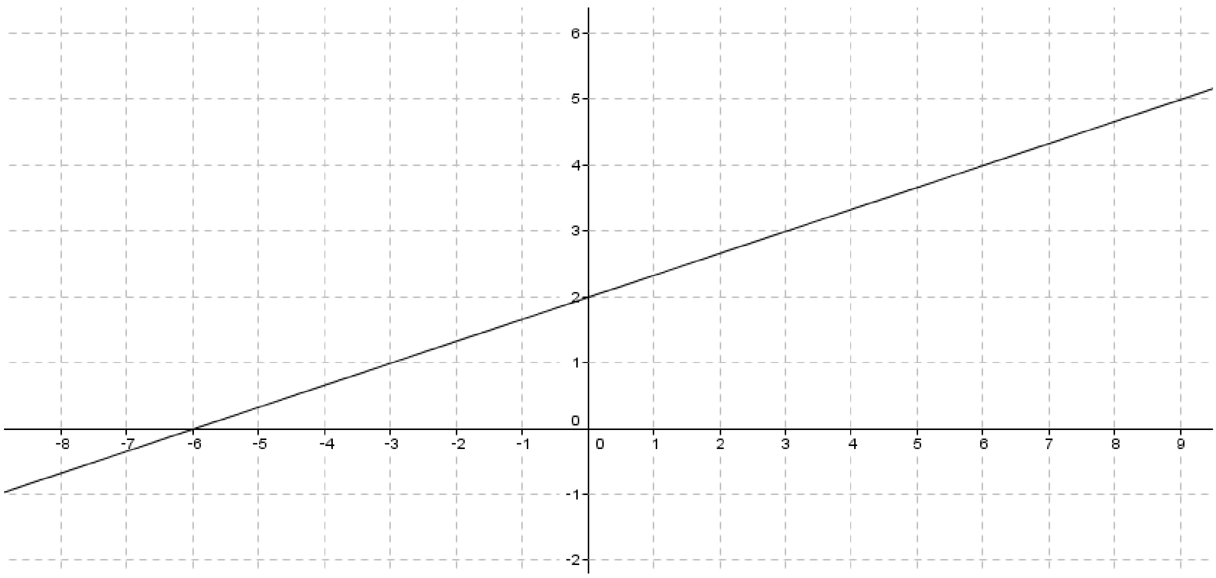
（4） $x=-2$ のとき $y=-1$、 $x=3$ のとき $y=3$

問：下のオンラインワークシートに入り、自分で２組の x と y の値を決め、その式を求めてみましょう。

http://www.juen.ac.jp/g_katei/nunokawa/function/algebraic_expression_from_2points.html

今度は、関数のグラフが与えられたときに、その関数の式を求めてみましょう。

例えば、x の関数 y のグラフとして下のものがわかっているとします。



まずグラフが直線になっていることから、関数 y が同じペースで変化していること、つま

り、変化の割合が一定であることがわかります。そこから関数 y は x の 1 次関数であるとわかり、その式は $y=ax+b$ という形をしていることになります。

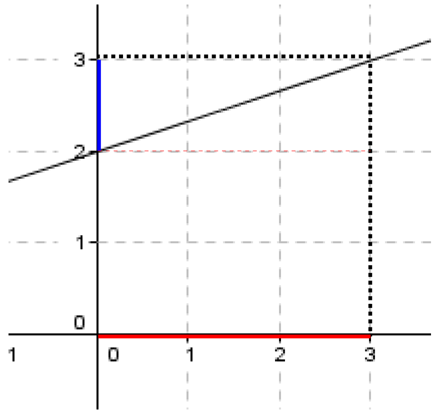
さきほど学習したことから、次のうちのいずれかの情報がわかれば、この式を求めることができます。

・１次関数の傾きと１組の x と y の値

・２組の x と y の値

そこで、グラフからこれらの情報が読み取れないかを考えてみます。

傾きと 1 組の x と y の値



グラフの中の右の部分に着目すると、x の値が 0 から 3 に増加しているときに、y の値は 2 から 3 に増加しています。そこで、

$$a=\frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}=\frac{3-2}{3-0}=\frac{1}{3}$$

