

第6節 1次関数と方程式

☆ 1次関数は式を用いて表されました。同じように式を用いるものとして方程式を学習しました。ここでは関数と方程式の関わりについて調べていきましょう。

(1) 2元1次方程式

2元1次方程式 $2x+y=7$ で、 x が次の値のときに y の値を求めてみましょう。

$$(1) x=2 \quad (2) x=-3 \quad (3) x=\frac{3}{4} \quad (4) x=-\frac{5}{2}$$

また、これ以外の x の値のときも y の値は求まるでしょうか。

2元1次方程式 $2x+y=7$ の解となるように x, y の値を考えていくと、それぞれの x の値に対応して y の値が決まります。そこで、2元1次方程式の解について、 y の値を x の関数とみなすことができます。

さらに $2x+y=7$ を変形すると $y=-2x+7$ となります。つまり、この2元1次方程式の解について、 y の値を x の関数と見るとき、 x の値に対応する関数 y の値を決めるきまりは、 x の1次式で表されることがわかります。したがって、2元1次方程式 $2x+y=7$ について、解の y の値は x の1次関数 $y=-2x+7$ と考えることができます。

このように2元1次方程式が1次関数を関係づけることで、2元1次方程式について調べるのに1次関数で学習したことを利用したり、逆に、1次関数について調べるのに2元1次方程式で学習したことを利用することができます。以下で、そのことのいくつかの例を見ていきましょう¹。

問：次の2元1次方程式について、解の y の値は x のどのような1次関数になっているでしょうか。その1次関数の式を求めましょう。

$$(1) -5x+y=10 \quad (2) x+2y=1 \quad (3) -2x-y=6 \quad (4) -3x+y-2=0$$

(2) 1次関数を利用した2元1次方程式の探求

2元1次方程式 $2x+y=7$ に対して(1)で見たように、1次関数 $y=-2x+7$ を決めることができます。今、この1次関数のグラフをかいてみます。

1 方程式がもっと複雑なものになり、それにともなって関数ももっと複雑になると、両者を関連づけて考えることの利点はもっとはっきりしてきます。

このとき、直線の上にある点の座標から得られる x, y の組が、いつでも 2 元 1 次方程式 $2x+y=7$ を成り立たせることを確かめましょう。

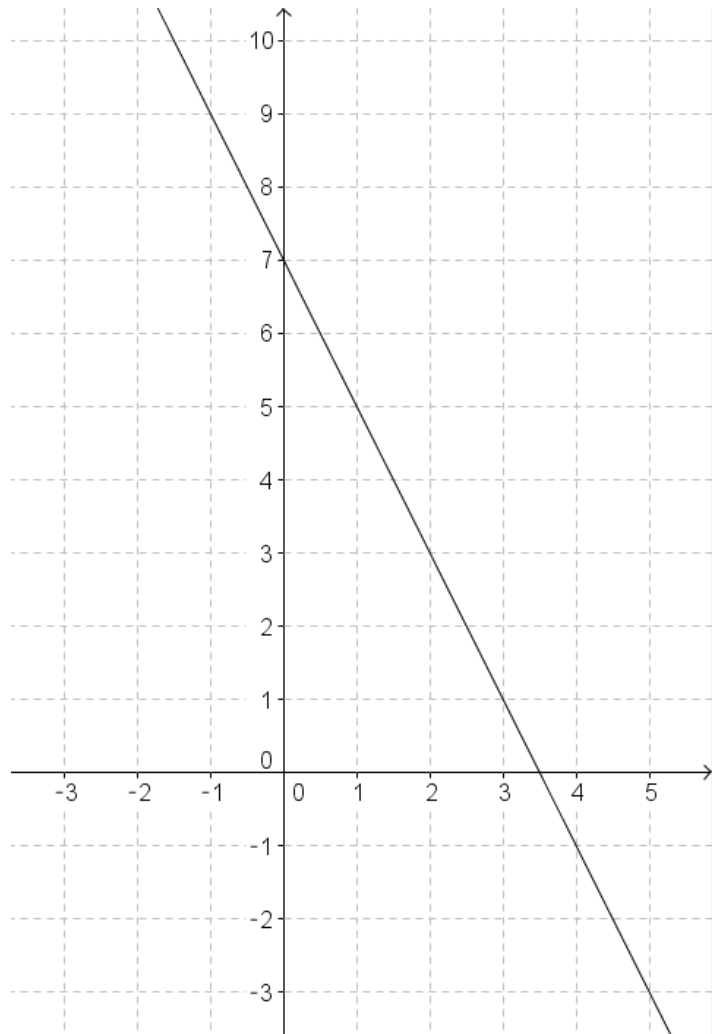
x の値が p のときに、1 次関数 y の値が q であるとします。今、1 次関数 y の値は $y=-2x+7$ という式で決まりましたから、

