研究課題 「比例的表象を生かした小学校の割合の授業についての学習過程臨床的研究」

研究期間 平成19年度～平成20年度


| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 研究代表者 | 学校教育学系 | 教 授 | 布 川 和 彦 | |
| 研究組織 | 自然・生活教育学系 | 准教授 | 高 橋 等 | |
| | 附属小学校 | 教 諭 | 林 克 巳 | (平成19年度) |
| | 附属小学校 | 教 諭 | 青 木 弘 明 | (平成20年度) |

## １．はじめに

このプロジェクトは、平成 17～18 年度に行われた前回のプロジェクト「小学校中学年における比例的推論育成のための学習活動系列に関する学習過程臨床的研究」に参加してくれた小学生、すなわち比例的推論を明示的に扱った算数の授業を受けた経験のある児童を対象に、彼らが持つであろう比例的推論の素地を生かした形で小学校５年生の割合単元をデザインするとともに、それを授業として実施し、子どもたちにどのような学習が生じるかを学習過程臨床の手法によりとらえようとするものである。

本報告書では、まず、比例的推論を生かしながら割合単元をデザインするための、プロジェクトとしての基本的な考え方を述べる。次に、その考えによりデザインされた授業を実際に小学校５年生のクラスで実施した際の、授業の概要を述べる。その後で、この授業に参加してくれた児童のうち、２名の児童に焦点を当てて、彼らにどのような学習が生じたかを、プロジェクトのメンバーである大学教員２名がそれぞれ１名ずつについて記述し考察を加えていくことを試みてみたい。

## ２．比例的推論と割合の学習

割合の導入における比例的推論の利用しては、関係する２量について同じ割合になる数値のペアを多数生成する活動を含めて、２量の関係に焦点を当てる試みが行われてきた（田端, 2003; 土屋, 2002）。これとは別に、子どもたちが割合、特に百分率についてのかなり豊かなインフォーマルな知識を持っているとの知見（吉田ほか、 2000）に基づき、これをもとにして導入を図るとする試みも見られる（NRC, 2005; 山口, 2007）。このプロジェクトは基本的に後者の立場に依拠している。

### 2.1 比例的推論と割合

ここでは比例的推論を２つの伴って変わる量 A、 B に対し、A が $k$ 倍になるとき B も $k$ 倍になると考える推論として捉えておく。これは伴って変わることを $B=f(A)$と表現すれば、$f(kA)=kB=kf(A)$ということを意味する。今、$A_0$ をもとにしたときの $A_1$ の割合を考える。本稿の調査を実施したクラスで使用されていた教科書(一松, 2008)では、割合が次のように説明されていた：「ある量を１として、くらべられる量がいくつに当たるかを表した数」。これは上の表記で言えば B を割合が属する数の集合として、$f(A_0)=1$ となることを意味する。今 $A_1= kA_0$ とすると、$f(A_1)= f(kA_0)= kf(A_0)= k\cdot 1=k$ となる。これは、$f(A_0)$を 1 とした上で、比例的推論に基づいて各量に数値を対応させていけば、それにより割合が得られることを意味している [1)]。この考え方では、$f(A_0)=100$ と条件を変えれば、百分率についても同じ考え方を用いることができる。

このとらえ方に基づくと、もとにする量を 1 としたときに、もとにする量に対し量が $k$ 倍ならば、割合も $k$ 倍なので $k$ として、比例的推論からある量の割合を考えることができる。そこから、もとにする量を固定した上で、様々な量の割合を比例的推論から考えてみるという活動が得られる (*cf*. NRC, 2005)。特に、半分の系列(1/2、 1/4 等)や 1/10 の比例的推論は子どもたちにとっても使いやすいとする知見(Misailidou & Williams, 2003; 布川, 2006; Pothier & Sawada, 1983)をふまえるならば、こうした比例的推論を中心に考えていく(*cf*. 吉田ら, 2000)活動が構想されよう。

### 2.2 比例的推論の意識化のための表象

割合の授業では、量を表すテープ図あるいは数直線と割合を表す数直線を組み合わせた二重数直線が用いられることが多い。調査を実施したクラスで利用されていた教科書でも二重数直線が取り上げ

られていた。調査の授業では、2.1 の構想に基づき、また授業に参加する子どもたちが４年生のときに、同様の表象を用いて比例的推論に関わる問題を解決する経験を有していたことに鑑み、その利用にいくつかの変更を加えた。

2.1 で述べたように、半分の系列を中心に否定的推論を用いて様々な量の割合を考えてみるという活動を行うとすると、上のような表象を導入の段階から利用することができる。今回の授業では、導入段階からこの表象を利用し、また単元を通して基本的に同じ表象を利用することとした。

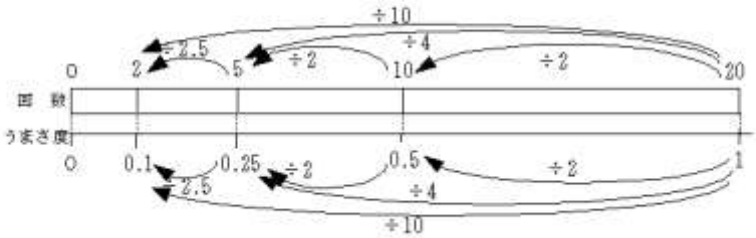


図１：第１時途中の図の様子

また比例的推論を意識化する(布川, 2007)ため、４年生のときに行った授業と同様、数値間の乗法関係を示す矢印を記入することとし、子どもたちが自分が用いた比例的推論を視覚的にとらえられるようにした（図１）。これは、表象を通して、子どもたちが自分の比例的推論をよりよくコントロールでき、それに基づいて彼らの割合に関わる意思決定が支援される(*cf.* 布川, 2005)ことを期待したものでもある（図２）。

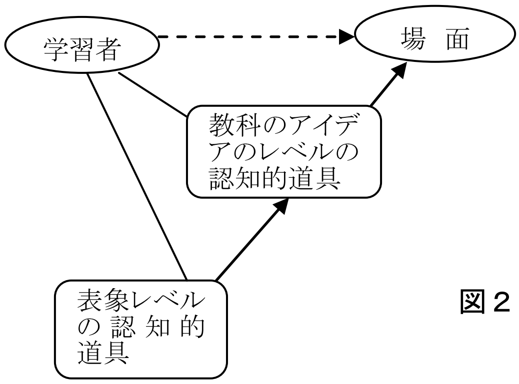


図２

大谷(2002)は表象が社会的機能だけでなく思考機能を伴うように移行することを指摘している。本稿では社会的機能の中の自分の理解しているものを表現するという面に焦点を当て、表現機能と思考機能として考えていくことにする。

### 2.3 比例的推論に基づく導入の意義

2.2 で述べた表象を利用しながら、2.1 のような考え方に基づき、比例的推論を利用して割合の導入を行うことは、次のような意義を持つと考えられる。

(1) 割合の定義との整合性が見やすい。もとにする量を 1 や 100 としたときに、くらべられる量がいくつと見られるか、と比例的推論を用いて考えるところから、割合の導入をはかることができる 2)。この場合、もとにする量を固定した上で様々な量の割合を考えるような活動が設定でき、割合がくらべられる量の程度を表すものであるとの意味づけにつながるものと考えられる。

(2) 上のことにも関わるが、割合においても基準を表す1あるいは100%が、常に意識されやすい。Parker & Leinhardt (1995)は、このもとになる数が見えにくいことを、割合を理解する際の１つの困難としてあげている。上述の導入ではこの基準が常に見える形になるため、こうした困難を緩和する可能性が期待される。

(3) 前述のように児童が割合についてインフォーマルな知識を持っていたときに、それを基礎として割合を導入できる。吉田ら(2000)の結果は百分率についてのものではあるが、比べられる量が半分

になると割合も半分になるといった、割合に関わる比例的推論についてのインフォーマルな知識を子どもたちが豊かに持っていることを示唆している。これを利用して、割合の導入をはかることが可能となる。

(4) 三用法の学習において用いられる図との連続性が保たれる。三用法の学習では図１のような図を用いて、演算決定の補助とする場合が多い。割合自体を図１により導入することは、導入段階と活用段階で利用される表象やイメージを統一することになる。また割合の背後にある比例的推論を視覚化することで、三用法の違いを視覚化することにもつながると期待される(*cf.* 布川, 2005)。

なお図の提示にあたってはこれを割合メーターと呼ぶとともに、比べられる量を帯状の色紙で作り、これを徐々に右に伸ばして動的に示すことで、全体に対する程度に目を向け、割合のイメージを持ってもらうようにした。さらに、比べられる量あるいはその割合を割合メーター上にとる際に、動的な扱いを単元を通して心がけた。例えば８回を図１に記入する場合、教師が 0 から指でなぞり、適当な位置まで来たら「ストップ」と言わせるようにした。これは、山口(2007)が液量を用いて行った導入を図の上で行うことに相当する。これにより、部分への着目(Boyer *et al*., 2008)から全体と部分の関係への着目へと移行を促し、もとにする量に対する程度であることを常に意識してもらうことを期待したものである。

