研究課題　「小学校中学年における比例的推論育成のための学習活動系列に関する学習過程臨床的研究」

研究期間　平成１７年度～平成１８年度

研究代表者	学習臨床講座	助教授	布川和彦
研究組織	学習臨床講座	教　授	中村光一
	附属小学校	教　諭	林　克巳

１．はじめに

小学校算数の学習内容のうち、特に子どもたちが学習に困難を抱きやすいものとして、５年生で学ぶ小数の乗除、割合、および６年生で学習する分数の乗除、比、単位量あたりが知られている。これらの学習においては、その背後にすべて比例的推論のアイデアが存在している。この比例的推論は小学校２年生の乗法の導入、あるいは３年生の除法の導入にその起源を持つものではある。しかし、我々の研究室に所属する大学院生（現職派遣教員）による研究授業を見てみると、小学校５年生で小数の乗除を学習する段階においても、比例的推論が十分に意識的に利用できない実態があり、そうした子どもたちの実態が５年生での算数の学習を一層困難にしているという状況が見えてきている。こうした現状を改善するためには、小学校高学年になる以前に子どもたちの間に比例的推論を育成することが求められるであろうし、そのためには、その育成を可能とする活動系列を開発し、算数のカリキュラムに組み込んでいくことが必要となる。

そこで本プロジェクトにおいては、小学校中学年に焦点を当て、この段階で既に学習している乗除の学習を基にしながら、中学年の子どもたちに比例的推論を育成するための学習活動系列を開発することを目的とした。その際に、学習過程臨床的な視点を採った。すなわち、開発した活動系列を実施した結果のみに目を向けるのではなく、その活動系列に取り組む子どもたちの学習過程全体をビデオに記録し、分析の対象とする。その記録を質的に分析・考察することにより、開発した活動系列が子どもたちにどのように学習されたのかを探るとともに、活動のさらになる改善のための情報を得ようと試みた。

こうした試みを通して、小学校中学年において比例的推論を育成するための活動系列を構想し、現在の算数のカリキュラムへのいわばサプリメントとして提案できることを目指したものである。

２．プロジェクトの背景

2.1 インフォーマルな比例的推論

吉田(2003)は興味深い調査結果を報告している。割合をまだ学習していない小学校５年生に対して、次のような問題を与えたときの正答率である。

- ４０個のおはじきのうちの５０％は、いくつでしょう。
- ４０個のおはじきのうちの２５％は、いくつでしょう。
- ４０個のおはじきのうちの７５％は、いくつでしょう。
- ４０個のおはじきのうちの９０％は、いくつでしょう。

これに対する正答率のグラフ(p. 114)を見ると、50％で７割弱、25％で５割強、75％でも５割弱の子どもたちが正答している。さらに 90％についても９％の子どもが正答している。吉田(2003)によると、これらの子どもは 10％や５％を求め、それをもとに解決したということである。90％については正答の「36」の代わりに「35」という値を書いた子がかなりおり、こうした子どもたちも加えると正答率は 40％に達している。この「35」という答えをした子どもたちの考え方としては、例えば、90％を 75％と 100％の中間と見て、75％が 30 個で残りが 10 個なので、この 10 個の半分の５を 75％の 30 個に加える、といった考え

方が紹介されている（p. 115)。こうした結果は、学習前であっても、子どもたちは割合についてそれなりの理解を持っていることを示している。また、その考え方の中には、割合が半分や 10 分の 1 になれば、対応する量も半分や 10 分の 1 になるという、比例的推論も含まれていることに気づくであろう。

National Research Council (2005)の 1 つの章は「有理数体系の教授」に当てられている。有理数についての学習を取り上げたものではあるが、そこでは、分数、小数、割合などについての子どもたちの理解が、乗法的関係というアイデアを中心にネットワークを形成し、個々の内容と中心のアイデアが互いに支え合うような理解になることが期待されている。つまり、小数や分数の学習についても比例的推論が背後に含まれていると考えている。

この章が提案する授業の流れにおいては、学習の始まる時点で子どもたちが乗法的関係に関わり（感覚的に）身につけている知識を最大限生かすという点に重点が置かれている。具体的には、一つは見た目に基づいて割合的な見積もりをすることであり、もう一つは半分にする操作をくり返し行うことである。子どもたちのこうした知識を生かすために、プログラムでは最初に割合が導入されている。百分率を利用することで、0 から 100 までの自然数を用いて多くの割合を数値化できることになる。初期の課題としては、黒いパイプに白いカバーをつけたものを提示し、パイプを全体としてカバーが覆っている部分の割合を見積もることが行われている。子どもたちは 50%が半分、99%がほとんど全部、1%がほとんどなしといった見積もりができ、また半分の操作ができるので 50%を利用して 25%や 75%なども考えることができる。

提案された授業では、同じ割合を異なる基準量のときに考えること、逆に同じ基準量で多様な割合のときの量を考えることが大切にされている。例えば、自分の選んだ 1 つの長さについてその 100%、75%、50%、25%にあたる長さを、実際にひもで作ってみるなどのことが行われている。

割合の学習の後、小数は２つの自然数の間の割合として導入されている。例えば 5.25 は５から６に 25%の距離にあることを指す。このことを活動を通して学ぶため、ストップウォッチが利用されている。5 秒と 6 秒の間に出てくる 5.25 という数字の意味を考え、それを既習の割合から意味づけるということであろう。また早押しのゲームなどを通し、小数の順序を考えさせて、0.09 が 0.10 より小さいことを理解できるようにしている。

半分の操作の影響からか、子どもたちは割合の学習の時点ですでに 1/2、1/4、1/8 などは利用していたと報告されている。最後の分数の学習場面ではこうした分数をもとに、それと同値な分数を考えることや、同値な分数の考えと既習の小数の内容とを結びつけるような活動が見られる。この活動の中で、扱える分数を広げたり、分数と割合、小数を結びつけたりすることが目指されている。

これらの活動においても、子どもたちが半分を中心に、比例的推論をある程度は利用することができるということが前提になっている(活動に対する考え方の詳細については布川(2006a)を参照)。

こうした先行研究は、子どもたちが比例的推論に基づいて考えることがある程度自然にできるということを示している。そこでは半分や 10 分の 1 など、これまでも子どもたちが

好むと報告されてきた(Pothier & Sawada, 1983)比例的推論に限定されており、これは比例的推論全般の利用を保証するものではない(布川, 2006b)。とはいえ、割合などを学習する前の子どもたちが比例的推論を利用して多様な活動を行える様子が見られており、算数の時間に正式に（フォーマルに）学習する以前に子どもたちが算数的概念に関わり持っている知識を、その知識に関わるインフォーマルな知識 (informal knowledge)と呼ぶならば、子どもたちは比例的推論についてインフォーマルな知識を有していると言えよう。比例的でない場面にも比例を適用する傾向があり(例えば、三輪, 1989)、しかもそれが矯正しにくいとする報告(例えば, De Bock ら, 1998; Modestou ら, 2004)を考慮するならば、比例的推論は人にとってむしろ自然な思考であるとも考えられる。

2.2 数直線利用の問題点

子どもたちが小数の乗除や割合など、比例的推論を背景に持つ内容を学習する際に、考えの助けとして活用されてきたものとして二重数直線がある(例えば、白石(2005)を参照)。また二重数直線あるいはこれに準ずる図式は、教科書においても考え方を示すものとして扱われてきた。