$$q=-2p+7$$

となっています。そこで、連立方程式の解法でやった代入法のようにして、 q のところに $-2p+7$ を代入して $2p+q$ を計算してみます。

$$2p+q=2p+(-2p+7)=7$$

つまり、 $x=p, y=q$ は 2 元 1 次方程式 $2x+y=7$ を成り立たせるので、この方程式の解になっていることがわかります。



問：下のオンラインワークシートに入り、1 次関数 $y=-2x+7$ のグラフである直線では、その上にある点の x 座標と y 座標が、いつでも 2 元 1 次方程式 $2x+y=7$ を成り立たせることを観察しましょう。また、直線の上でない点では、2 元 1 次方程式 $2x+y=7$ が成り立たないことも観察しましょう。

http://www.juen.ac.jp/g_katei/nunokawa/function/linear_function_and_equation1.html

上で考えてきたことからわかるように、1 次関数 $y=-2x+7$ のグラフは、2 元 1 次方程式 $2x+y=7$ の解の集まりを表していることがわかります。この方程式の解はたくさんありましたが、それを 1 本の直線により表すことができ、解の全体像を知ることができます。そこで、1 次関数 $y=-2x+7$ のグラフである直線を、**方程式 $2x+y=7$ のグラフ**と呼ぶこともあります。

同じ直線が、関数を表すこともあれば、方程式の解を表すこともあるのです。同じ直線について 2 つの見方を適宜利用したり、あるいはこの直線を媒介して関数と方程式を結びつけて考えることで、新しい見方がうまれやすくなります。

例えば、上のグラフを見ると、 x の値が大きくなるにつれて y の値は小さくなることがわ

かります。そこから、2元1次方程式 $2x+y=7$ の解についても、 x の値が大きくなるにつれて y の値は小さくなると考えられます。特に、解となる x, y の組については、 x の値が 3.5 より大きくなると y の値は必ず負の数になることがわかります。逆に、 x の値が 3.5 未満であれば、 y の値は必ず正の数となることもわかります。解の集まりをグラフで表すことで、解全体の中のパターンが見えやすくなるのです。

問：前のページで考えた次の2元1次方程式のグラフとして表してみましょう。また、その直線上の点の x 座標と y 座標が、方程式の解になっていることを確かめてみましょう。

$$(1) \quad -5x+y=10 \quad (2) \quad x+2y=1 \quad (3) \quad -2x-y=6 \quad (4) \quad -3x+y-2=0$$

なお、第4節で1次関数のグラフは、2組の x と y の値がわかればかくことができました。そこで、2元1次方程式のグラフをかくときも、適当に方程式の解を2組みつけることができれば、グラフをかくことができます。

例えば、2元1次方程式 $2x+y=7$ であれば、 $x=0$ のとき $y=7$ であることはすぐわかります。また、 $x=1$ のときは $y=5$ となります。したがって、点 $(0, 7)$ と点 $(1, 5)$ を結ぶ直線を引けば、それが2元1次方程式 $2x+y=7$ の解を表します。