さらに、子どもたちがもつ程度についてのインフォーマルな知識との接続が断たれないようにするため、単元を通してそれが半分より多い、ほどほどであるなどの表現を求めた。子どもたちは 0 (0%)、1 (100%)、半分などを割合のベンチマークとして利用している(布川, 2005)が、これを生かし、さらにベンチマークを豊かにしようとするものでもある。

## ３．調査の方法

### 3.1 データの収集

調査の授業はある小学校の５年生１クラスで２～３月に実施された。60 分の授業を８回、90 分の授業を１回の計９回が行われた[3)]。授業に際し、教室の後方から教師や黒板で発表する子どもの様子を、前方から子どもたち全体の様子をビデオカメラで記録した。また、担任教師との相談により決定した５名の抽出児童[4)]について、１台ずつのビデオカメラによりそれぞれの子どもの学習過程を継時的に記録した。

### 3.2 授業の概要

第１時は、バスケットで 20 回シュートしたときに、４人のそれぞれが 20 回、10 回、５回、２回入ったという場面を考えた。割合メーター(以下 PM)を提示し、赤い紙の帯を伸ばしていって 20 回を表現するとともに、そのうまさ度を１と決めた。10 回を図上にとる際には、帯を伸ばしていき、適当な位置で「ストップ」と言わせた。その上で 10 回のうまさ度を尋ねると、すぐに 0.5 という答えが出された。0.5 とする理由を近くの子と話し合わせた後、発表させたところ、回数が半分なのでうまさ度も半分という意見が出された。これを図１のように矢印を伴った形で PM の上に表した。５回、２回についても同様に行い、それぞれ 0.25、0.1 という考えが出され、図１のようにまとめた。８回のうまさ度を各自で考えさせた後、全体で話し合った。８回が２回の×４、10 回の÷1.25、20 回の÷2.5 という考え、および 10 回から２回分を引くという考えが出され、８回のうまさ度は 0.4 とされた。

第２時は、うまさ度 0.4 は半分より少し下なので、まあまあであることを確認した後、「もとにする量を１として、くらべられる量がいくつに当たるかを表した数」として割合を導入した。次に、割合

を横の矢印を用いずに求める方法を、近くの子と相談しながら考えた。全体での話し合いでは、回数を÷20 する考えと、回数に×0.05 する考えが出され、これを縦の矢印により図の中に表した。第 1 時で求めた割合について、これらの関係が成り立っていることを確認した上で、もとの 20 回を 1 と見るので÷20 になると教師がまとめた。ここから、割合＝くらべられる量÷もとにする量の式を提示した。教科書の練習問題を扱う際にも、PM のかかれたプリントで考えさせ、また全体での確認の際にも PM を用いた（図３）。

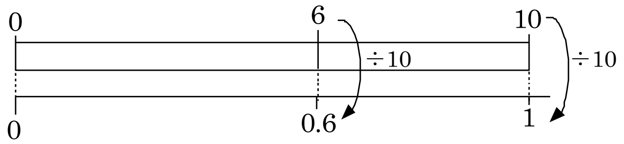

図３

第３時はもとにする量が異なるものの比較として、ジュースの濃さを扱い、100ml 中原液が 80ml のジュース A と 40ml 中 20ml が原液のジュース B を考えた [5)]。差が 20ml なので同じとする考えと、全体の量に対する原液の割合を計算し A が濃いとする考えが発表された後で、B は原液が半分だが A は半分以上なので前者の方が濃いとする考えを紹介し、前者の方が濃いこと、割合による比較が適切であることを確認した。また２つのジュースをそれぞれ PM で表し(全体の長さは同じにしておく)、発表された式を確認した。40ml 中 30ml が原液のジュース C を導入し、A と C の比較をした。PM に C を表して確認をした。ある学級で男子 16 人、女子 20 人であるとき、女子の人数をもとにした男子の人数の割合と、男子の人数ともとにした女子の人数の割合を考えた [6)]。最後に PM 上で考えるとともに、1.25 といった割合もあることを確認した。

第４時は、定員 50 人のバスに 40 人乗っているときの混み具合を割合で考えた。割合が 0.8 になることを PM を用いて全体で確認した後、もとにする量を 100 と見る考えとして百分率を導入した。貼ってあった PM に百分率の段を追加し、もとにする量を 1 とする割合と百分率を PM の上で縦の矢印で関係づけた（図４）。５種類の乗り物の割合を百分率で求める問題を扱い、全体の台数に対する各種の割合を求めた後、その結果を PM の上に表した。さらに百分率を求める練習問題を行い、最後に PM を用いて全体で確認した。

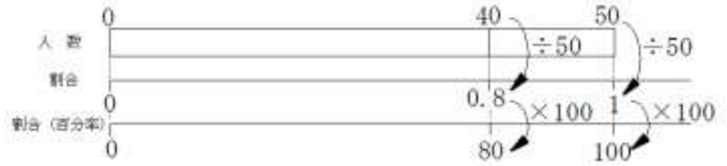

図４

第５時は、宿題として出された百分率を求める練習問題を PM を用いて確認した後、小数と百分率を互いに変換する問題を全体で行った。次に 24m$^2$ の 60%を求める第２用法の問題を扱い、PM のかかれたプリントで考えさせた。全体の話し合いで、逆の(縦の)矢印を利用して 60÷100＝0.6、0.6×24＝14.4 とする考え、24×0.6＝14.4 とする考え、□÷24＝0.6 より□＝0.6×24 とする考え、10%分を 24÷10 で求め、それを×６して 60%分を求める考えが出された。これらは PM の上に表された。最後の考えを生かし、100%から 60%へ“一発で行く”方法を考えさせた。その後の全体での話し合いで、60÷100＝0.6 なので 100×0.6 をすればよいという考えが出された。さらに教師が 1 と 0.6 の関係を見ても×0.6 であることが分かると補足した。最後に第２用法の式をまとめた。

第６時は、第２用法の練習問題として、５％があたりのくじで全体が 80 本のときのあたりの本数を求める問題、定員 80 人の車両で混み具合が 110%のときの乗客数を求める問題を取り上げた。各自で

考えた後、PM を用いて確認をした。後半では第３用法の問題として、花畑が 90m$^2$ で畑全体の 30%に当たるときの畑の面積を求める問題を扱った。各自で考えている途中で、教師が PM での 90m$^2$ と 30%の位置を確認し、さらに考えてもらった。全体の話し合いでは、30÷100＝0.3 より 30 を÷0.3 すると 100 なので 90÷0.3＝300 とする考えが出された。教師が 0.3 と 1 の関係からも÷0.3 と考えられることにも触れた。その後、第３用法の練習問題を解き、最後に全体で PM を用いて確認をした。

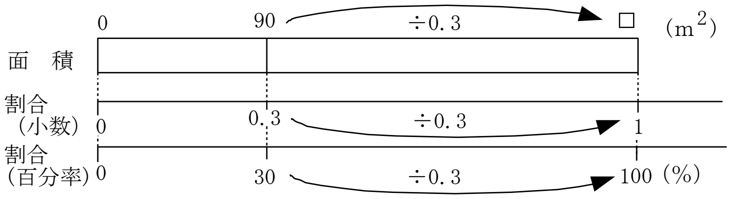

図５

第７時ではまず、３用法の混在した練習問題のプリントに各自で取り組んだ。その後、５問全部について PM の上で表しながら、式と答えを確認していった。後半では、消費税 5%がつくとき、500 円の品物を買うといくらになるかを考えた。全体の話し合いでは、500×0.05＝25、500＋25＝525 とする考え、1+0.05=1.05、500×1.05＝525 とする考えが出され、それらを PM に表しながら確認をした。また後者については 500×(1+0.05)と書けることを教師が紹介した。最後に 1500 円のシャツを 20%引きで買うときの値段を各自で考えたが、確認は次時に持ち越された。

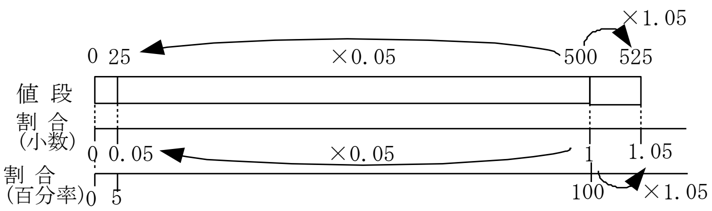

図６

第８時の冒頭で 20%引きの問題を PM で表し確認した。ここでも 20%分を求めて定価から引く考えと、80%の値段を求める考え方を取り上げた。次に、第４時で求めた乗り物調べの百分率を利用して、帯グラフの導入を行った。以前の結果を第１時で用いた赤い紙の帯を伴う PM で表し、当該の百分率に対応する帯の幅を、重ならないように並べる形で帯グラフの形にしていった（図７)。その後、与えられた帯グラフから各項目の百分率を求め、それに当たる台数を求める問題を扱ったが、PM に表して式や答えを確認した。最後に、けがの各原因の百分率を求め、帯グラフを自分で作成する問題に取り組んだ。