例えば、ある小学校３年生の教科書には、「テープ作り」という活動があり、その中で、15cm の赤いテープが 3cm の青いテープの何倍かという問いが出され、以下のような図が提示されている。

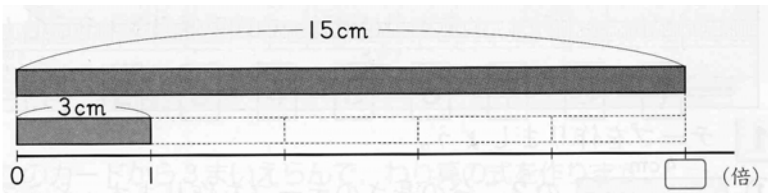

図１

この図自体は二重数直線とはなっていない。しかし、小学校５年生で用いられる図２のような二重数直線が背景にあり、同様の関係を、３年生のために２本のテープという現実の状況がよりリアルなまま残るような形で表現したと考えることができよう [1)]。

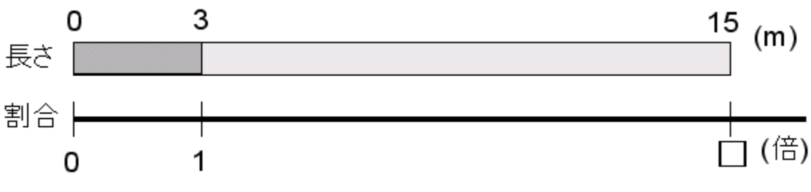

図２

図１と同様の図は、４年生で、身長 135cm の子が走り幅跳びで 270cm 跳んだときに、身長の何倍跳んだかを考える問題でも利用されている。さらに、４年生で除数が１位数のわり算の筆算を学習した後に位置づけられた、「どんな式になるかな」という活動では、例えば、48 人を 4 人で一組として分けると何組できるかを考える問題で、以下のような図が用いられている。

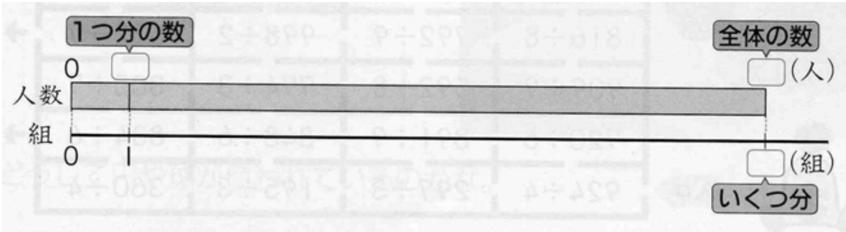

図３

この図は図２のような二重数直線に近い形式になっている。ここでは、問題の要素を二重数直線の□の部分に適宜当てはめていき、完成された図を見て演算を決定することが期待されていると考えることができよう。こうした活動が小学校３年生あるいは４年生で取り上げられていることは、教科書においても、二重数直線やその先駆形を中学年のうちから少しずつ発達させていこうという意図が込められていると考えることができる。

しかし、小学校の先生方からは、子どもたちが二重数直線を適切に使えないという話がよく聞かれる。例えば、平成 18 年度に実施された新潟県小学校教育研究会の調査の中で、小数のかけ算を二重数直線を用いて説明することを６年生に問うている問題があるが、これに対する通過率は 13.3％であると報告されている。またこの問題での無答率が 20.0％あり、二重数直線が子どもたちの考えを助けるものと十分になっていない状況が伺える。こうした状況が生じる一つの可能性として、二重数直線を用いて比例的推論を行うという活動が、教科書の中で扱われているとしても、どちらかというと補足的な扱いに見えてしまうことが考えられる。上であげた事例のうち、「どんな式になるかな」は÷１位数の単元の最後の小単元として位置づけられているものの、「テープ作り」や走り幅跳びの活動は「倍の計算」という特設ページとなっている。そのため、先生方からも「時間がないので扱わなかった」という話をよく聞くのである。

さらに、十分に子どもたちの考えの助けとなっていない状況の原因として、二重数直線の表現としての問題もある。図が思考の助けになるということはよく言われていることであるが、しかし実際には、二重数直線のような図の場合には、少なくとも子どもたちから見て利用上の制約がかなり多い表現と考えられる(廣井, 2001)。特に、二重数直線の上に配置された数値の位置から立式を求める、といった使い方の場合、位置関係をそのまま方程式に翻訳する(Dole, 2000)のならば比較的自然な手続きになるかもしれないが、数字や□の位置パタンだけからかけ算やわり算の式を決定することは、翻訳のきまりを覚えることにもなりかねないであろう。

2.3 学習活動系列の構成の方向性

2.1 で見たように子どもたちは限られた範囲とは言え､比例的推論に関わるインフォーマルな知識を有している。したがって、子どもたちの持っているインフォーマルな知識をフォーマルな知識に変えていくことが必要となる (Nunokawa (2005)参照)。インフォーマルな知識をフォーマルな知識に変えていくために重要になることの一つは、自らが利用しているインフォーマルな知識を意識化し、それを自覚的に活用していくことができるようになることであると考えられる。例えば、一方の量が半分なら他方の量も半分になることを何げなく利用していた子が、こうした素朴な比例的推論を意識し、一方の量における２つの

数値の関係を乗除に基づく関係により捉え、他方の量の２つの数値（未知なものを含む）に同じ関係が成り立つようにしようと考えていくことで、その関係が半分などに限られなくても対処できる可能性が出てくるであろう。

それでは、この意識化を促すためにはどのようにしたらよいであろうか。ここで、図形についての van Hiele (1986)の水準を参考に考えてみたい。van Hiele の水準は図形について子どもたちが持っているインフォーマルな知識がフォーマルな知識へ移行していく段階を示したものとして解釈することができる(布川, 1993)が、その移行を促すものは、インフォーマルな知識を用いて取り組んだ課題に対する自らの考え方を表現してみること、またその表現のための用語（図形の要素の名称など）を教師が導入することであった。同様に考えると、子どもたちが比例的推論について自分たちの持っているインフォーマルな知識を利用して課題に取り組み、そこでの自分の考えを表現することや、その表現の中で注意をむけるべき点を教師が明確にするといったことが、比例的推論についてのインフォーマルな知識をフォーマルな知識への変容を促進するのではないかと期待される。このときの表現としては二重数直線やその先駆形などがまず考えられるが、2.2 で述べた問題点もあることから、別の可能性を探ってみることも必要であろう。

子どもたちの持っている知識の変容を促すための図式の利用という点からは、図式が子どもたちの活動に対して果たす役割が移行することにも注意をむける必要があろう。算数・数学の学習で用いられる図式に関わり、大谷(2002)は社会的機能を持つことから思考機能を持つ状態へ変わることを指摘している。これは、最初は図式が考えることを助けるというよりも、むしろ自分の考えを人に伝えるという役割を主として果たしているものが、図式が考えること自体を支援するという役割を持つようになることを示唆している。また算数・数学的な表現（モデル）に関わり Gravemeijer (1997)は、「～のモデル」と「～のためのモデル」という区別を設けている。これらは問題場面に全く依存した考え方と、完全に形式的な手続きとの間におかれた段階であり、「～のモデル」では表現やそこに表される考え方は場面との関連の中で捉えられるが、「～のためのモデル」ではむしろそこに表される考え方自体に注意を向けられるようになるとされる。