(3) 連立方程式と1次関数

2元1次方程式の解について、その y の値を x の値の1次関数と見ることができること、またその関数のグラフが方程式の解の全体像を表していることを見てきました。

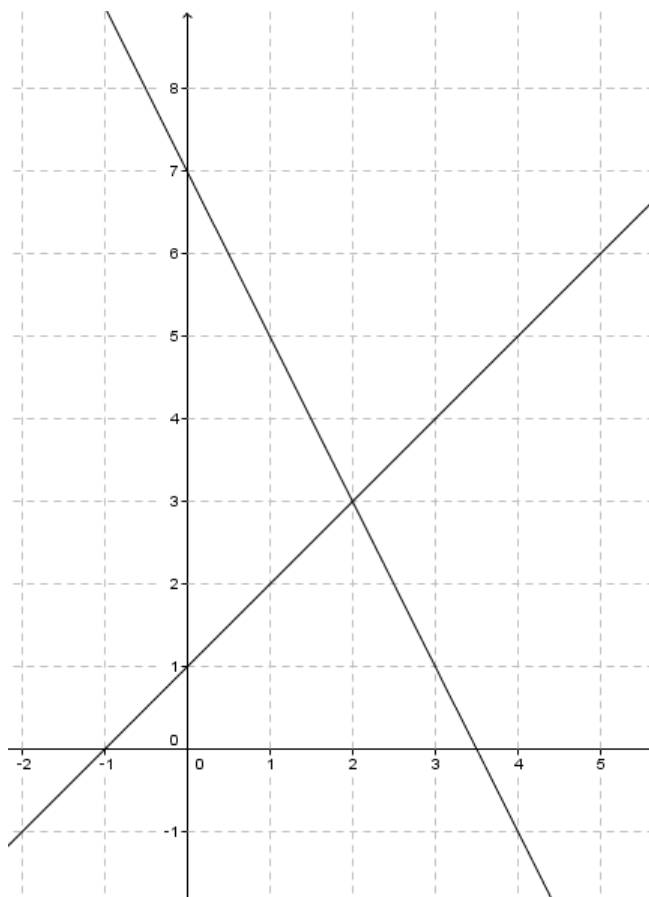
右図は、前にかいた方程式 $2x+y=7$ のグラフと、別の方程式 $x-y+1=0$ のグラフをいっしょにかいたものです。

この2つのグラフは1つの点で交わっています。方程式のグラフが解の集まりを表していたことを思い出すとき、右図の交点は何を表しているか考えてみましょう。

交点の x 座標と y 座標の組を考えると、この x, y の値の組は、方程式 $2x+y=7$ にもなっており、方程式 $x-y+1=0$ にもなっているということになります。つまり、この x, y の値の組は、

$$\begin{cases} 2x+y=7 \\ x-y+1=0 \end{cases}$$

という連立方程式の解になっていると考えられます。



問：上の連立方程式を解いて、その解が、図の交点の x 座標と y 座標と同じになっていることを確かめましょう。

また、図からわかるように、方程式 $2x+y=7$ のグラフは傾きが負、つまり x が大きくなるについて y が減少し、方程式 $x-y+1=0$ のグラフは傾きが正、つまり x が大きくなるについて y が増加しています。したがって、図にある交点以外には交点を持たないことがわかります。これは、上で求めた解のほかに連立方程式が解を持たないことを意味しています。