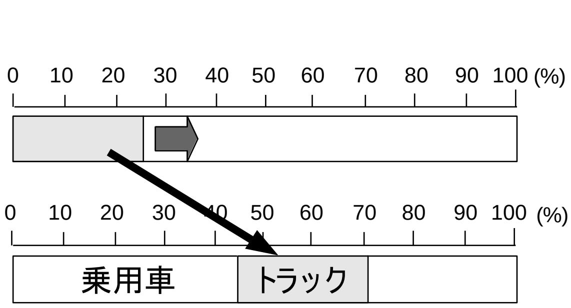

図７

第９時では、帯グラフを円環状にすることで円グラフを導入し、図書館の各種類の本の割合を円グラフからよみとり、冊数を求める課題に取り組んだ。全体で冊数を求める式を確認する際には PM を用いた。次に、けがの各原因の百分率を求めて円グラフをかく課題を扱った。第９時後半では、教科書の章末の問題をプリントにしたものに取り組んだ。

## ４．抽出児の学習の様相

ここでは、前節まで述べてきた割合の授業が児童にどのような学習を引き起こしたのかの一端を知るために、２名の児童・拓也と勝雄(いずれも仮名)の学習過程を考察してみることにする。

### 4.1 拓也の学習の概要

第１時では、５回のうまさ度は求められたが、２回については 0.25÷2、0.125÷2 を計算し、求めることはできなかった。８回については 20÷8＝2.5 を計算したが、これをもとにうまさ度を求めることはしなかった。机間巡視で来た教師との会話の中で、２回のときは 2×10＝20 だから 10 で割るということに言及はした。その後「1　0.05」とかき、しばらくして最後の方で自分の PM に２回と５回のうまさ度を 0.1、0.25 と記入した。さらに４回は 0.2、３回は 0.15 になることに言及し、６回に 0.3、７回に 0.35、８回に 0.4、９回に 0.45 と記入した。

第２時に割合の求め方を考える課題では、いくつかの回数とうまさ度が印刷された PM に９回のうまさ度 0.45 を追加し、さらに５回と８回、２回と５回の間を結ぶ弧状の線をかいて「３」と書いた。0.1 と 0.25 の間にも弧状の線をかき､0.25÷3 の計算をしようとした｡その後では､0.4÷0.25 を計算し、また 0.25 と 0.5 の間に弧状の線をかいて「×2」と書いた。近くの子に対する教師の支援を聞いた後、「そういうことね」と発話し、PM 右端の 20 回と割合の 1 を指して「1 と、ああー」と発話した。さらに 20÷2 を計算したところで全体の話し合いとなった。友だちの考えを聞いた際に、自分の PM で各回数と割合の間に「÷20」と記入した。練習問題の最初２問では、最初に割合を計算し、その後で PM に当該の回数と割合だけを記入した。7 本のくじで 0 本当たりという問題では、PM の本数右端に 7 と書いてすぐに 7÷0 と書いた。友だちの方を見て 0÷7 と直してから、PM の 7 本の下に割合 1 を加えた。机間巡視に来た教師との会話の中で PM に縦の矢印を加えたが、75 人中５年生が 15 人という問題では、立式、計算をしてから PM に 75 人、割合 1、15 人のみを記入した(図８)。定員 130 人の飛行機に 117 人乗っているという問題では、117÷130 と立式をしてから PM に 130 人と割合 1 を記入した。計算をしてから 117 人と割合 0.9 を PM に記入したが､130 人から 1 に向かう縦の矢印には｢÷117｣と書いた。これは後で「÷130」と修正され、また他の欠けていた矢印も後で追加された。

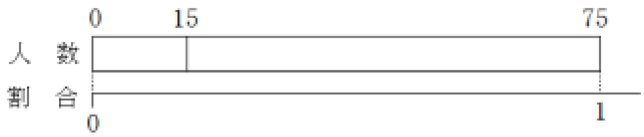

図８

第３時のジュースの濃さの問題では、最初は濃さは同じとし､「100－80＝20」「40－20＝20」「差が同じ」と書いた。近くの子を見た後、「A の方がこい」と変え、理由として「80÷100＝0.8」「20÷40＝0.5」と書いた。さらに「0.8－0.5＝0.3」「A. A の方が 0.3ml 多い」と書いた。ジュース A と C の比較では、A と C について PM をかき、C についての立式は縦の矢印を含む PM を作成した後になされた。PM 上での数の相対的な位置関係も適切であった｡「A のコップの方がこい」「0.8－0.75＝0.05」「A. A のコップが 0.05ml 多い」と書いた。最後の問題で、女子の人数(20)をもとにした男子の人数(16)の割合を求める際には PM を矢印を含めて作成してから立式をしたが、男子の人数をもとにした場合では式を先に求めた。友だちのプリントにかいた際には、印刷された人数の段の右端に 16 をとり、そこから少し伸ばして 20 をとったが、自分のプリントにかく際には、印刷された人数の段の右端を 20 とし、右から 1/4 あたりに 16 をとった。全体での確認の際に、再び伸ばすかき方に変えた。

第４時で乗り物の割合を求める問題では、63÷140×100 といった式をすぐに書くことができた。百

分率の合計を書く際には、特に計算をした様子はみせずに「100」と記入した。またプリントに枠だけ印刷してあった PM を自分から埋めていき、縦の矢印と「÷140」も書き入れた。全体の確認の際に 63 台が半分より小さいことが話題になると、自分の PM で 63 の位置を修正した。最後の練習問題では２問とも、縦の矢印と「÷120」の記入を含め PM を作成してから立式を行った。

第５時で 24m$^2$ の 60%を求める問題では、PM の面積の段の右端に 24 と書き、少し考えた後、割合の段の適切な位置に 0.6、その下の百分率の段に 60 と書いた。24×0.6 を計算し 14.4 と求めた。しかしその後も 60÷24、0.6÷24 を計算した。14.4÷24＝0.6 を計算して、14.4 から 0.6 に向かう縦の矢印をかき、横に「÷24」と書いた。24 から 1 に向かう矢印の横には「24」とだけ書いた。0.6 から 60 に向かう縦の矢印と「×100」を書いてから、「24×0.6＝14.4」「A. 14.4m$^2$」と書いた。机間巡視に来た教師が言葉で説明するよう求めると少しして 24÷60 を計算し、「全体は 24」と書くが、これを「全体は 100」に直した。24 から 1 に向かう矢印の横の「24」の前に「÷」を加え、しばらくしてから「あっ」と呟いて 0.6×24 を計算した。プリントに「1×24＝24 だから」「0.6×24＝14.4 になって」「14.4÷24＝0.6 になる」と書いた。期間巡視に来た教師が矢印の向きを確認すると、0.6 と 14.4 の間、1 と 24 の間の矢印を上向きに直し、「÷24」を「×24」に変えた。100%から 60%へ“一発で行く”方法を考えた際には、100÷60 や 24÷100 の計算をして手が止まった。教師がヒントを出した後、PM の 60 と 100 の間に横線をかき、その下に「×0.6」と書き、60÷100＝0.6 を計算した（図９）。プリントには「100×0.6＝60」と書いた。

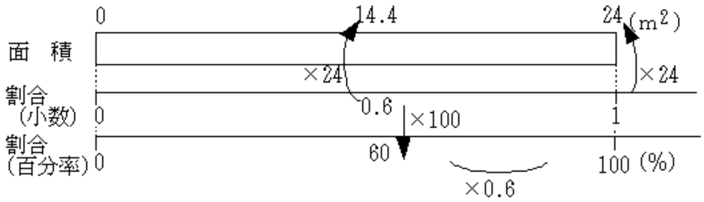

図９

第６時でくじ 80 本の 5%の当たりを考える問題では、PM の本数の右端に 80、その下の百分率の段に 100、百分率の段の適切な位置に 5 を書いた。5 の上の割合の段に 0.05、5 から 0.05 に向かう縦の矢印をかき、「÷100」と書いた。この時点で 80×5、80×0.05 を計算し、0.05 の上の本数の段に 4 と記入し、プリントに「80×0.05＝4」と書いた。少しして PM の割合 0.05 から本数 4 本に向かう縦の矢印をかき、「×80」と書いた。80 本の下の割合の段に 0.8 と書き、両者を線で結ぶが、しばらくして割合を 1 に直し、線の横に「÷80」と書いた。定員 80 人の 110%を求める問題でも、PM に 80 人、110%、100%、割合 1.1 を適切な位置にとった時点で 80×110、次に 80×1.1 を計算した。式と答えをプリントに書いてから、PM の 88 人と 1.1 の間に双方向の矢印をかき、「×80」と書いた。全体での確認で教師が矢印と式の関係に注意を向けた後に、２つの問題の PM で本数や人数の段と百分率の段に横の矢印を加え、それぞれ「×0.05」「×1.1」と書いた。