こうした先行研究を総合すると、問題場面に沿って取り組んだ考え方を図式に表して、他の人に伝えるという状態から、図式に盛り込まれた考え方自体を吟味の対象とし、その結果、場面に頼らなくても図式を中心として考え方を進めることができる状態、つまり図式が思考機能を持った状態に移行することが期待される。図式を中心として考え方を進めることができる状態においては、比例的推論は意識をされた状態になっているものと考えられる。例えば、二重数直線の上で比例的推論を用いて考えていくとすると、場面の中の数量的な要素だけが取り出されて表されるが、逆に言えば、線の脇に数値と□が配置された程度の抽象的な表現であるために、それらのうちどの要素をどのように関係づけるかについては、解決者が意図的に決定していく必要があるからである。特に、図２や図３のように途中の目盛りも省略された場合にはなおさらであろうし、また考えていく途中で問題に与えられていない数値を数直線上にとる必要がある場合も意図的な決定が一層求められる。

小学校高学年において比例的推論を背景にもつ内容を学習する際に二重数直線が学習の助けとなるためには、高学年になるまでに比例的推論を十分意識し、図式が思考機能を持つような水準までに子どもたちが発達していることが必要となろう。しかし先行研究での役割の変容を考慮するならば、初期の段階では自分の考えを表現したり伝えたりしやすいものであれば許容されるであろうし、また場面を参照するような表現でもよいのではないかと考えられる。その中で、表された考えを吟味し、比例的推論を意識することを促すことが行われれば、二重数直線の利用へと接続するのではないかと期待される。

したがって、中学年の学習活動において利用する図式を検討するに当たっては、もちろん一方で、比例的推論を用いて考える際の中心的な図式である二重数直線へと発展することも視野に入れることになるが、同時に他方において、子ども自らが図をかくことが重要だとする先行研究(*e.g.*, Gutstein & Romberg, 1995; Van Essen & Hamaker, 1990)の知見も考慮に入れる必要があろう。例えば、布川(2006b)は比例的推論を用いて考える小学校４年生の学習過程を分析しているが、そこで子どもが自分からかいている図は、例えば図４のようなタイプのものである。

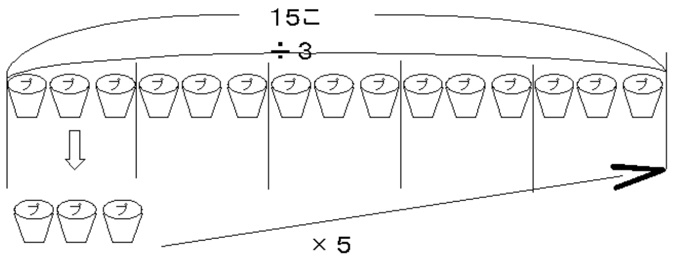

図４

これは「３個で 168 円のプリンを 15 個買うといくらになるか」を考える際にかかれた図である。これを二重数直線で表現すると図５のようになろう。

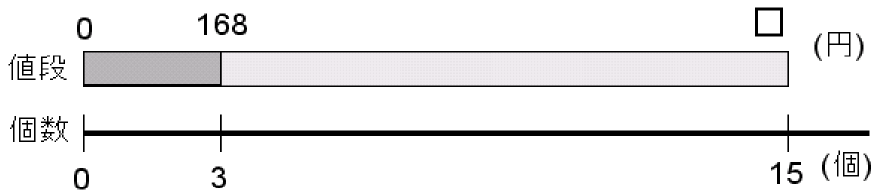

図５

実は教師は、テープの上下に数値を配置するという二重数直線に準ずる図式を授業で導入し、この時間より以前に何度か利用していた。しかし、この４年生の子が好んで利用したのは図４のようなタイプのものであったのである。図４と図５を比較してみると、３個と 15 個とを関係づけようとしている点においては似ているが、いくつかの点で違いがある。第１の違いは、図式の上での数値の表し方である。４年生のかいた図４ではプリンの絵がかかれていることもあり、個数はあくまでも区間の幅により示されている。これに対して、教科書や教師が用いる二重数直線においては数値は数直線上の位置により示されている。二重数直線の上で比例的推論を用いて考える際には、数値が位置により表されている方が考えやすく、数値が幅により表されている場合には考えが妨げられることがある(白石, 2006)。図４では全体の 15 個と基準の３個が別の段にかかれているが、これは幅により数値を捉えたために、両者を１つの図の上に表しにくかったことによるものと考えられる。

図４と図５の第２の違いは、図４が全体の 15 個を３個ごとに区切っていること、つまり 15 個を３個という単位によりノーミング(Lamon, 1994)[2)]していることを、図の上に明示的に表しているのに対して、図５ではそうした関係は数値間の乗法関係(3×5＝15、15÷3＝5 など)としては用いられても、図として表現されることはあまりない、ということがある。

逆に中学年の子どもたちにとって考えやすい図式を上の特徴から考えてみると、(a)テープの幅など量的な側面を残した数値の表現がされていること、(b) 数量間の関係が図の上においても明らかにされていること、があげられよう。さらに、先行研究において乗法関係を表す図式の問題点の一つとして動的な側面を十分に伝えることができない点が指摘されていること(Greer, 1992)、そしてかかれた図という結果だけでなく図をかくという途中の行為自体も解決者の理解の表現であること(Nunokawa, 1994)を考慮するならば、子どもたちが図をかく過程にも注意を払い、例えば図４において 15 個のプリンを３個ずつ順に区切っていくという行為自体も、３個と 15 個との関係について捉えたものの表現として大切にしていく必要があるであろう。その上で、図の中に表現された考えの中の、どこに注意を払ったらよいのかという点について、子どもたちが意識できるような機会を考えていくことも必要である。つまり、高学年で用いる二重数直線という表現への発展を視野に入れたとしても、その表面的、形態的な類似性に重点を置いた表現を中学年で用いるというよりも、むしろ子どもたちにとって表現のしやすい図を認めた上で、比例的推論に関わるアイデア面での二重数直線との類似性に重点を置いた扱いを心がけることで、その発展を目指そうとするものである。

３．活動系列の構想

授業は小学校３年生を対象として構想された。実施時期が３月上旬であったので、２年生でのかけ算の学習に加え、かけ算の筆算、わり算についても学習も終えている。そこで、こうした乗除についての学習を応用し、復習する場にするとともに、本プロジェクトの目的である比例的推論の意識化という点から既に学習したかけ算・わり算を振り返るという意味合いを持たせたいと考えた。このことは逆に言えば、かけ算・わり算が比例的推論の一環であるということを、かけ算・わり算の学習の早い時期から意識をしてもらいたいという、本プロジェクトの背景にある基本的立場の現れでもある。

授業を実施する小学校が 30 分を単位とした時間割となっていたので、30 分の授業を２コマで１時間の授業として行い、これを３時間分行うことを前提として活動系列を構想した。活動系列を通して目指したのは、前節で述べてきたような比例的推論について子どもたちが持っているインフォーマルな知識を意識してもらい、より自由に使えるようになってもらうことである。また、そのための手だての方針は、これも前節で述べてきたような以下の流れである：(1) 子どもたちの比例的推論についてのインフォーマルな知識が発揮されるような問題に取り組んでもらう；(2) 自分たちの考え方を図に表現してもらう；(3) 考え方をまとめる際に考え方の中に含まれる比例的推論の側面をクローズアップし、子どもたちの注意をそうした側面に向ける。