方程式のグラフは解の全体像を表しているので、全体的にみて、連立方程式がほかに解をもたないことを示すことができるのです。

問：次の連立方程式が1組の解しか持たないことを、方程式のグラフの形状をもとに説明してみましょう。

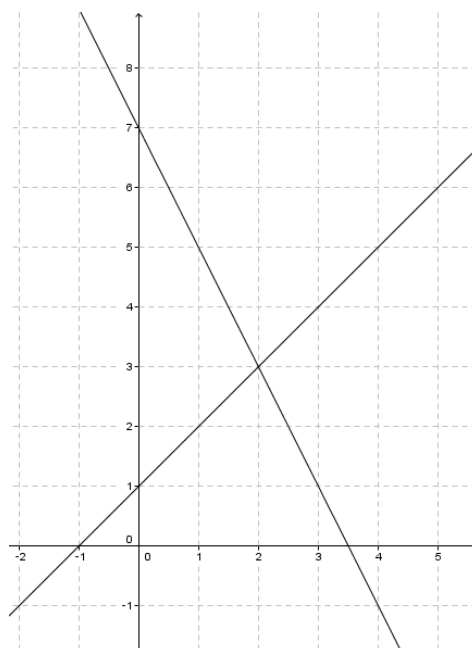
$$\begin{cases} 3x-y+1=0 \\ -x+2y=4 \end{cases}$$

問：次の連立方程式の解がどのようなになるかを、方程式を解くことと、方程式のグラフをか

くことにより説明してみましょう。

$$\begin{cases} -2x+y=1 \\ 4x-2y-2=0 \end{cases}$$

逆に、2つの1次関数 $y=-2x+7$ と $y=x+1$ を考えます。これらのグラフをいっしょにかくと、前ページのグラフと同じで、右のようになります。このグラフの交点の座標を求めることを考えてみましょう。

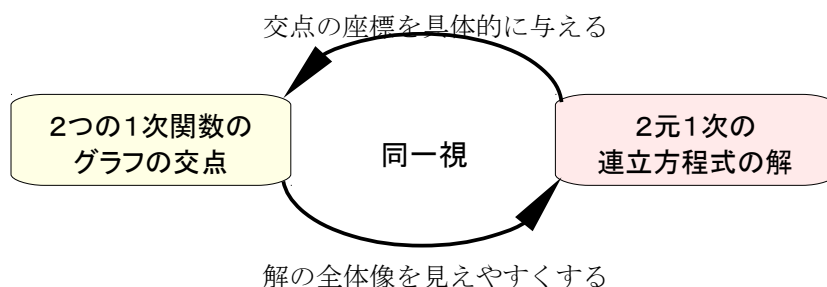


ここまで見てきたように、1次関数 $y=-2x+7$ のグラフの上の点は、2元1次方程式 $y=-2x+7$ 、つまり $2x+y-7=0$ の解になっています。また、1次関数 $y=x+1$ のグラフ上の点は、2元1次方程式 $y=x+1$ 、つまり、 $-x+y-1=0$ の解になっています。そこで、交点の座標は2つの方程式を同時に満たす解、つまり、連立方程式

$$\begin{cases} 2x+y-7=0 \\ -x+y-1=0 \end{cases}$$

の解になっています²。そこで、この連立方程式を解けば、交点のx座標とy座標が求まります。

このように、1次関数のグラフの交点の座標を求めるために、連立方程式を用いることができます。ここまで学習したことをまとめると、下の図のようになります。



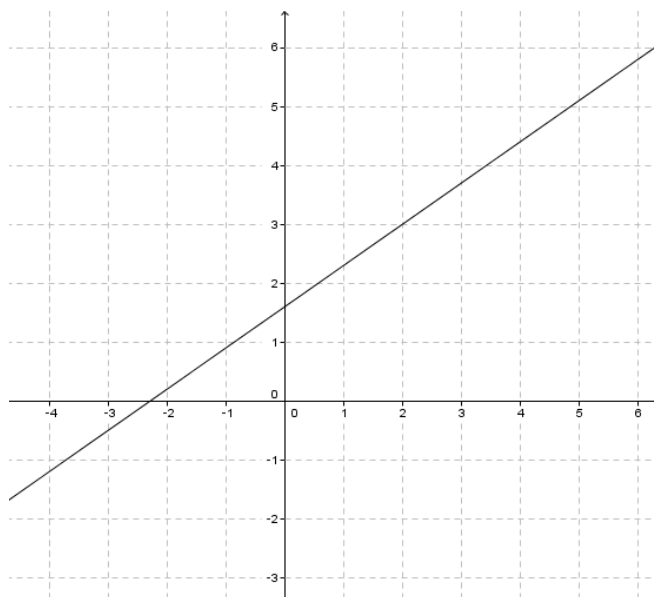
問：次の2つの1次関数のグラフの交点を求めましょう。またグラフで確認してみましょう。