第６時後半で 90m$^2$ が 30%に当たるときの全体を求める問題では、最初 PM の面積の右端に 90 と書いたが、少しして百分率の左から 1/3 あたりに 30 と書くと、その上の面積の段に 90 と書き直した。30 の上の割合の段に 0.3、面積の右端に□と書き、90 から□に向かう横矢印をかいて、そこに「×0.3」と書いた。電卓で 90×0.3 を計算し、□に何か書こうとするが何も書かなかった。友だちの方を見てから 90÷0.3 を計算し、□に 300 と書き、「×0.3」を「÷0.3」に直してから式と答えを書いた。百分率の段の 30 から 100 に向かう横矢印をかき、「0.3」と書いた。当たり 30 本が 15%にあたるくじ全体の本数を求める問題では、PM の本数の右端に 30、その下の百分率の段の 100、割合の段に 1 と書いたが、少しして 30 の位置を本数の左から 1/3 あたりに直す。その下の百分率の段に 15、割合の段に

0.15 と書き、30 から右に向かう横矢印をかき、そこに「÷0.15」と書いた。30÷0.15 を計算し、最後に 15 から 100 に向かう横矢印をかいて「÷0.15」と書いた。102 人が 120%に当たるときの定員を求める問題では、百分率の段の右端(人数の段の右端よりさらに右にある)に 120 と書き、人数の段の右端の下に 100 と書いた。それぞれに対応する割合の段に 1.2 と 1 と書いてから、人数の段を右方向に少し伸ばした。100%の上の人数の段に 102 と書き、しばらく考えてから 102÷1.2＝85 を計算した。PM に 85 は書き込まず再度 102÷1.2 を計算した後、102 の位置を割合の 1.2 の上に直した。割合の 1 の上に 85 を書き、102 から 85 と 120 から 100 に向かう横矢印をかき、それぞれに「÷1.2」と書いた。120÷1.2 が 100 になることを確認した。

第 7 時前半の練習問題で $24\mathrm{m}^2$ が 8%にあたるときの全体を求める問題では、PM の百分率の段の左から 1/10 あたりに 8 と書き、その上の面積の段に 24 と書いた。ここで 24÷8、24×8 を計算し、100%の上の面積の段に 192 と書いた。8%の上の割合の段に 0.08 と書き、24×0.08 と 24÷192 を計算したところで 2 問目に移った。２問目を解いてから 1 問目に戻り、24×0.08、24÷0.08 を計算をした後、プリントに「24÷0.08＝300」と書いた。PM の面積の右端に書いた 192 を消し、300 に直した。２問目の 800 円の 20%を求める問題では、PM の値段の右端に 800、百分率の左から 1/8 あたりに 20、その上の割合の段に 0.2 と書いた。800÷0.2 を二度計算した後、PM を見てから 0.2×800 を計算した。PM の 0.2 の上の値段の段に 160 と書き、プリントに「800×0.2＝160」と書いた。３問目を解いてから２問目の PM に戻り、0.2 から 1 に向かう横矢印をかき、そこに「×5」と書き、160×5＝800 と計算した。値段の 800 から 160 に向かう横矢印をかき、そこには「÷5」と書いた(図 10 左)。３問目で 160 人中女子 72 人の割合を求める際には、PM の人数の右端に 160 と書き、次に人数の右から 1/3 あたりに 72 と書きかけてこれを中央近くに変更した。160÷72 と 72÷160 を計算した後、72 の位置を左から 1/3 あたりに変更した。72 の下の割合の段に 0.45、その下の百分率の段に 45 と書いてから、式と答えを書いた。PM の 160 から 72 に向けて線を引いてから、0.45×4、0.45×2、0.45×2.5 を計算した。横の線に何かを書こうとして何も書かず、160 から割合の 1 に向かう縦矢印をかき、そこに「÷160」と書いた。72 から 0.45 に向かう縦矢印もかき、「÷160」と書いた。４問目(36 人の 75%)では、PM の人数の右端に 36、百分率の段の右から 1/4 あたりに 75、その上の割合の段に 0.75 と書いた。36×0.75 を計算し、0.75 の上の人数の段に 27 と書いた。式と答えを書いてから、1 から 36 と 0.75 から 27 に向かう縦矢印を書き、それぞれに「×36」と書いた。５問目(□の 24%が 48dl)では、PM の百分率の段の左から 1/4 あたりに 24、その上の体積の段に 48、割合の段に 0.24 と書いた。0.24×5、0.24×4.5、48×0.24、48÷0.24 を計算し、体積の右端に 200 と書いた。PM で 0.24 から 48 に向かう縦矢印をかいて「÷24」と書くが、机間巡視に来た教師との会話の中でこれを消し、48 から 200 と 0.24 から 1 に向かう横矢印に修正し、後者の矢印に「÷0.24」と書いた。全体の確認の途中で、1 問目の PM で 0.08 から 1 に向かう横矢印と「÷0.08」を、４問目の PM で 1 から 0.75 と 36 から 27 に向かう横矢印と「×0.75」を加えた(図 10 右)。また第２問の「×5」「÷5」としていたものを「×0.2」に直した。

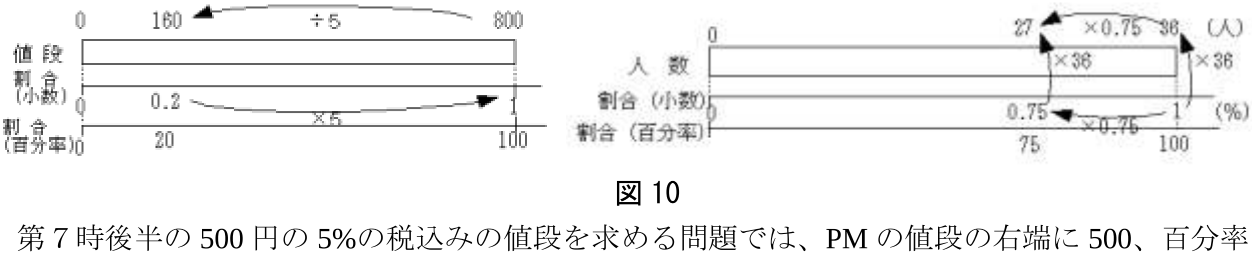


図 10

第 7 時後半の 500 円の 5%の税込みの値段を求める問題では、PM の値段の右端に 500、百分率の左から 1/10 あたりに 5、その上の割合の段に 0.05 と書いた。0.05 の上の値段の段に数値を書きかけてか

ら少し考え込み、500÷0.05 と 500×0.05 の計算をした。書きかけの数値を 25 としてから、PM の割合の 1 から 0.05 に向かう横の矢印と、値段の 500 から 25 に向かう横の矢印をかき、それぞれに「×0.05」と書いた。1500 円の 20%引きの値段を求める問題では、PM の値段の右端に 1500、百分率の左から 1/5 あたりに 20、その上の割合の段に 0.2 と書いた。割合の 1 から 0.2 に向かう矢印をかき、そこに「×0.2」と書き、1500×0.2 の計算をした。0.2 の上の値段の段に 300 と書き、1500 から 300 に向かう矢印をかいた。式と答えを書いた後、「0.2 は 1×0.2 だから 1500×0.2 をして 300 とでて、1500－300 で 1200」と書いた。

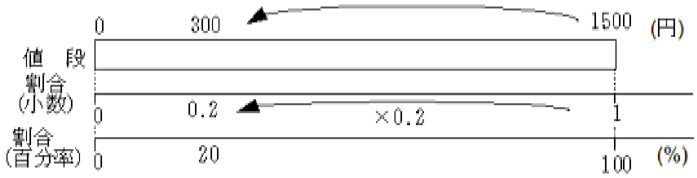


図 11

第８時で帯グラフから百分率を読み取り、各種類の台数を求める課題では、50×0.42＝21 といった計算を特に滞ることなく書いていった。百分率の合計を書く際には、特に計算した様子を見せずに 100 と書き、その後で各種類の百分率を足し合わせていた。けがの各原因の百分率を求める際には、最初 11÷23 とすべきところで 23÷11 や 20×11 などの計算をしていたが、全体で確認して以降は正しい計算を順次行った。

第９時前半では、各種類の本の冊数を 3600×0.4 などと正しく計算して求めた。全種類の百分率を円グラフから読み取る前に百分率の合計に 100 と記入し、後で読み取った百分率の合計を別途計算していた。けがの各原因の百分率を求めて円グラフをかく課題では、250÷850 とすべきところを 850÷250 としたが、友だちに教えてもらって以降は正しい計算を順次行った。