さらに、各問題を子どもたちが行うであろう比例的推論の面から検討し、徐々に比例的

推論を意識化できることを意図して一連の課題設定をした。以下に、用いた問題と比例的推論の面からのそれぞれの問題の役割を述べる。

問題１：２本で 90 円のジュースがあります。このジュースが６本だと、いくらになるでしょう。

この問題では、６本が２本の３倍になり、したがって代金も 90 円の３倍になる、という比例的推論がクラスの話題となることを期待した。ここでは、問題にある数値そのものに目がいき、90×6 として代金を求めようとする子どもたちが出ることが予想された。この 90×6 という考え方を検討し、それではどうして代金が求められないのかを考えていく中で、２本と６本との乗法関係に子どもたちの目を向けたいと考えた。またその中で、子どもたちが場面を図や絵の形で表現することも期待した。その中で、２本ずつのまとまりがいくつあると全体が６本になるかということが、図の上でもポイントになってくるであろう。なお、この問題では２本で 90 円と１本あたりの値段が求められる設定になっている。これは、１本の値段から代金を求めないと納得しにくい子どももいることを想定し、その場合には１本の値段から求めた代金と２本の値段を３倍して求めた代金が一致することを通して、２本と６本に着目した比例的推論が有効であることを理解してもらう助けにしようと考え、あえてそのように設定している。

問題２：（課題１の場面で）ジュースが 24 本だといくらになるでしょう。

この問題では、ジュースの本数を多くすることで、問題１で話題となった比例的推論、特に本数の間の乗法関係をさらに意識してもらうことを意図した。小さい数の場合に正答できても、そこに含まれる関係を意識できず、より大きい数の場合に適用できない可能性のあることが知られており(例えば、石田, 1998)、したがって、同じ場面で数値を大きく設定することで、本数の乗法関係、それに伴う値段の乗法関係を明確にしようとしたものである。

問題３：３こで 29 円のチョコがあります。このチョコ 12 こでは、いくらでしょう。

この問題では、１個あたりの値段が求められない数値の設定になっている。これにより、比例的推論を意識的に選択し、利用してもらおうと意図したものである。個数間の乗法関係については捉えやすいように、簡単な九九になる数値を選んだ。

問題４：８個で 220 円のみかんがあります。このみかん 32 個だといくらになりますか。また、みかん 12 個だといくらになりますか。みかん 10 個だといくらになりますか。

この問題の前半は、問題３と同様、１個あたりの値段が求められない状況にし、比例的推論を利用してもらうことを意図した。また被乗数が３位数になるかけ算を行う機会にもなっている。後半の 12 個の値段においては、４個の値段を求めることが必要となり、８個の値段から４個の値段を求めるという形で、比例的推論を利用してもらうことを想定した。一方において、子どもたちは与えられた個数や値段を分割するタイプの比例的推論は、整数倍をするタイプの比例的推論ほど自由に扱えないことが報告されている(例えば、布川,

2006b)。しかし他方で、2.1 で触れたように、半分については子どもたちはかなりのインフォーマルな知識を有していると考えられる。そこで、そうした半分についてのインフォーマルな知識を用いる場面を設定し、その考え方を図に表したり人に説明したりする中で意識化することを通して、分割（÷n）に基づく比例的推論を子どもたちがより自由に使えるようになるのではないかと考えた。10 個の値段では２個の値段が必要となることから、８個の半分の半分という関係が用いられることになる。これも今述べたのと同様の意識化が一層促されることを意図して設定されたものである。

今回授業で取り上げようと設定した問題では、離散量のみが扱われている。これは、図４に見られるように、比例的推論に含まれる乗法関係を図の上で明らかにするためには、囲むという操作が大切と考えられる。そこで、今回はわり算について学習したばかりの３年生が対象ということもあり、囲むという操作がしやすいことを考え、授業では離散量の場面を扱うこととした。

４． 授業の概要

本節では、上のように構想した授業を実施した際のおおよその様子を示すこととする [3)]。

第１時は問題１を扱った。問題の提示の際には、ジュース２個入りのパックの実物を見せながら行った。解決に際しては、どうして自分の式や答えになるのかを、図などを用いて説明するよう促した。各自による解決の途中で 90×6 と 90×3 とする子どもの考えを紹介し、どちらになるのかに注意を向けた。話し合いでは、プリントをプロジェクタで写しながら、５名の子に説明をしてもらった。２本ずつのまとまりを３組かいた図が複数の子から出された（図６参照）。それらの図を黒板でも再度まとめた上で、これとの対応を付けながら紙の帯を１枚ずつ貼るようにして、教師が図７のような図を導入した。

図６

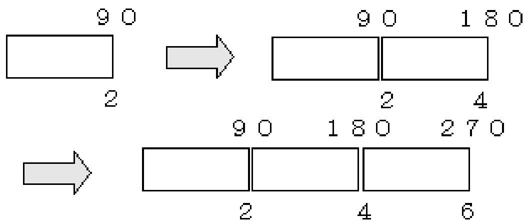

図７

また「２つずつのかたまり」が「３パック」であると言葉でもまとめ、これらの図で本数の乗法関係に注意を向けることを促した。次に問題２を提示し、これを各自で解決して第１時を終了した。

第２時では問題２を各自でさらに考えたが、その際、「図をかいて求めましょう」という一文を追加し、子どもたちが用いるであろう比例的推論が図の上に現れやすくなるようにした。その後の話し合いでは３人の子どもから説明してもらったが、いずれも図６と同様に、２個のまとまりを 12 組かいた図を用い、それに基づいて 90×12 として答えを求めた

ものであった。これを受け教師は丸を 24 個並べた図を黒板で提示した。まず１人の児童に 24 個を２個ずつ囲んでもらい、それぞれの囲みの下に１～12 の数字を書き込んだ。さらにそれぞれの囲みについて、そこまでの本数のジュースだといくらかになるかと、それを求める式（例えば４つ目の囲みなら 90×4 と 360 円を、子どもたちとやりとりをしながら教師が書き込んでいった（図８）。ここから子どもたちにも考えてもらいながら、「２本入りのふくろが 12 こで、90×12＝1080」とまとめ、これを板書することで図の中の比例的推論の側面を明示化した。

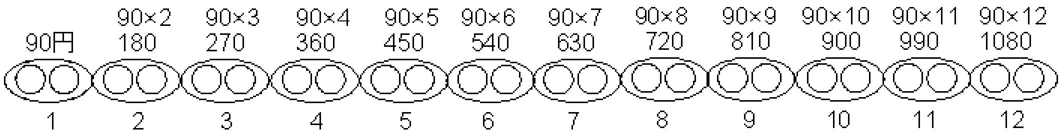

図８

その後、24 本を４本ずつまとまりにした考え、６本ずつまとまりにした考えをした子どもたちにも 24 個の丸を囲みながら説明をしてもらい、それぞれの考えについて「＿本入りのふくろが〇こで、﹏×〇＝1080」の形にまとめた。この活動を受けて、何本ずつのまとまりができそうかと問うと、子どもたちからは１、８、３、12、９、24 が出された。子どもたちは３本、12 本などには「できる」、９本には「できない」といった反応をしていた。９本では余りがでるとの声が聞こえたので、教師が 24 個の丸を９個ずつ囲み確認した。こうした活動により、同一の場面でありながら、多様な基準の本数と 24 本との乗法関係を考える機会となり、また金額もそれに対応した乗法関係になることを確認することで、多様な比例的推論を発揮する機会にもなった。