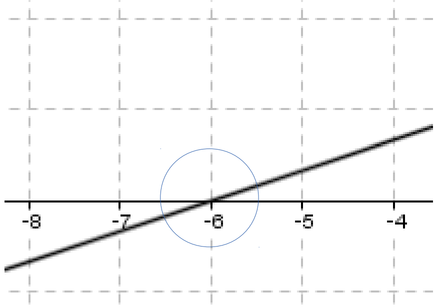
となり、傾きが $\frac{1}{3}$ であることがわかります。

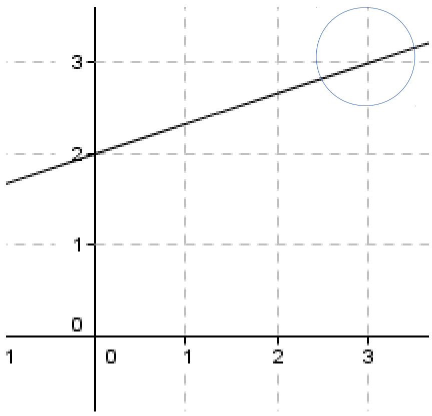
また、グラフから x=0 のとき y=2 とわかるので、この値を $y=\frac{1}{3}x+b$ に代入して、b=2 となります。以上より、グラフで表された 1 次関数の式は、$y=\frac{1}{3}x+2$ とわかります。

【補足】x=0 のとき y=2 より y 切片が 2 と考えても式を求めることができます。

２組の x と y の値

グラフで x と y の値が読み取りやすい場所をさがします。例えば、下のような２箇所に着目してみます。





　この部分の座標から、$x=-6$ のとき $y=0$、 $x=3$ のとき $y=3$ であることがわかります。２組の x と y の値がわかりましたから、さきほど学習したように、次のような考え方で１次関数の式を求めることができます。

・２組の x, y の値を用いて、傾きを求める。

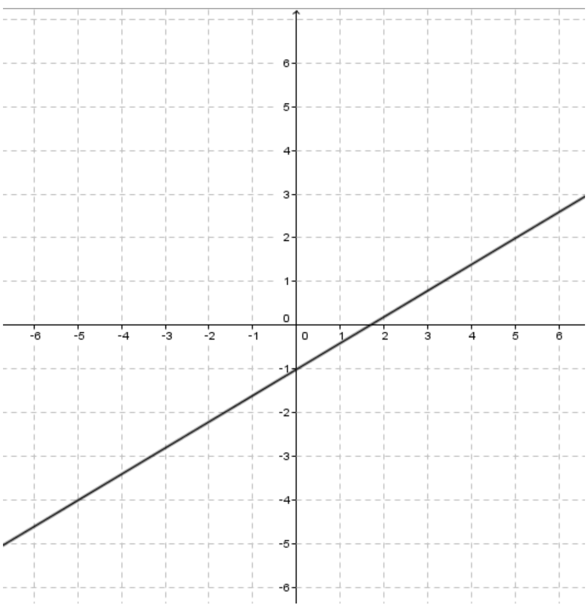
あるいは

・連立方程式 $\begin{cases} 0=a\times(-6)+b \\ 3=a\times3+b \end{cases}$ を解いて a と b の値を求める。

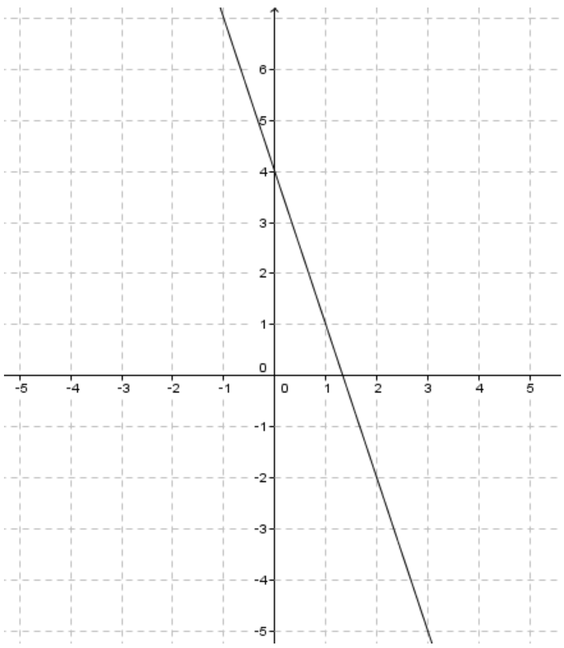
　それにより、グラフで表された１次関数の式が $y=\dfrac{1}{3}x+2$ とわかります。