第９時後半の章末の問題に取り組んだ際には、次のような様相が見られた。10 問中 7 問正答のときの割合や 4 試合中 4 試合勝ったときの割合は、すぐに正答をした。15m のテープに対する 12m の割合では、プリントに枠が印刷された PM で長さの右端に 15、左から 1/3 あたりに 12 と書いたが、これを右から 1/4 あたりに直した。そこで 12÷15 を計算し、12 の下の割合の段に 0.8 と書いた(図 12 左)。12m をもとにしたときの 15m の割合では、PM の長さの右端に 12 と書き、長さの段をもとの 1/4 程度伸ばしてからその右端に 15 と書いた。15÷12 を計算し、15 の下の割合の段に 1.25 と書いた (図 12 右)。


図 12

24 人をもとにした欠席者 3 人の割合を求める問題では、3÷24＝0.125 を計算したが、解答欄には 13%とした。その後、24÷3、24×0.13、24÷0.13、3×24、0.13÷24 なども計算した。友だちが 3÷24＝0.125 と計算するのを見て、最後に 13%を 12.5%に修正した。出席者の割合については友だちどうしが話すのを聞き、出席者が 21 人になると理解したが、その際もまず「24÷21」と書いてこれを計算し、友だちの方を見て 21÷24 に変更した。630 円が売値 600 円の何％にあたるかを考える問題でも、600÷630 を計算した後、前のプリントを見て 630÷600 に変更した。300 個の 4%を求める問題では、300×0.04 を計算した。40 本中 16 本当たりのくじと 20 本中 7 本当たりのくじの比較では、それぞれの当たりくじの割合を正しく求め、割合の大きい A が当たりやすいとした。昨年が 125 人で今年は 10 人増えたときに、今年の人数が昨年の何％かを求める問題では、10÷125 を計算し、その後 125÷10 を計算し

た後、問題文を読み直して 115÷125 を計算した。48 ページを読んだときに残りが全体の 60%に当たるという問題では、0.6×48、60×48 を計算して、解答欄に 2880 と書いた。48÷2880 を計算してから、悩む様子を見せた。さらに 60÷48、48÷125 を計算した。しばらくしてから図＃のような図をかき、48 と□の間で鉛筆を動かしていたが、この時点で終了時間となった。

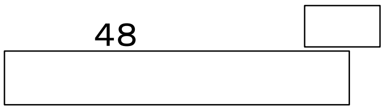

図 13

### 4.2 拓也の学習に見られた特徴

拓也の９時間の学習を見たときに、次のような特徴を認めることができる。

(1) 加法的な推論から乗法的な推論への移行

第１時で 20 回投げて８回入ったときのうまさ度を求める際に、拓也は１回ごとのうまさ度が 0.05 であることを用いて、ビルド・アップ的に各回のうまさ度を求めている。この授業ではここまでに、10 回や５回、２回のうまさ度を比例的推論を用いて求めていたが、拓也の様相は、そうした流れであっても学習の初期段階においては、比例的推論への移行段階とされるビルド・アップの考え方が現れることを示している。

このビルド･アップの利用に関わると思われる拓也の考え方として次のようなことがある。第一に、彼の比例的推論が半分の系列と密接に関連していたことである。２回のうまさ度を求める際には、５回のうまさ度 0.25 に対し 0.25÷2 や 0.125÷2 といった操作を行っている。また第２時で８回のうまさ度 0.4 を５回のうまさ度 0.25 で割った際にはこの関係を PM に記入することはしていないが、0.25 と 0.5 が「×2」の関係であることは PM に書き込んでいた。第二に、比例的推論を意識的に利用できる状態にまでなっていなかったことがある。８回のうまさ度を求める際に 20÷8＝2.5 を計算しており、また２回のうまさ度は 2×10＝20 だから 1÷10 で求められることも理解していながら、８回のうまさ度を 1÷2.5 で求めようとする様子は見られなかった。また上述のように 0.4÷0.25＝1.6 を計算しても、それを PM の他の部分を関連づけることはしなかった。これらの特徴は、第２節で述べた素朴な比例的推論の状態にあったことを示唆している。

この授業ではこうした状態を PM への表現を通して意識化しようとした。しかし第２時後半での問題の取り組み方は、そうした意識化につながりにくいものとなっている。最初の方の問題ではもとにする量やそれに対応する割合の１を書かなかった。後半の問題ではそれらは書くものの、数値間の乗法関係を表す矢印等を自分からは記入しないことが多かった。また PM を作成する前に立式をしていた。

第３時のジュースの濃さを比較する課題では、それまでうまさ度という割合を学習してきたにも関わらず、拓也は最初、いわゆる加法方略により２つのジュースの濃さを同じと判断した。また加法方略からの移行も友だちの方を見ることでなされていた。さらに 0.8－0.5＝0.3 と計算し、この 0.3 に ml の単位をつけていた。比例的推論の意識化が十分なされなかったことが、加法方略を誘発し、また求めた 0.8 や 0.5 と液量との関係も意識できていなかったのではないかと考えられよう。

(2) 図の上での割合の感覚の重視とそれに基づく立式の修正

PM という表象を利用し、また 2.3(4)で述べた点を注意することで、数値化される前の割合的な感覚を拓也が大切にする様子が見られた。例えば第２時で 15÷75＝0.2 を計算した後 PM に 15 人を記入する際、0.2 として適切な位置に書いていた。こうした様相は単元を通して見られ、第９時で 15m に

対する 12m の割合を求める際にも、12m の位置を書き直し、0.8 としてより適切な位置にした。

このように PM の上に数値を配置する際に、その相対的な関係を大切にしていたことから、その情報を利用して立式を選択する様子が見られた。例えば、第６時でくじ 80 本の 5%を求める際に、80 本、100%、5%、0.05 を PM に記入し、その上で 80×5 と 80×0.05 を計算し、答えを４本と求めている。これは 5%の位置に対応する本数として適当な 4 を与える式を選択したように見える。第７時で□の 24%が 48dl であるときの□を求める際にも、PM に数値を配置した後で 48×0.24 と 48÷0.24 を計算して後者を選択した。

今回の授業では比例的推論の意識化により、それに基づく立式が行われるようになることを期待したが、拓也の考え方は数値間の相対的な位置に注意を向け、割合的な感覚に基づき式を選択するという側面を持つ一方で、数値間の乗法的関係を PM 上で把握し、それに基づいて式を決めるという形には必ずしもならなかった。相対的位置に基づきながらも十分に乗法的関係を PM で確認していなかったという意味で、半思考的な状態に留まったと言えよう。ただし、吉田ら(2000)が数の相対的な大きさに基づいて立式することも、１つの有意味的な方略としていることからすると、移行的な状態として評価することもできるであろう。

(3) 比例的推論の意識化の効果とその不徹底

拓也は PM を作成してから立式をする様子も見せた。例えば第７時前半で３用法の混在したプリントに取り組んだ際、1500 円の 20%引きを求める問題では、PM 上で割合の 1 から 0.2 に向かう矢印をかいて「×0.2」を記入し、その後 1500×0.2 の計算を行っている。「0.2 は 1×0.2 だから 1500×0.2 をして」と説明を書いたことは、ここでの比例的推論を意識できており、それに基づいて立式ことを示唆している。こうした立式の仕方は第３時から見られ、第４時、第６時後半にも見られた。

一方で、(1)や(2)でも触れたように、PM 上に数値を配置し、矢印等を記入する前に立式をするという考え方も多く見られた。さらに、第９時後半の練習問題のほとんどでは、拓也は PM を自らかくことなく立式をしていた。

第９時で第１用法の問題を PM に数値を記入して考えた際には、すぐに適切な立式をし、それ以外の式は検討していない。しかし第９時で PM を全くかかずに取り組んだ問題では、第１用法の場合に特に、いくつかの式を考えて、友だちの方を見てからそのうちの１つを選択するという様子が何度も見られた。これらより、拓也は PM 上に問題場面を表した場合の方が自信を持って立式ができていたこと、また PM に矢印等を記入しない場合でも、(2)で述べた半思考的な利用から、比例的推論をより意識した利用に移行していたことが示唆される。最後の 48 ページに対応する割合が与えられていない第３用法の問題で、いくつか計算をして答えの候補が見いだせなかったときに、初めて自分から PM をかこうとしたことは、PM が拓也にとって思考機能を持ち始めていたことを伺わせる。

以上より、PM による比例的推論の意識化は、拓也にとって一定の効果をもたらしものの、第９時でも立式に自信がない場合に PM をかいて判断をしようとする様子があまり見られなかったこと、また単元の途中では(2)で触れたような半思考的な状態に留まっていたことなどから、その効果は十全なものではなかったと考えられる。この原因として、いくつかのことが考えられる。第一に、前述のように PM に自分から矢印等をかきこまないことも多く、比例的推論の意識化が十分でなく、また比例的推論と立式の関連についても理解が不十分であったのではないかということである。第二に、PM をかく際に基準となる１への着目が弱かったことが考えられる。PM と類似の図で６年生の割合単元を扱った佐藤(2008)は児童の学習過程の分析から、基準である１を最初にかくようなかき順が比例的