最後に問題３のプリントを各自で考えてもらい終わりにした。

第３時は問題３を各自で考えることを続けて少し行った。プリントには丸を 12 個並べた図を添えたが、子どもからは３個ずつを囲み、29×4 とする考えが出された。教師は図８と同様の図をかき、「３こ入りのふくろが４ふくろなので 29×4＝116 円」とまとめた。

続けて問題４の中の 32 個の値段を求める問題が提示され、各自で考えた。その後、問題３と同様に図を用いた子どもの説明をしてもらい、教師が図８と同様の図をかき、そして「８こいりのふくろが４ふくろなので 220×4＝880 円」として言葉でまとめた。

後半では問題４の 12 個のときの値段と 10 個のときの値段を考えるプリントが配られた。12 個のときの値段については、子どもからは、４個の値段は半分の 110 円なので 220+110 とする考えが出された。また別の子は 8÷4＝2、220÷2＝110 とする考えを発表した。教師は丸を８個書いた紙を半分に折り、その片方を切り取り、図８に似た図の４個分にあたる箇所の下に貼る操作を演示した（図９）。このとき、もとの 12 個にあたる丸をかいた紙は白いものを使い、半分にする８個の丸をかいた紙は水色のものを使用し、半分にして得られた４個の分がもとの基準である８個から派生したものであることが、図の上でも明らかとなるようにした。

その後で 10 個の値段を考える問題を各自でさらに取り組んだ。これに対しては、８個を４つに分けたものが 55 円になるので 220+55 とする考えが出された。教師は丸を８個書い

た紙を半分に折り、さらにもう一度半分に折った上で２個分を切り取り、図２と同様の図の２個分にあたる箇所の下に貼った（図９）。その図をもとに 220+55 で値段が求まることを確認し、授業を終えた。

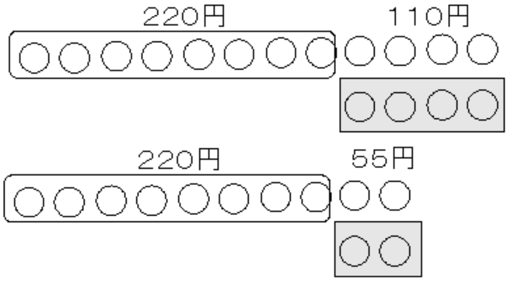

図９

３時間目を終えた週明けに、30 分ほどで筆記調査を行った。筆記調査は９問からなるが、第１問〜第５問の５枚を綴じたものをまず配布し、ここまでを全員共通の問題とし、あとは解き終わった子からプリントを１枚ずつもらいに行くというやり方とした。これは、プリントを終えること自体を目指す子がでることを避け、問題に丁寧に取り組んでほしいと考えたからである。問題は基本的には授業で扱ったタイプのものからなるが、以下のような授業では扱われなかったタイプの問題もいくつか含まれていた：(1) 連続量の場面の問題；(2) 与えられた基準の個数の 1/3 を考える必要のある問題；(3) 代金の間の乗法関係から個数（枚数）を求める問題。31 名中、第６問（基準量の 1/2 を必要とする問題）まで取り組んだ子が 30 名、第７問（基準量の 1/4 を必要とする問題）まで取り組んだ子が 28 名、第８問（基準量の 1/3 を必要とする問題）まで取り組んだ子が 22 名、第９問（代金から枚数を求める問題）まで取り組んだ子が 12 名であった。

５．子どもたちの学習の様子

本節では、2.3 節及び第３節で述べてきたような活動系列が、子どもたちにどのように受け止められたのか、またこの活動系列をさらに改善するにはどうしたらよいか、といったことに関する情報を得るために、抽出児の解決過程を考察してみることにする。紙幅の関係上、上のことを検討するのに対比させて考えやすい２名の児童、瑞穂と達也（いずれも仮名）について述べることとする [4)]。

上でも述べたように、今回の子どもたちにとって比例的推論をもっと意識的、意図的に利用せざるを得ないのは、与えられた基準量からその 1/2, 1/3, 1/4 といった分数倍に当たる新たな基準を構成しなければならない問題、すなわち筆記調査の第６問〜第８問と考えられる。特に、半分の操作を二度行う必要があるものの授業では最後に簡単に扱うことしかできなかった第７問、及び半分の系列に含まれず、授業でも直接は扱わなかった 1/3 倍を必要とする第８問は、今回の一連の授業の中で意識化することを期待された比例的推論を、柔軟に適用しなければならないだけに、子どもたちが単なる手続き的な模倣ではなく、比例的推論という考え方を意識できたかどうかの一つの指標となると考えられる。

ここで取り上げた瑞穂と達也については、瑞穂が第８問について自分なりに考え方を工夫し解決に至ることができたのに対し、達也は誤った解決を行い、しかもその不適切さに

気づくこともできなかった。そこで、まずこの第８問に対する二人の解決について述べ、次に、両者の違いやその違いを引き起こしている要因について、筆記調査以前の授業での学習における違いも視野に入れながら論じていくことにする。

ここで具体的に見ていく筆記調査の第７問と第８問はそれぞれ次のような問題であった。
第７問 : 12 本で 280 円のえんぴつがあります。このえんぴつ 15 本では、いくらでしょう。
第８問 : 9 こで 390 円のアイスがあります。このアイス 12 こでは、いくらでしょう。

なお、以下では、問題に与えられて基準となる数量（第７問では「12 本で 280 円」、第８問では「９個で 390 円」）を「与えられた単位」と呼び、そこから倍の関係により解決者が構成する数量（例えば「３本で 70 円」、「３個で 130 円」）をそこから導かれる補助的な単位ということで「下位単位」(subunit)と呼ぶことにする。

5.1 瑞穂の解決

第７問ではすぐに図 10 の外枠と 12 本の縦線、３本の棒をかいた。図の横に 140+140 の筆算をし、280 と求めた。上の縦線６本、下の縦線６本を鉛筆で押さえながら数えた。再度数えるが、今度は３本の棒も数え、棒の部分の横にある空白の囲みを加えた。筆算の 140 から矢印を出し、「６本」と書いた。140 から別の矢印を出し、その先で 70×2 の筆算をし、棒の部分の下に「70」と書き丸で囲んだ。

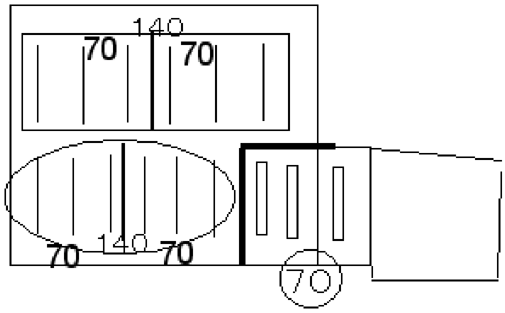

図 10

上の縦線６本、下の縦線６本をそれぞれ囲み、囲みの中央上あるいは中央下に「140」と記入した。さらに各囲みの中央に縦線を入れ、分けられたそれぞれの部分に「70」と書いた。図の下に 70×5＝350 と書き、答えを 350 円とした。

第８問では、最初に 12÷9＝と書くが、すぐにこれを消した。図 11 のうち、外枠、外枠上部中央の「390 円」、中の９つの長方形、右下の囲みとその中の３本の棒、右側の３つの長方形を区切るような縦線をかいた。