(1) $y=3x+1$ と $y=\frac{1}{2}x+2$ (2) $y=-2x-6$ と $y=3x+2$

2 前ページの連立方程式と見た目は少し違いますが、移項をしたり両辺に -1 をかけたりすれば、同じものになります。

【補足】その他の直線

平面に座標軸を入れ、そこでいろいろな直線を考えてみます。直線の傾きや y 軸との交点の y 座標、つまり y 切片を考えると、この直線を1次関数のグラフと見ることができます。したがって、上で学習したように2元1次方程式の解の集まりとしても見ることができます。

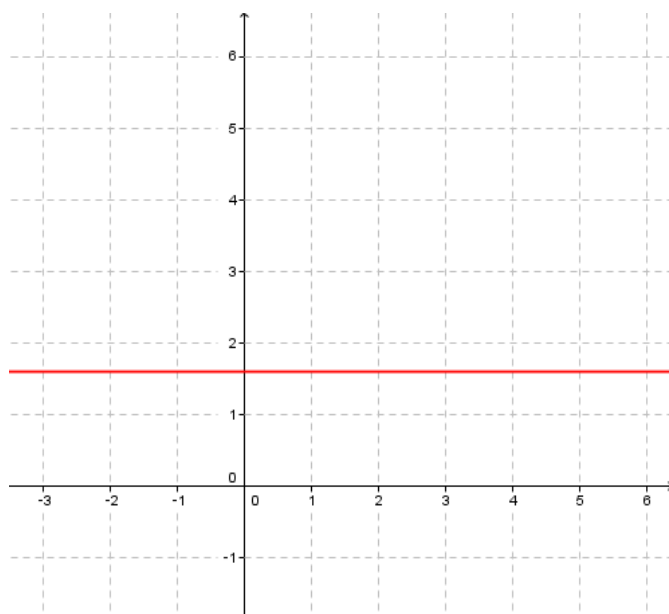


ただし、この方法で1次関数のグラフと見ることができない場合もあります。1つは傾きが0になってしまう場

合であり、もう1つは直線が y 軸と交わらない場合です。これらの場合も式で表せるのかを考えてみましょう。

傾きが0になる場合

例えば、右のグラフのように、直線が x 軸に平行になっているときを考えます。この直線のどの2点をとっても y 座標の値は同じですから、変化の割合を計算するといつも0となります。つまり、 $y=ax+b$ の a が0になってしまいます。



そのため、 y は x の1次式で表せないことになり、1次関数の式が求められないのです。

今、上のグラフのように、 y 座標がいつも同じ値 $\frac{8}{5}$ であるとしましょう。このとき、 x の値に対応して y が値がいつも $\frac{8}{5}$ と決まると考えると、 y は x の関数になっていることになります。算数で学習したように、ともなって変わるという意味では、 y は x にともなって変わってはいません。しかし、中学校1年生で学習したように、「 x の値を決めると、それ