推論の発達と大きく関係していると指摘している。拓也はこうしたかき順になっておらず、例えば、第６時でくじ 80 本の 5%を求める際には、全体に対応する割合の 1 は、立式・求答し、PM にも答えを記入した後に記入されていた。授業の途中では 1 に着目することに何度が言及したが、その点が共有されなかった可能性がある。また学習の困難度を上げすぎないようにするために、プリントに PM の枠を印刷しておく際に、基準の 1 をすでに印刷しておく場合もあったため、１への注目が意識的になされにくかった可能性も考えられる。第三の原因として、小数を含む倍関係についての感覚が不足していたことがある。例えば、第 7 時で□の 24%が 48dl のときの□を求める問題では、まず 0.24×5、0.24×4.5 を計算した。これは 0.24×$x$＝1 になる $x$ を見いだそうとしたものと考えられる。この $x$ が見いだせれば、48×$x$ として□を見いだすことができるからである。逆に考えれば、拓也は 0.24÷0.24＝1 という乗法的関係に目を向けることができなかったことになる。800 円の 20%を求める問題でも、800×0.2 という立式ができていながらも、PM の 0.2 から 1 に向かう矢印には「×5」と記入した。これは 1×0.2＝0.2 という乗法的関係を把握できなかったことを示唆する。このように小数を含んだ乗法関係がすぐに理解できなかったことで、PM に比例的推論を適用しにくかったことが考えられる。

(4) 多面的な乗法関係に基づく割合の理解

以上の考察を見ると、PM 上で数値間の乗法関係を表し、それに基づいて立式をするという点では、拓也の学習は移行的な状態に留まったように思われる。しかし、上で述べてきた特徴も、別の観点から考えるならば、割合に関わる問題場面、あるいはより広く乗法構造に関わる問題場面を子どもたちが自分たちなりに探求し、理解していく一つの方向性を示すものと考えることもできる。

(3)で触れたように、拓也は 0.24×$x$＝1 になる $x$ を見いだそうとする様子や、1 と 0.2 との関係を×0.2 としてだけでなく、×5、÷5 としてもとらえていた。これらは、24%が約 4 分の 1 である、20%が 5 分の 1 に等しいといった理解にもつながり、割合、あるいは乗法関係を多面的にとらえることにつながると思われる。

また、102 人が 120%にあたるときの定員を求める問題では、最後に 120÷1.2＝100 を計算して確かめている。PM に現れる数値間の関係を比例的推論の観点からチェックすることで、自分なりに整合した図式を PM の上に認めていこうとするものと考えられ、問題場面への理解を深めることにつながると言えよう。さらに、直接必要でない矢印を加えることも、４つの量の乗法関係を多面的に捉えることに資するであろう。例えば、第 7 時前半の練習問題で、36 人の 75%を求める問題で、拓也は最初、1 から 36、0.75 から 27 に向かう縦矢印をかき、「×36」という乗法関係を PM に表していた。全体で確認をしている際にはここに、1 から 0.75、36 から 27 に向かう横矢印をかき、「×0.75」という乗法関係を加えている(図 10)。

こうした多面的な捉え方は、立式を納得する上でも有用であると考えられる。第５時で第２用法の初めての学習で 24m$^2$ の 60%を考えた際に、拓也は数値を PM に配置をし、いくつかの計算をした後に、まず求めた 14.4 という答えの候補について、14.4÷24＝0.6 を確認して、これを答えとして選択していた。第 1 用法に相当する乗法関係がここでの理解を支えていたと考えられる。PM で 24 と 1 の関係を吟味している中で、「あっ」と呟いて 0.6×24 を計算し、プリントに説明を書いたことは、0.6 を乗ずることや積の 14.4 が求める面積となることを、縦矢印の逆により支持できたことを示していよう。さらに 100 と 60 の関係を考えた際に、これらの間に横矢印をかき「×0.6」の関係としたことは、0.6 を乗ずることを 100 から 60 への変換との関係でも捉えたことを意味する(図 9 )。

図をかくことと情報を得ることの相互作用(Nunokawa, 2006)に注目するならば、このように PM に書

き込みながら情報を増やし、問題場面に関わる整合したイメージを構築していくことを、問題場面を理解する過程という点からさらに検討していくことが必要であろう。

### 4.3 勝雄の学習の概要

第１時では、シュートの成功回数が８の場合のうまさ度を各自で考える場面において勝雄は筆算に

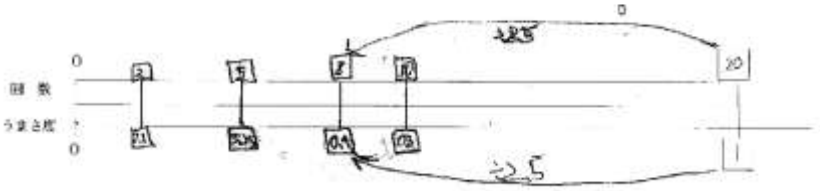


図 14

によって 20÷8＝2.5 を、次いで１÷2.5＝0.4 を計算した後に、図 14 の様に数直線に数字と矢印とを書き込んだ。ただし、１÷2.5＝0.4 の筆算を計算後に消していた。

第２時では、第１時の内容の復習の後で、全体での話し合いにおいて教師に提示された、割合＝くらべられる量÷もとにする量、という言葉の式と用語の説明をプリントに書き込んだ後、勝雄は練習問題を解いていった。１問目の、10 問の問題のうち６題が正答した場合の全問に対する正答の割合を

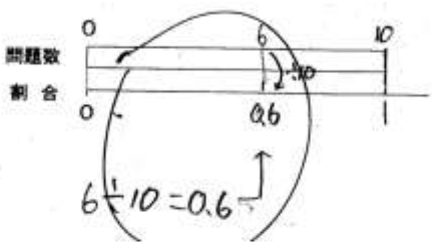


図 15

求める問題の解決において勝雄は図 15 の様に数字、矢印、および式を書いた。勝雄のこの解決以前の全体での話し合いでは、第１時の復習として教師は 20÷10×４および１÷10×４を反映する横に矢印を描いた考え方と図 14 に表されるような考え方を扱った後で、20÷20＝１および８÷20＝0.4 を反映する縦に矢印を描く考え方を扱い、言葉の式を提示した。矢印を縦に引く考え方と言葉の式は図 15 に表れるような勝雄の考え方を促したと解釈する。勝雄はこの時点において数直線に横に矢印を書き入れる考え方ではなく、縦に矢印を描く考え方を選択した。4問目の解決で勝雄は図 16 を描いた。図 16 では割合が 0.5 になるになる箇所を書き入れており, 5問目でも同様の書き込みがあった。

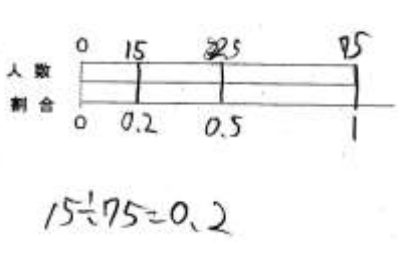


図 16

第３時では、ジュースの濃さを求める問題を各自で考える場面において、勝雄は、100－80＝20、40－20＝20、どちらも 20ml カルピスジュースの量が多い、とプリントに書き込んだ。問題文の難しさ、すなわちこさという語の意味の難しさが、勝雄の解決に影響を与えたとも解釈できるものの、何れにせよ比較を求められたときに勝雄が第一に依存するのは未だ加法的な考え方であった。この後、勝雄は加法的な考え方を表した記述に大きくばつをつけ、図 17 の様な図を描きながら解決を進めた。勝雄

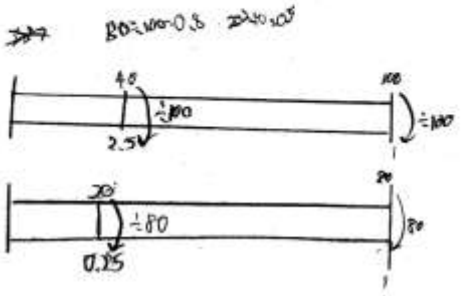


図 17

は第２時で学習した数直線に縦に矢印を描く考え方をこの問題の解決に適用したものの、もとにする量とくらべられる量とを問題文から十分には読み取ることができず、誤った数の組をつくり、計算していた。その計算も間違っていた。とは言っても、加法的考え方から乗法的な考え方である割合の考え方への転換点がここに表れていた。図 17 に表されるように勝雄は第２時で形成した考え方のこの問題に対する適切さを判断し得たのであり、例え比較する数の組を取り違えていたとしても、加法的な考え方からの飛躍的な発展があった。全体での話し合いにおいて正しい解決が教師によって取り上げられた後での、カルピスジュース 40ml の中にカルピスが 30ml 入ったＣのコップを扱った問題では、勝雄は数直線に縦に矢印を描き、正しく解決していった。第３時の最後には、教師は男子が 16 人で女子が 20 人の学級でもとにする量とくらべられる量とを互いに逆にした場合の考え方を各々扱った。勝雄は女子 20 人をもとにする量とした場合では自力で数直線に数字を記入して計算し、解決したものの、男子 16 人をもとにする量とした場合では 16 と 20 とを数直線に書き込んだのみであった。教師による説明を受けて勝雄は数直線に 1 と 1.25 とを書き込んだ。