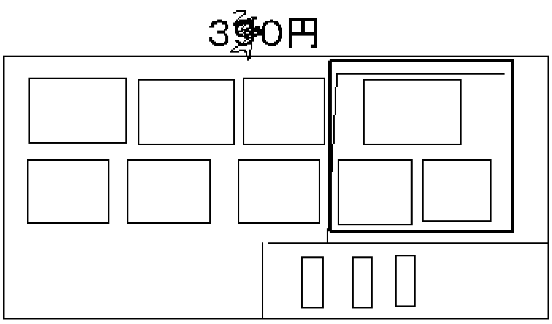
図 11

「390 円」から矢印を出し、その先に 150＋150 の筆算をして 300 と求めた。その 300 の

下に 90 と書き、筆算のように横線を引くが、そこで止まった。枠内の長方形を鉛筆で押さえたり、それらを区切るように鉛筆を動かしたりしていたが、今の筆算を全て消した。そして、図の下に 390÷3 と書いた。その後、27＋3，30＋3＋3，11×3 を筆算により計算していたが、390÷3＝13 と書いた。少し間があって、13 の後に 0 をつけ 130 とした。図 11 の右側の３つの長方形を図のように四角で囲んだ。プリントの右下に 130＋130＋130 を計算し、390 と求めた。

ここで図 12 の上３段の長方形とそこから出る線をかき、その線の先に「39」と書いたがすぐにこれを消した。図 11 の長方形のうち上段３番目、下段２番目、上段４番目、及び右下の棒の３番目を指で押さえた。このとき「1，2，3、1，2，3、1，2，3、1，2，3、4 個」と発話した。図 12 の４番目の長方形を加え、線の先で 130×4 の筆算を行い、520 と求めて答えを 520 円とした。

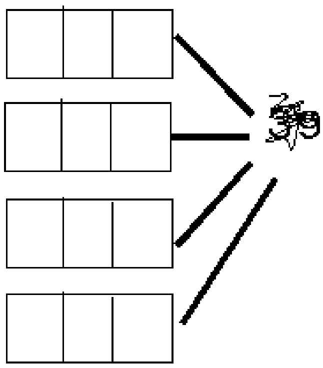
図 12

5.2 達也の解決

第７問では 20 秒ほどして 280÷2＝140，140÷2＝70 と書いた。さらに 280＋70＝350 と書き、答えを 350 円とした。１分ほどで解決を終えた。

第８問では、すぐに 390÷2＝と書き、390÷2 の筆算を途中までするが、その筆算は途中のままで消した。190×2 を筆算で 380 と求め、それを微調整して 195×2 とし 390 と求めた。この 195 を 390÷2 の答えとした。40 秒ほど間があってから 195÷2＝と書き、筆算をして 97 あまり 1 と求めた。さらに 97×2＝194 の筆算を行った。97 を 96 や 98 に変えて筆算をするが、結局「だめだなあ」と発話し、195÷2＝97 とした。同時に今までの筆算に縦線を引いて消した。390＋97＝487 と書き、その下に「487 円？」と書いた。ここで図 13 をかいた。まず四角を９個かき、プラス記号を書いてからさらに四角を３つかいた。次に上段中央と下段左端に縦線を引いた。

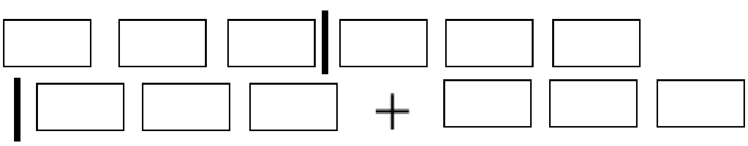
図 13

すぐに「まあ、いいかな」と言い、「487 円？」の疑問符にバツをつけ、解決を終えた。

5.3 瑞穂と達也の解決の比較

第８問の解決において、瑞穂は答えを求めることができたが、すぐに答えに到達できたわけではなかった。彼女の解決では、以前の解決の仕方をそのまま応用しようとして失敗し、それを修正することによって解決に向かった様子が見られる。瑞穂は最初に 12÷9 を計算しようとしているが、これは第１時から第３時の前半まで扱われ、筆記調査の第１問〜第５問にも現れた、与えられた単位で全体をノーミングできるタイプの問題についての

解決の影響と考えられる。例えば、第５問の３個 80 円の納豆 42 個の値段を求める問題では、瑞穂はすぐに 42÷3 を書いている。これを第８問に適用すれば 12÷9 となる。

瑞穂はその式ではノーミングができないことに気づくと、図 11 のような図をかいている。またこの図では９個と、12 個にするために必要な３個とがかかれているだけでなく、９個の値段である 390 円も図の上部に書かれていた。つまり、与えられた単位の２つの要素が図の中に現れていたことになる。

瑞穂はその後、390 円から出した矢印の先に 150＋150 を計算していたが、これも半分を考える問題の影響と言えよう。実際、第７問で 280 円の半分の半分を求める際に、まず 140＋140 の計算により 280 の半分が 140 であることを確定していた。しかし、この方向での考えを中断した際には、図の枠内にある長方形を鉛筆で押さえたり、それらを区切るように鉛筆を動かしたりしていた。つまり、以前の方法の適用に問題が出た際には図の上で考えることが行われていた。また、鉛筆を動かしていた直後に 390÷3 の式を書いたことから、図の上で長方形の区切り方を考えたことが 1/3 の下位単位を構成する可能性を示唆したものと考えることができよう。図 12 は３個に基づく下位単位で全体をノーミングすることを明確化したものであるが、上３段を書いた後、図 11 の長方形のうちの３つと右下の棒の１つを指で押さえ「1，2，3、1，2，3、1，2，3、1，2，3、４個」と発話したことも、瑞穂が図 11 における区切りを下位単位を構成する際の拠り所にしていたことを示している。

390÷3 が 130 となることを見出した後で、図 11 の右側の３つの長方形を図のように四角で囲んでいるが、これは「３個で 130 円」という下位単位を意識したものと言えよう。この３つの長方形を四角で囲んだことにより、もとの９個の中にある３個という単位が明確にされることにもなっている。

瑞穂の第７問に対する解決を見ても、同様の傾向が認められる。図 10 の上段６本、下段６本の縦線と右下にかかれた３本の棒を対比させて数えていく中で、６本のまとまりをさらに２等分して「3 本で 70 円」という下位単位を構成する可能性に気づいていった、と考えることができよう。第８問と同様、図の上で考えていくことで必要な下位単位の構成に気づいている。しかもそこで気づいたことを図の上にかき入れることにより、元の単位の分割により下位単位が構成される様子が表現されることにもなっている。また第８問と同様、図の中に本数だけでなく対応する値段も記入されているが、第７問の方が第８問よりも詳細に記入されている。

以上より、瑞穂は、問題８の解決の初期段階では半分という系列に基づく比例的推論をあまり意識せずに適用していたが、その適用に失敗した後は、図の上で（宙で）囲む操作を行うなどしてもとの９個を分割することを検討し、これにより、個数が÷３になるから値段も÷３になるとして、授業では直接扱っていない比例的推論を用いることができた。つまり、第８問では個数間の乗法関係を意図的に考察したものであり、自らの用いてきた比例的推論を意識する機会が持てたと言えよう。