問：次のグラフで表される１次関数の式を求めましょう。

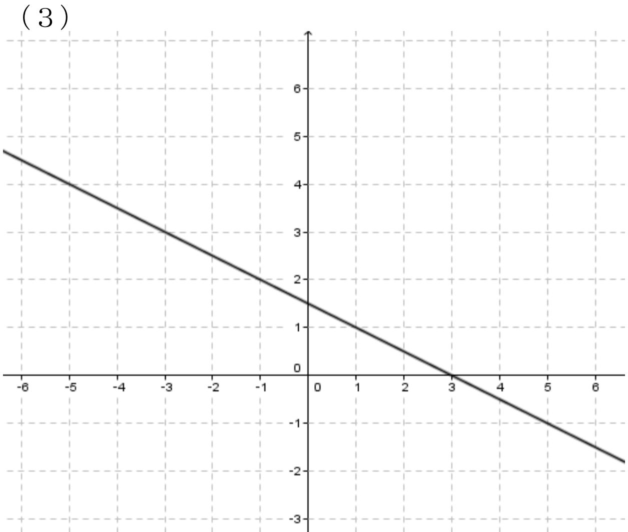
（1）



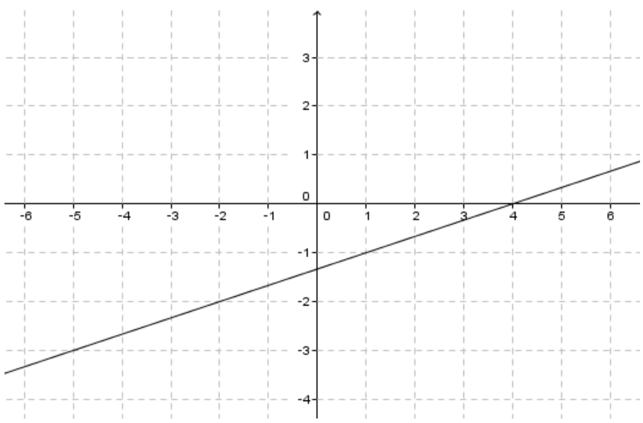
（2）



（3）



（4）



（４）特徴をいかした１次関数のグラフのかき方

１次関数の変化の割合は一定であることから、そのグラフは直線になることを確かめました。したがって、１次関数のグラフをかくことは、１つの直線を決めることと同じになります。では、直線を決めるには何がわかればよいを考えてみると、次の２つの場合に直線が決まることがわかります。

・直線が通る２点がわかる。

・直線が通る１点と、直線の方向がわかる。

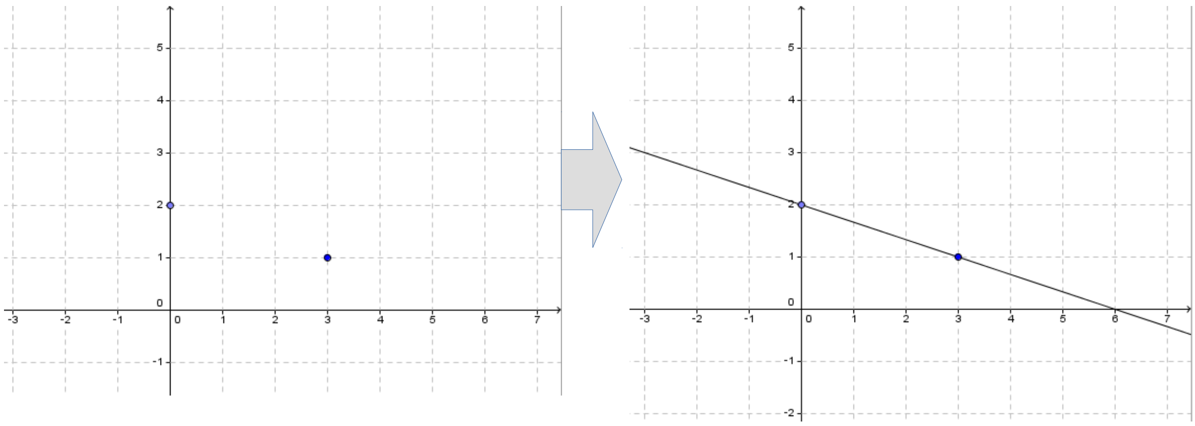
１次関数の式から、これらの情報を得ることができれば、グラフをかくことができます。