に対応して y の値がただ 1 つ決まる」という意味では、 y は x の関数であると見ることができます。そして、すべての x に対して y の値がいつも $\frac{8}{5}$ になるということを、式

$$y = \frac{8}{5}$$

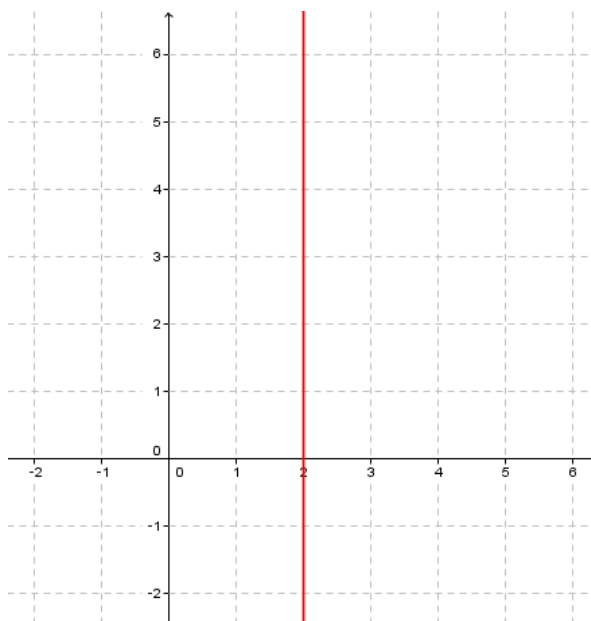
で表します。これはちょうど、 $y=ax+b$ の式に $a=0$ を代入した式と同じ形になっています。

y 軸と交わらない場合

直線が y 軸と交わらない場合を考えてみると、直線が y 軸に平行な場合であることがわかります。 y 軸に平行でなければ、 y 軸と交わってしまうからです。したがって、直線は右のようになっています。

このときは、 $x=2$ という値に対して y の値は 1 つに決まりません。したがって、 y は x の関数にはなりません。

なお、この直線上の点の座標を考えてみると、 x 座標はいつも 2 であり、 y 座標の値はすべての数が考えられます。



そこで、この直線の方程式を $x=2$ と書くことになっています。

x 軸に平行な直線の式は $y=q$ の形
 y 軸に平行な直線の式は $x=p$ の形

こうした形の式を認めることで、すべての直線を式により表すことができます。また、ここまで考えてきた式は、実は、次のような 1 つの形にまとめることもできます。

平面にある直線は $ax+by+c=0$ の形で表すことができます。

- ・ $a \neq 0$ かつ $b \neq 0$ のときが、1 次関数のグラフと見ることのできる直線になります。
- ・ $a=0$ かつ $b \neq 0$ のときが、 x 軸に平行な直線になります。
- ・ $a \neq 0$ かつ $b=0$ のときが、 y 軸に平行な直線になります。

なお、 $a \neq 0$ かつ $b \neq 0$ で、さらに $c=0$ のときは、比例のグラフ、つまり原点を通る直線になります。

問： $y=0$ で表されるのはどのような直線でしょうか。また $x=0$ で表されるのはどのような直線でしょうか。

問：次のオンラインワークシートに入り、 $ax+by+c=0$ の係数 a 、 b 、 c の値をそれぞれ変化させると、直線がどのように変わるかを観察しましょう。