第４時では、教師は百分率を導入した。教師による説明の後、教師による説明の後、図４のように、勝雄は第３時まで用いた数直線の下にさらにもう一段数直線を描いた数直線を描いた。この後、勝雄は乗り物調べという題目の五種類の乗り物の通過台数から百分率を各々求める問題を自力で解決した。勝雄は式によって割合を計算し、割合を 100 倍して、百分率を求めた後、数直線に数字と矢印を書き込んだ(図 18)。第４時の最後に、百分率が 100％を越える問題を教師は提示し、勝雄は全体での話し合いの後で板書を見ながらプリントの数直線に数字と矢印を書き込み、さらに式を書いた。

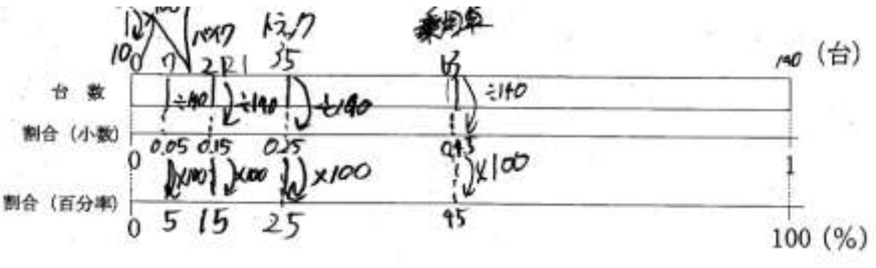


図 18

第５時では、24ｍ²のへいの 60％をペンキ塗りしたときのペンキを塗った部分の面積を求める問題に対し、各自で考える場面で勝雄は図Ｆの様に数直線に数字と矢印を書き込み解決した。勝雄は始め、百分率を表す数字 60 を記入してから、その上に割合を表す数字 0.6 を記入し、それらの数字の間に縦の矢印とともに×100 と÷100 とを書き込んだ。さらにその上に縦の矢印とともに÷24 と記入し、次に×24 と記入してから、60÷100×24＝14.4 と計算した。その後、全体の話し合いでは勝雄と同様の考え方の他に、くらべられる量を□で表し言葉の式によって計算する考え方や、数直線に横に矢印を描いていく考え方である 24 を 10 等分してから６倍する考え方、数直線に横に矢印を描き 24 を 0.6 倍して求める考え方を子どもたちは提出した。

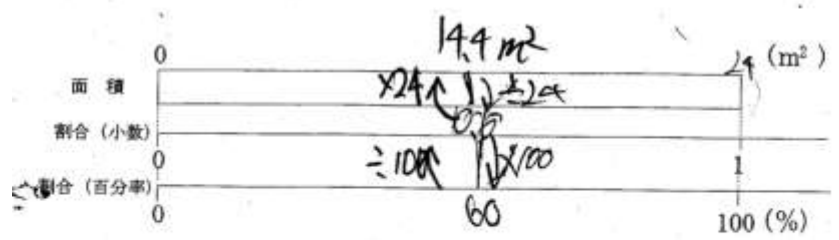

図 19

第６時では､第５時の復習である 80 本のくじの中の５％の当たりくじの本数を求める問題と一両が 80 人定員の電車の乗車率が 110%のときの乗車人数を求める問題を、図Ｆと類似した図を描きながら勝雄は自力で解決した。その後での全体の面積の 30%が 90m²のときの花畑全体の面積を求める問題

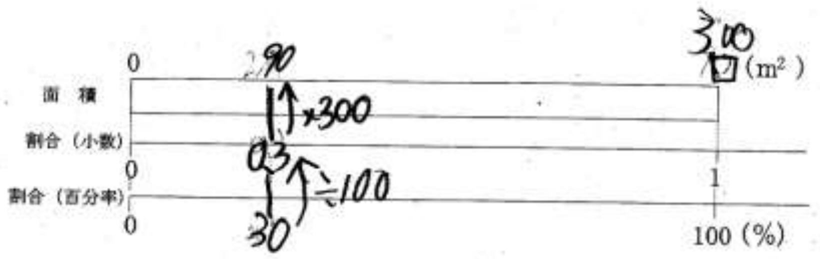

図 20

に対しては、勝雄は図 20 の様に数字と矢印を数直線上に書き込んでいた。最初、勝雄は百分率を表す 30 と縦の矢印、÷100 を書き込み、次に面積を表す 90 を記してから、30÷100＝0.3、90÷0.3＝300 と計算した。その後で、割合を表す 0.3 と縦の矢印、×300 を書き込んだ。その後、0.3×300＝90 という計算も記述したものの、勝雄はこの記述を消した。各自で考える場面の後での全体の話し合いにおいて、教師は横の矢印を書き込みながら、百分率での関係を表す 30÷0.3＝100、小数での関係を表す 0.3÷0.3＝１を説明した。その後の練習問題の解決において勝雄は図 20 と同様の縦の矢印を書き込みながら、問題を解決していた。答え合わせの際の教師による説明では横の矢印を書き込む考え方が強調されていた。

第７時では、百分率の練習問題を各自で解決した。面積 24m²の砂場が公園全体の面積の８％である場合の公園全体の面積を求める問題、800 円の 20%を求める問題、全体で 160 人のうち女子が 72 人の場合の女子の人数の割合を求める問題などを勝雄は解決していった。勝雄は１問目の解決では図 20 と同様の書き込みをしたものの、幾つかの問題の解決では線分図への書き込みは矢印のない簡略化されたものであった。500 円の商品の消費税５％を加えた値段を求める問題では勝雄は図 21 の様な書

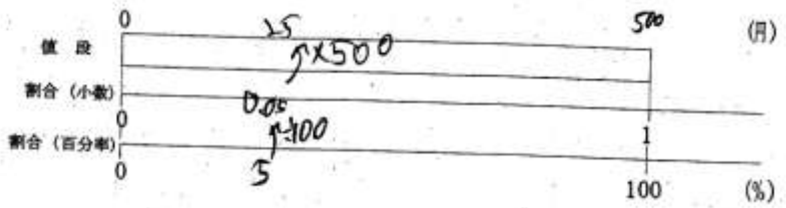

図 21

き込みをしながら解決した。この書き込みの後、５÷100×500＝25、500＋25＝525 と勝雄は計算した。その後の全体の話し合いでは教師は矢印を横に描く考え方を説明した。

第８時では百分率を求め帯グラフを描く問題を各自が解決した。交通事故の原因をグラフ化する問題において合計 23 人のけが人のうち飛び出しを原因とする 11 名の百分率を求める際に勝雄は図 22

図 22
の様な線分図を描いた。五項目の百分率を求める際にすべての場合において勝雄は線分図を描いたわけではないものの、勝雄は百分率を計算する際にはその考えの根底で線分図上での数の関係づけを行っているのではないか。しかし、図 22 では 50 と記した箇所に 23 と記すべきであって、勝雄は誤った数値を取り上げていた。その後の合計台数が示されている場合の自動車の種類を百分率から求める問題に対しても、五項目のうち最初の二項目の解決において勝雄は図 23 の様な線分図を描いた。

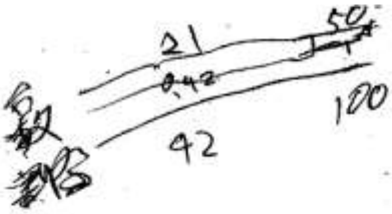

図 23

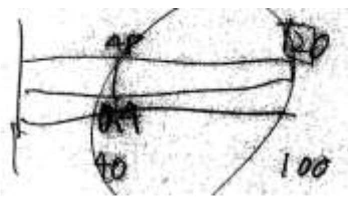

図 24

第９時では、では百分率を求め帯グラフを描く問題を各自が解決した。勝雄はこの時は線分図を描くことはなかった。その後は、これまでの９時間の内容を網羅した練習問題を勝雄は解決した。その解決において勝雄の描く線分図の多くは矢印が省略された簡略化されたものとなっていた(図 24)。

### 4.4 勝雄の学習に見られた特徴

第１時、勝雄の解決は全体での話し合いにおける教師の PM の使用と数値と数値間の関係の表象を自身の比例的推論を構成する心的構成物に取り込んだ結果として、勝雄の解決方略として、もしかしたら一時的に、表象されたものである。この勝雄による解決方略の表象は、シュートの成功した回数が 10 回の場合、５回の場合、および２回の場合を教師が扱った後での表象である。勝雄は全体での話し合いで扱われた各々の成功回数における小数での割合を巡っての教師と子どもたちとの相互作用に参加して、彼はこの相互作用の途中で一度も発言していないのだが、心的構成物に取り込み、成功数が８回の場合を表象したのである。