<u>直線が通る２点の情報を用いる場合</u>

１次関数を表す式が $y=-\frac{1}{3}x+2$ であるとします。定数項の２は y 切片の値であり、そこから $x=0$ のとき y=2 となることがわかります。また $x=3$ を式に代入してみると、

$$y=-\frac{1}{3}\times 3+2=1$$

となり、$x=3$ のとき $y=1$ であることがわかります。したがって、これら２組の x, y の値を表す点 (0, 2)と(3, 1)をとり、それを結ぶ直線をかけば $y=-\frac{1}{3}x+2$ のグラフとなります。



問：下のオンラインワークシートに入り、上のようにしてかいた直線では、直線上の点の x 座標、y 座標がすべて $y=-\frac{1}{3}x+2$ の式を成り立たせることを観察しましょう。

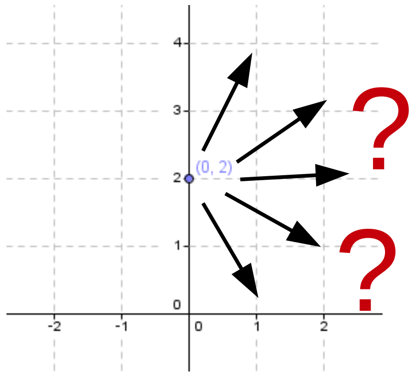
http://www.juen.ac.jp/g_katei/nunokawa/function/check_the_graph.html

この問で観察されるように、上のようにして引いた直線の上にある点では、x に対応する y の値がすべて $y=-\frac{1}{3}x+2$ を満たしています。したがって、確かにこの直線は、式 $y=-\frac{1}{3}x+2$ で表される１次関数を表すグラフとなっていることがわかります。

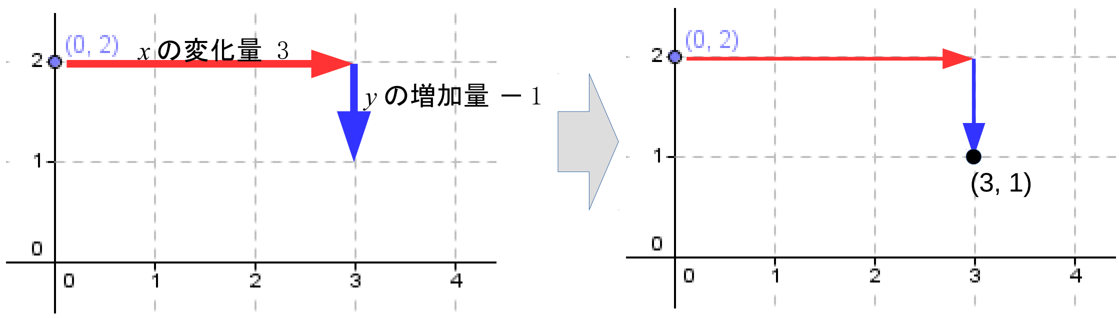
直線が通る１点と直線の方向についての情報を用いる場合

先ほどと同じ、式 $y=-\frac{1}{3}x+2$ で表される１次関数のグラフを、１点と直線の方向を調べることでかいてみます。

まず、前と同じように y 切片に着目すると、$x=0$ のとき $y=2$ ですから、点 (0, 2)を通ることがわかります。しかし、このとき (0, 2)からどの方向に直線を引いたらよいかが問題になります。ここで着目するのがグラフの傾きを表す x の係数の値です。