これに対し、達也は第７問では特に図をかくこともなく、280 の半分の半分を求め、それを 12 本の値段に加えることで 15 本の値段を容易に求めている。与えられた単位の 1/3 が必要となる第８問でも、達也は半分の半分を求め、それを与えられた９個の値段に加え

ることで答えを求めた。彼はこのやり方で 487 円という答えを求めた際にはその後ろに疑問符を付けており、答えに自信を持っていなかったと考えられる。その後で図 13 をかいていることから、瑞穂のように以前の方法の適用に問題を感じるところまではいっていないが、他の問題よりも不安定さを感じて図をかいたという面が伺える。

図 13 に見られるように、図ではもとの９個が３個ずつのまとまり３個に分けられていた。しかしこの中に問題の中で与えられた値段も自分で求めた値段も書かれることはなかった。また、最初にかかれたもの以降、図をかき直したり修正することもなく、すぐに「まあ、いいかな」と発話して、487 円の後ろの疑問符を消した。こうしたことから、図は自分の考えを確認したり修正したりすることに役立たなかったと言える。487 円という答えを受け入れたということは、第８問に半分の半分という考え方を適用すること自体が、検討されずに終わったと言える。つまり達也の解決では、個数の乗法関係を意図的に検討することは行われず、結果として自らの下位単位の構成の仕方を吟味することもなかった。したがって、達也の場合は、それまでの（半分の系列に基づく）比例的推論が十分意識されずに適用されたままであり、自らが用いてきた比例的推論を意識する機会とはならなかったと言えよう。

5.4 児童の解決における相違

それでは、比例的推論の意識化に関する両者の違いは、どのような要因に影響されて生じたのであろうか。上の二人の解決の仕方に見られるように、瑞穂と達也はともに図は利用しているものの、その利用の仕方には違いのあることに気づく。

第１の違いとして、瑞穂は、図を書き直したり修正したりする様子が見られた。瑞穂は計算に行き詰まった際に図に戻るが、図の枠内にある長方形を鉛筆で押さえたり、それらを区切るように鉛筆を動かしたりするなど、図に働きかけながら、また働きかけたことから見えてくるものに注意をむけながら図の上で考えていたことが伺える。図 11 の３つの四角を囲んだことは、そこで気づいた下位単位の３個を表現したものと考えることができる。さらに、そこでわかったことを図 12 の上３段として図に表している。これにより、新たに構成した下位単位「３個で 130 円」が取り出されて示されることとなった。次には、この明確になった下位単位を念頭に置いて問題場面を表現した図 11 に戻り、その図の上で改めて３個の集まりを１つずつ指でおさえるという操作を行い、全体の 12 個が下位単位の３個の４つ分であることを確認している。最後に、図 12 の４段目をかき加え、そこで確認した全体と下位単位の乗法関係を明示的に表していた。つまり、瑞穂の場合、問題場面の表現（図 11）→図に対する働きかけ→わかったことを表現（図 11 の囲み）→わかったことを新たな図で表現（図 12 の上３段）→明確化された下位単位による図の上でのノーミング（図 11 でのおさえ）→確認さえた乗法関係の表現（図 12 の４段目）といった図の利用が見られた。これを見ると、彼女が図をかいたり図に働きかけることと、図から新たに情報を得ることとが繰り返されており、彼女が図とやり取りをしているという意味からは、図との相互作用により考えを進めていたと言うことができよう(*cf.* Nunokawa, 2006)。また、その図との相互作用の間に、得られた情報を利用して計算を行う姿も見られることから、数値

に対する乗法関係を図と関連させて捉えようとしていたと考えられる。

達也も第８問の解決において図はかくものの、それを用いて考えている様子が見られなかった。図 13 を見ると与えられた単位の９個を３つずつに区切っており、必要とされる下位単位の３個は図の上では現れていたことになる。しかし、それまで用いていた半分の半分に基づく考えと図 13 は合わないにも関わらず、特に考え直したり、あるいは図にさらに働きかける様子は見られなかった。したがって、図から新しい情報を得ようとすることがなかったものと考えられる。また、図により何かわかったということがなかったため、わかったことを確認するために図のうえの３個ずつのまとまりを数えるとか、わかったことを新しい図にしてみるといった、図に対する働きかけも生まれなかった。要するに、達也の解決では図との相互作用が見られなかったのである。

Diezmann & English (2001) は図をかく過程自体が、問題の表象としての図の十分性を振り返る機会を与えるとし、「問題構造の理解を改善する手段として図をかくことを利用する」(p. 88)よう提唱している。瑞穂の図の利用は、下位単位の構成を必要とする問題において、この機会を十分に利用したものであり、一方達也はこのように利用する可能性を持つ図 13 をかいたにも関わらず、この機会を生かせなかったとも言えよう。

第２の違いとして、かかれた図に数値が書き込まれていたかどうかがある。瑞穂の図では値段の情報が書き込まれており、特に瑞穂の図 10 では構成された下位単位の２つの要素（３個と 70 円）が図に含まれていた。これに対し、達也の図では本数や個数は長方形や丸により表されていたが、値段の情報は書き込まれていなかった。問題からの数値的情報を図に組み込むことの重要性が指摘されている(Lopez-Real & Veloo, 1993)が、第１の違いとも関連して考えると、瑞穂のように自分が見出した数値も図の中に組み入れていくことは、その基になった自分の考えを確認することにもなり、今回取り上げた問題では下位単位に含まれるペアの数値に注意を払うことでもあり、これにより下位単位の構成の仕方やそれを利用した比例的推論を意識化することを可能にすると考えられる。

こうした傾向は、第３時の授業で下位単位を構成する必要のある問題を解く際にも、すでに見られていた。瑞穂は８個入りや４個入りの袋を書いた後、そこに縦線を引いて半分にしたり、値段を記入したりするなどを何度も行った。これに対し、達也の場合は、12 個の値段を求める問題では４個の丸を囲んだところにその値段 110 を書き込んでいたが、10 個の値段を求める際には、図はかかずに計算だけにより答えを求めた。筆記調査の第７問でも達也は図をかかずに正答を得ていたが、そのため、自分の用いた比例的推論をあまり意識することができず、第８問での適切性も検討されることのないまま、半分の系列に基づく比例的推論を適用してしまったのではないかと考えられる。

以上より、第３時以降、下位単位と問題場面全体の間の乗法関係や、それに基づく比例的推論を図とのかかわりで考えることを、継続して行ってきたかが両者の違いを生み出したのではないかと推測される。すなわち、どのような下位単位を構成したらよいか、新たに構成した下位単位により場面全体はどのようにノーミングできるか、その時の乗法関係はどのようなものか、といったことが図との相互作用を通して考えていけることが、比例的推論の意識化や柔軟な適用をもたらしたと考えられる。

６．まとめ

本プロジェクトは、小学校中学年において比例的推論を育成するための学習活動系列を開発することを目的とした。先行研究からの知見を検討しながら、2.3 で活動系列の構成する方針を示し、また第３節においてその構想を示した。基本的には、子どもたちの持っている比例的推論についてのインフォーマルな知識を意識化してもらい、より自由に使えるようになってもらうことが目指された。ここには、子どもたちが乗除法に関わり学習したことを、比例的推論として捉え直すということも含まれる。またその際に、子どもたちが自分の用いた比例的推論を表現するための図を利用したが、二重数直線という形式との類似に注意をむけるよりも、数値間の乗法関係、及びその乗法関係の他の数値への適用という、比例的推論のアイデアの側面に子どもたちの注意をむける方を大切にする形をとった。