第２時では第一時の成功数が８回の場合の復習の際に、教師は縦に矢印を描く表象を取り上げ、その直後に言葉の式を提示した。この縦に矢印を描く表象は全体のシュート数である 20 回を１と見なす考え方であり、勝雄は第２時以降にこの考え方を核として問題を解決していった。第２時では、全体を１と見なす考え方の直後に教師は言葉の式を提示しており、勝雄のこの考え方は言葉の式とも結び付き比例的推論を行う際の、比較的強い心的構成物となっているのだろう。実際、教師が横への矢印を再度強調し割合の第３用法を扱った第六時以降であっても、勝雄は数直線上に縦に矢印を描き解決していた。勿論、図 20 を描きながら勝雄は 90÷0.3 を計算していたのであり、横への矢印を描かなかったとしても比例的関係を心的に構成していた。ただし、その比例的関係は縦の矢印を描き、割合にもとにする量をかけてくらべられる量を算出するという反省を伴うものである。勝雄が心的に構成し

た比例的関係は第２用法を反映した関係を核として構成されたものであり、勝雄が最も信頼する関係であった。

勝雄は第８時以降は問題の解決において数直線を描くものの矢印を書き込まなくなった(図22､23、24)。図24は図20の場合と同様の第三用法の問題の解決の際に勝雄が描いた図であるけれども矢印を書き込まず、図の下に40÷100＝0.4、98÷0.4＝120と記述した。勝雄が心的に構成した比例的関係は表記という表象においては矢印という動的な関係付けを伴うものではなくなり、一層形式的なものとなった。とは言っても、矢印という動的な関係付けが勝雄の心的構成物から消滅したのではなく、表記として表象されなかっただけであり、依然として内的な表象として勝雄の構成した比例的関係を支え、問題の解決の際に働いていたのだろう。

勝雄の比例的関係の心的な構成は、結局、第２用法としての関係を核として形成されたものであるものの、他の用法の場合、たとえば第３用法の場合にもこれらの関係を捉える視点を変えることにより、柔軟に問題を解決していた。この柔軟さは数直線に縦横に矢印を描きながら数値間の関係を比較するような十分な柔軟さではなかったものの、勝雄の固有のものであると判断できる。

## ５．おわりに

本プロジェクトでは、比例的推論を生かしながら割合単元をデザインすることを試み、それが子どもたちにどのように受け入れられるのかを、子どもたちの学習の様相を詳細に見ることで捉えようとしたものであった。本報告書では２名の児童について､その学習の記述とそれに対する考察を試みた。それぞれの子どもが、自分なりの仕方で学習内容を意味づけ、割合メーターについても教師の意図には必ずしも沿わずに、自分なりの利用の仕方を見いだし活用していた。本報告書で取り上げた児童については、いずれも比例的推論を意識化することを意図して導入した矢印を省略する傾向にあった。このことは一概に悪いとは言えず､4.4で述べたように､矢印はかかなくても比例的推論について自分の内的な表象として意識されていれば十分であろう。しかし、4.2で述べたように、矢印をかかないことが数値間の乗法関係の把握を曖昧にし､比例的推論を意識的に利用することを妨げるようであれば､支援のあり方を検討していかなければならない。

表現機能から思考機能への移行は我々が期待するよりもギャップが大きい部分もあり(*cf.* 布川, 2007)、したがってこの移行を慎重に扱うことが必要なのかもしれない。この際に、割合メーターへの記入から立式の流れをルーチン化した手続きとして確立することを目指すのではなく、数値間の乗法関係やその組み合わせによる比例的推論を意識化して、それらの感覚を豊かにしながら割合の理解につなげていく必要があろう。また 4.2(4)で言及した多面的に乗法関係を捉える可能性が子どもたちの学習の様相から見えてきたが、こうした多面的な乗法関係の把握を割合や３用法の理解を確かにするものとして利用することも検討することが考えられる。

## 謝　辞

調査にあたりご協力頂きました桑原利恵先生はじめ上越教育大学学校教育学部附属小学校の先生方に感謝申し上げます。

## 註および引用・参考文献

1）田村(1978)は次のように述べている：｢'AはUのa倍である'と答えられるとき、すなわちA＝U×aとなるような分数aが見出されるとき、われわれはaを'AのUに対する比'または'AとUの比'といい、A:Uで

表す」(p. 40)。これに従えば、$A_1 = kA_0$ となる $k$ を求めることが本質であり、$A_1A_0^{-1}$ もこれを求めるための操作にすぎない。

2) 他の教科書のように「くらべる量がもとにする量の何倍にあたるかを表した数」として割合を定義する場合には、別の議論が必要であろう。

3) 調査の授業はプロジェクトのスタッフ以外に、以下のメンバーの協力を得て実施された：佐藤満、林尚之、渡辺由仁、松井守、山澤晴子、濱谷伸広、磯野和美、上田貴之、清水祐子、中嶋良子（上越教育大学大学院生）; 入澤梨香、黒木真奈美、高山いつか、吉邨公輔、濁川幸広（上越教育大学学部生)。授業者には佐藤と林がなり、授業は授業者の２名とプロジェクトのスタッフが中心となって立案し、メンバーで検討した。

4) 児童のうち４名は前回のプロジェクトから継続して協力してもらっている児童である。１名は前回のプロジェクトで協力してもらった児童が転校したのに伴い、新たにお願いをした児童である。

5）PM 上での思考を通して、加法方略から割合へと移行できた事例を布川(2008)で報告している。

6） １より大きい割合を PM 上で意味づけて受容できた事例を布川(2008)で報告している。


Boyer、 T. W.、 Levine、 S. C.、 & Huttenlocher、 J. (2008). Development of proportional reasoning: Where Young Children Go Wrong. *Developmental Psychology*、 *44* (5)、 1478-1490.

一松信ほか. (2008). みんなと学ぶ小学校算数5年下. 学校図書.

Lamon、 S. J. (1994). Ratio and proportion: cognitive foundation in unitizing and norming. In G. Harel & J. Confrey (Eds.)、 *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 89-120). Albany、 NY: State University of New York Press.

Misailidou、 C. & Williams、 J. (2003). Diagnostic assessment of children’s proportional reasoning. *Journal of Mathematical Behavior*、 *22*、 335-368.

National Research Council. (2005). *How students learn: Mathematics in the classroom*. Washington、 D.C.: National Academies Press.

布川和彦. (2005). 子どもの学習過程に基づく支援の構想：５年生「割合」単元における学習過程の分析を通して. 上越数学教育研究、 *20*、 11-20.

Nunokawa、 K. (2006). Using drawings and generating information in mathematical problem solving. *Eurasia Journal of Mathematics*、 *Science and Technology Education*、 *2* (3)、 33-54.

布川和彦. (2006). 比例的推論の授業における小学校４年生の学習の様相. 上越数学教育研究、 *21*、 1-12.

布川和彦. (2007). 小学校３年生による比例的推論の課題の解決：下位単位の利用に焦点を当てて. 上越数学教育研究、 *22*、 1-10.

布川和彦. (2008). 比例的推論を利用した割合の導入の試み. 日本数学教育学会第41回数学教育論文発表会論文集、 957-958.

大谷　実. (2002). 初等・中等教育段階の接続性を持つ数学的活動カリキュラムの開発と評価. 平成11～13年度科学研究費補助金(基盤研究C(2))成果報告書.

Parker、 M. & Leinhardt、 G. (1995). Percent: A privileged proportion. *Review of Educational Research*、 *65* (4)、 421-481.

Pothier、 Y. & Sawada、 D. (1983). Partitioning: The emergence of rational number ideas in young children. *Journal for Research in Mathematics Education*、 *14* (5)、 307-317.

佐藤　満. (2008). 比例的推論の発達を促す統合的な授業の効果に関する研究：６年「倍と割合」「比」

の実践を通して. 上越数学教育研究、 *23*、 53-64.
田端輝彦. (2003). 同種の量の割合の導入に関する一考察. 日本数学教育学会誌、 *85* (12)、 3-13.
田村二郎. (1978). 量と数の理論. 日本評論社.
土屋利美. (2002). 比例の見方を用いた「割合」 の指導実践. 日本数学教育学会誌、 *84* (8)、 30-37.
山口　潤. (2007). 割合における児童の学習過程に関する研究 : 割合のイメージを生かした表象の効果. 上越数学教育研究、 22、 101-112.
吉田甫、 河野康男、 横田浩. (2000). 割合の問題解決におけるインフォーマルな知識の利用と解決方略の分析. 宮崎大学教育文化学部紀要・教育科学、 2、 123-133.