傾きは変化の割合と同じであり $\frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$ で求められますが、式から今は $-\frac{1}{3}$ であることがわかります。そこで、点 (0, 2)からの x の増加量が 3、y の増加量が－1 になるような点をとることができれば、$-\frac{1}{3}$ の傾きを作ることができます。例えば下図から、x が 0 から 3 まで 3 だけ増加し、そのときに y が 2 から 1 まで－1 増加すれば、そのときの変化の割合は $\frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}=-\frac{1}{3}$ とできます。



そこで、点 (3, 1)をとり、(0, 2)と(3, 1)を結びます。

問：次のオンラインワークシートに入り、点　(0, 2)とどのような点を結べば、 $-\frac{1}{3}$ の傾きを作ることができるかを調べてみましょう。

http://www.juen.ac.jp/g_katei/nunokawa/function/make_the_slope.html

第４節の学習では、まず第３節で学習した表現をいかして、１次関数の特徴を調べました。その結果、次のような特徴が見いだされました。

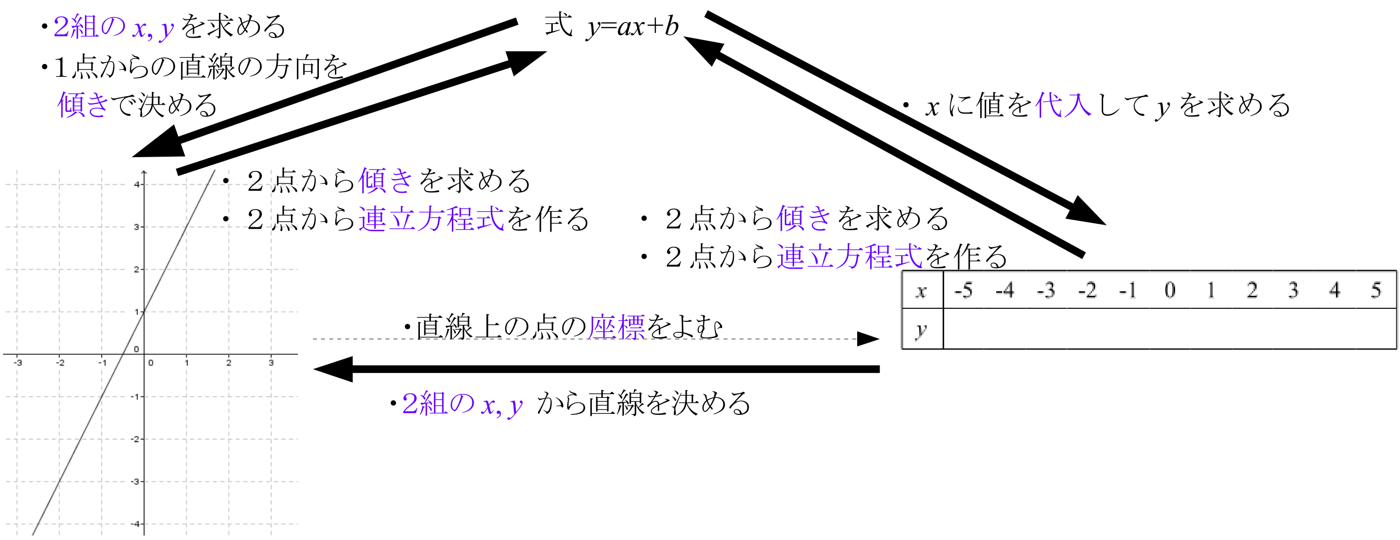
・ １次関数 $y=ax+b$ の変化の割合は一定で、x の係数 a に等しくなる。

・ 変化の割合が一定であり、いつも同じペースで変化することから、１次関数 $y=ax+b$ のグラフは直線になる。そのとき a の値は、グラフの傾きのようすを表している。

・ １次関数 $y=ax+b$ の b の値は、比例 $y=ax$ からどの程度ずれているかを表

また、これらの特徴に注意すると、１次関数のグラフを簡単にかくことができました。

１次関数の式、表、グラフという３つの表現は、下図のように、ある表現をもとにして別の表現をかくことができます。



このように３つの表現が行き来できるのは、これらが同じ１次関数を表しているからです。どの表現も、それぞれの x に対応してどのような y が決まっているかを表しています。