http://www.juen.ac.jp/g_katei/nunokawa/function/general_expression4lines.html

ここで、次のような連立方程式を考えてみましょう。

$$\begin{cases} y=2x-4 \\ y=3 \end{cases}$$

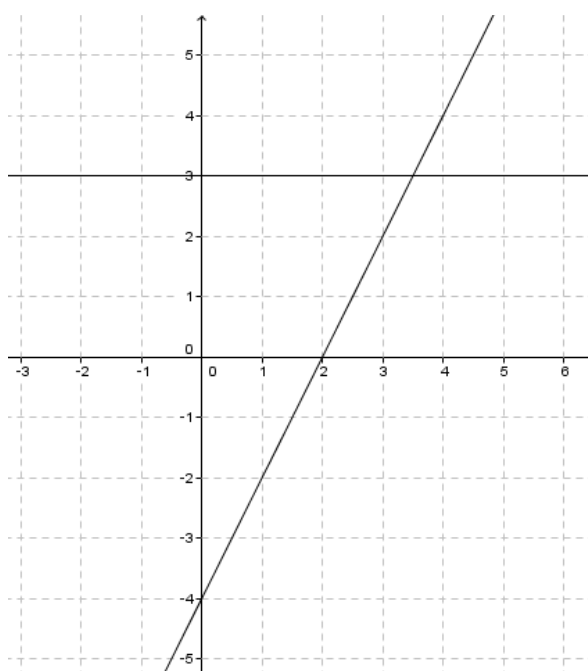
1 番目の 2 元 1 次方程式の解は、本節で学習したように 1 次関数 $y=2x-4$ のグラフで表すことができます。2 番目の式は上で学習したように、点 $(0, 3)$ を通り x 軸に平行な直線を表します。したがって、上の連立方程式をグラフで表すと右のようになります。

また連立方程式で 2 番目の式 $y=3$ を 1 番目の式に代入すると、

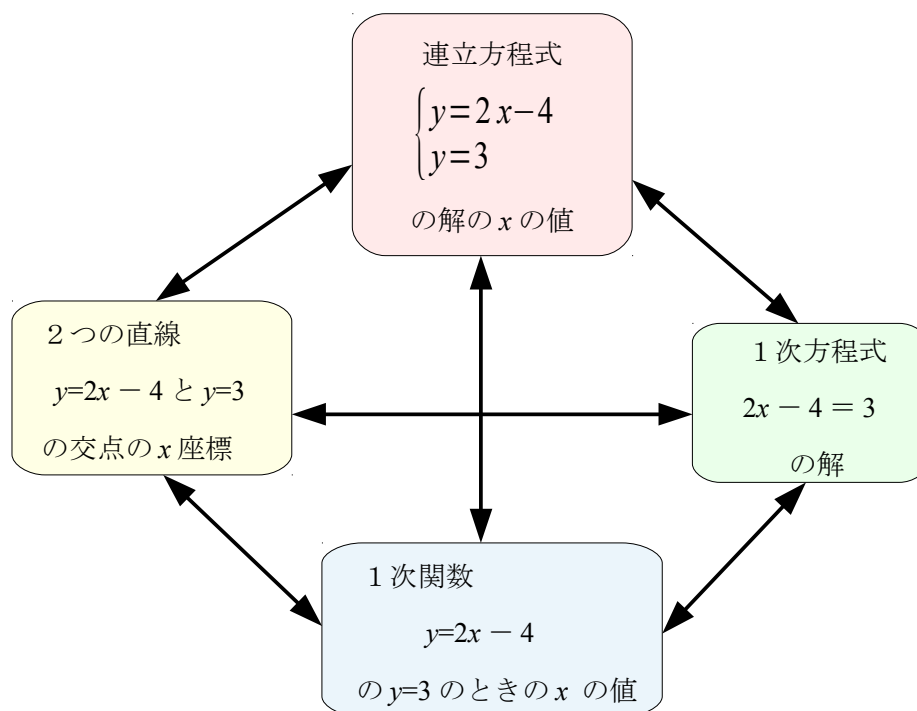
$$2x-4=3$$

となります。つまり、上の連立方程式は 1 元 1 次方程式 $2x-4=3$ を考えるのと同じこととなります。

問：1 次方程式 $2x-4=3$ の解を求め、それが上のグラフでは何を意味しているかを考えてみましょう。



$y=3$ という式が x 軸に平行な直線を表すと考え、次のように、1つの方程式やグラフに対して多面的な見方ができます。



問：次の連立方程式の解は、グラフでは何を表しているかを考えてみましょう。

(1) $\begin{cases} 5x+y-3=0 \\ y=-2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} y=3x-4 \\ y=0 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} x-y+1=0 \\ x=6 \end{cases}$