この活動系列を実際に小学校３年生で実施した授業の様子と、そこに参加してくれた児童の思考過程を考察し、活動系列の可能性を探った。その結果、まず整数倍に基づく比例的推論は３年生でもかなりの程度扱えるようであった。筆記調査には九九を越える乗法関係を用いる問題も含まれていたが、図を利用して乗法関係を捉えようとする姿が見られた。また、半分の系列に基づき下位単位を構成する比例的推論についても、授業などの様子を見ると取り組むことができていたようであった。ただし、こうしたことが必ずしも比例的推論の意識的、意図的な利用を意味するものでないことは、1/3 倍を必要とする問題の解決から示された。第５節で考察した達也の解決では、半分の系列に基づく比例的推論をあまり意識をせずに利用し、場面に適するように比例的推論を利用できなかったばかりでなく、自分の用いた比例的推論の不適切さに気づくこともできなかった。

比例的推論のインフォーマルな知識が意識され、柔軟に使えるようになる一つの契機として、その知識を表現する手段として期待した図について、学習者が図と相互作用的に関わること、及び数値との関わりで図を利用することの大切さが示唆された。場面を適当な単位によりノーミングし、数値間の乗法関係を明確化し、その関係を他の数値についても適用するということを、図に働きかけ、そこから新たな情報を得て、さらにまた図を修正したり新たな図をかいたり、といった過程の中で試みることが重要となる。この過程の中で自分が使っている比例的推論や乗法関係を意識していくことになるものと考えられる。

この知見より改善の方策を考えてみる。今回も図の上で囲む操作を子どもたちにさせることを心がけたが、達也に見られるように、乗法関係を式だけで捉え、図をかかなくなった子もいた。子どもたち自身に図をかかせることや、その図のどこに注意を向けるかを授業で取り上げるだけでなく、図に子ども自らが働きかける機会や、図の上でのノーミングと乗法関係との対応を考える機会を活動系列の中で一層保証し、それが系列の後半でも生かされるように課題やその扱いを改めていく、ということが必要と考えられる。

謝　辞

調査にあたりご協力頂きました武井由香先生、泉豊先生はじめ上越教育大学学校教育学部附属小学校の先生方に感謝申し上げます。

註および引用・参考文献

1) 図２では長さを示す部分が数直線ではなくテープになっており、厳密に言えば二重「数直線」とは言えないであろうが、これは長さの量としての側面を強調するために、あるいは２つの測量空間 (Greer, 1992)の存在を強調するために、長さの方をテープにより表していると考えて、ここでは図２も二重数直線と呼ぶことにする。

2) ノーミング(norming)とは Lamon (1994)によれば、与えられた場面を自分が設定した単位により再解釈することとされる。

3) 授業は、武内裕、中澤和仁（上越教育大学大学院生）の両氏を教師とするＴＴの形で行われた。また、授業の全体の様子を教室の前後に設置されたビデオカメラで記録するとともに、５名の抽出児童のそれぞれに観察者がつき、各児童の学習過程をビデオカメラにより記録した。調査に当たってはプロジェクトのメンバーの他に以下の諸氏よりご協力頂いた（所属は全て当時）：白石信子、五十嵐真、早川英勝、渡邉武浩、米本香太郎（上越教育大学大学院生）；清水則仁（上越教育大学学部生）。

4）布川(2007)では、この２名の他にもう２名を加え、計４名の児童の学習過程を考察している。

De Bock, D., Verschaffel, L., & Janssens, D. (1998). The predominance of the linear model in secondary school students’ solutions of word problems involving length and area of similar plane figures. *Educational Studies in Mathematics*, *35*, 65-83.

Diezmann, C, M. & English, L. D. (2001). Promoting the use of diagrams as tools for thinking. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 77-89). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Dole, S. (2000). Promoting percent as a proportion in eighth-grade mathematics. *School Science and Mathematics*, *100* (7), 380-389.

Gravemeijer, K. (1997). Mediating between concrete and abstract. In T. Nunes & P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics: An international perspective* (pp. 315-345). East Sussex, UK: Psychology Press.

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 276-295). New York: Macmillan.

Gutstein, E. & Romberg, T. A. (1995). Teaching children to add and subtract. *Journal of Mathematical Behavior*, *14*, 283-324.

廣井弘敏. (2001). 算数の問題解決における図による問題把握の研究：子どもが図をかく過程への着目. 上越数学教育研究, *16*, 167-176.

石田淳一. (1998). 「パターン発見」問題の解法の一般化に関する調査研究 II. 日本数学教育学会誌, *80* (6), 2-8.

Lamon, S. J. (1994). Ratio and proportion: cognitive foundation in unitizing and norming. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of* *mathematics* (pp. 89-120). Albany, NY: State University of New York Press.

Lopez-Real, F. & Veloo, P. K. (1993). Children’s use of diagrams as a problem-solving strategy. In I. Hirabayashi et al. (Eds.), *Proceedings of the 17th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 169-176). Tsukuba, Japan.

三輪辰郎. (1989). パタン発見問題の解決における中学生の思考. 日本科学教育学会年会論文集, *13*, 31-34.

Modestou, M., Gagatsis, A., & Pitta-Pantazi, D. (2004). Students improper proportional reasoning. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceeding of the 28th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *vol. 3* (pp. 345-352). Bergen University College, Norway.

National Research Council. (2005). *How students learn: Mathematics in the classroom*. Washington, D.C.: The National Academies Press.

布川和彦. (1993). van Hiele 理論に対する新たな意味づけ：インフォーマルな知識と発達の最近接領域を手がかりとして. 教育方法学研究, *19*, 37-46.

Nunokawa, K. (1994). Improving diagrams gradually. *For the Learning of Mathematics*, *14* (1), 34-38.

Nunokawa, K. (2005). Mathematical problem solving and learning mathematics: What we expect students to obtain. *Journal of Mathematical Behavior*, *24*, 325-340.

布川和彦. (2006a, 10 月). 学習の３つの原理：割合、小数、分数の学習を例として. 新しい算数研究, *429*, 32-33.

布川和彦. (2006b). 比例的推論の授業における小学校４年生の学習の様相. 上越数学教育研究, *21*, 1-12.

Nunokawa, K. (2006). Using drawings and generating information in mathematical problem solving. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *2* (3), 33-54.

布川和彦. (2007). 小学校３年生による比例的推論の課題の解決：下位単位の利用に焦点を当てて. 上越数学教育研究, *22*, 1-10.

大谷　実. (2002). 初等・中等教育段階の接続性を持つ数学的活動カリキュラムの開発と評価. 平成 11～13 年度科学研究費補助金(基盤研究 C(2))成果報告書.

白石信子. (2005). 子どもの理解に基づいた小数のわりざんの指導について：数直線への比例的な見方を通した意味の拡張. 上越数学教育研究, *20*, 163-174.

白石信子. (2006). 小数のわり算における子どもの学習過程に関する研究：数直線への比例的な見方の操作に基づく授業を通して. 上越数学教育研究, *21*, 69-80.

van Essen, G. & Hamaker, C. (1990). Using self-generated drawings to solve arithmetic word problems. *Journal of Educational Research*, *83* (6), 301-312.

van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. Orland, FL: Academic Press.

吉田　甫. (2003). 学力低下をどう克服するか：子どもの目線から考える. 新曜社.