上越数学教育研究, 第 21 号, 上越教育大学数学教室, 2006 年, pp. 1-12

比例的推論の授業における小学校４年生の学習の様相

布川　和彦
学習臨床講座

１．はじめに

高学年の算数においては比例的推論が直接関わる学習内容が多い。比例的推論やその一つの表象である数直線については、その重要性が小数の乗法（馬場, 2005; 高橋, 2000）、小数の除法（白石, 2005）、割合（布川, 2005a）といった乗法構造の概念フィールド (Vergnaud, 1997) の学習に関わり述べられてきているが、子どもたちのそれらの使用が十分でないことも同時に指摘されている。

しかし他方で、学習前の子どもでも乗法的な場面に対し、比例的推論を含め多様なアプローチができることが報告されてきており（例えば Kenney et al., 2002; Lamon, 1994)、乗法構造に関わる「行為の中の定理」(Vergnaud, 1997)を示すと言われている。また、Van Dooren et al. (2005)は、２～８年生の調査結果を分析し、比例的推論を適用する能力の獲得において、主たる成長が３～５年生において生ずると述べている(p. 70)。ただし、小数・分数を含む有理数への拡張が概念の変化 (Merenluoto & Lehtinen, 2004)と呼べるほど大きな変化であるならば、長期的な展望に立って指導を計画することが必要であるとの指摘もある (Greer, 2004)。

そこで本稿は長期的な指導の基礎を構築すべく、高学年への橋渡しとなる小学校4年生において比例的推論の授業を実施し、そこに参加した児童の学習過程を分析することにより、中学年の児童の比例的推論の学習の様相を考察することを目的とする。

２．調査の方法

2.1 データの収集

調査の授業は小学校４年生の３月に実施された。60 分の授業を３回、90 分の授業を１回、30 分の筆記調査を１回行った [1)]。授業に際しては、教室の後方から教師や黒板で発表する子どもの様子を、前方から子どもたち全体の様子をビデオで記録した。また、担任教師との相談により決定した５名の抽出児童について、１台ずつのビデオカメラによりそれぞれの子どもの学習過程を継時的に記録した。抽出児のビデオカメラにはそれぞれ１名ずつの記録者がつき、適宜手元を拡大するなどして、子どもたちがどの時点で何をかいたのかも記録できるようにした。

2.2 授業の概要

第１時では、発泡スチロールの棒をつないで 12m にしたものを提示し、何メートルかを当てさせた後、次の問題を提示した :「１ｍの重さが 27g の棒があります。この棒 12m の重さは何 g でしょう」。個別活動の後、皆で式と答えを確認し、さらにどうしてかけ算になるのかを図などで説明するよう求めた。各自で考えさせた後、全体での話し合いにおいて３人の子に前で自分の図を使って説明させた。最後に教師が次のような基本の図を用いて説明をまとめた。

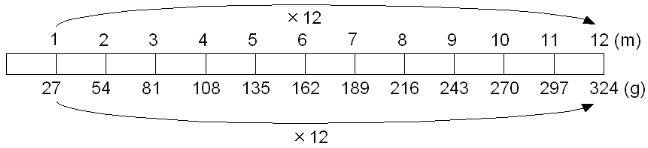


図１

なお、こうした図は今回の一連の授業では、子どもたちの考え方を整理するために用いられた。これは、こうした図が高学年までに model-of から model-for (Gravemeijer, 1997)へ移行すること、あるいは社会的機能としての表記としてだけでなく思考機能としてのシンボルとなるよう発展すること(大谷, 2002)を意図し、それにより子どもたちの持つインフォーマルな知識をフォーマルな知識へ意識化することを目指していた(*cf*. Nunokawa, 2005)。

第１時後半では次の問題を扱った:「17mの重さが 459g の棒があります。この棒１mの重さは何 g でしょう？」。式と答えを全体で確認した後、説明を各自で考えさせた。

第２時前半は前の問題の説明を全体で話し合った。その中で子どもが発表した考えを、図１と同様の図を用いて教師がまとめた。「×12」の部分は逆向きの矢印に「÷17」と書き、また今回は上下の左端に「0」を記入した。

第２時後半は次の問題を扱った :「プリンを 15 こ買います。Nスーパーでは３個で 168 円で売っています。代金はいくらでしょう」。各自で取り組んだ後、全体での話し合いを行った。教師が 168×15 の考え方を提示し、この考えがなぜ不適切なのかを問うと、15 個以上の値段になる、１個の値段を求めてからでないと代金は出せないという意見が発表された。最後に教師が「168×５」とした人がいると紹介し、これはどのように考えたのかを各自で考えさせた。

第３時前半はプリンの問題で 168×5 とできる理由をプリントをプロジェクタで写して５名に説明してもらった。子どもが説明に用いた図はテープ図あるいはプリンの絵であったが、説明の中で教師がそれらに図１と同様の矢印を加えることがあった。また説明の中で子どもの声を拾って「３こセットの分→分かって、それをもとにして考えれば分かる」とまとめた。別の子の「15 が３の何個分かを考える」という考えも取り上げ、15 マスを３ずつ囲み５個分であることを確認した。

第３時後半は次の問題に取り組んだ:「たまごを 28 こ買いました。代金は 952 円でした。このたまご４このねだんはいくらでしょう」。

個別活動の後、２名の子に自分の考えを説明してもらった。952÷28=34、34×4＝136 と 952÷7 が出された。前者について図を用いて全体で話し合う中で図１と同様の矢印を入れてまとめていった。またこの確かめを考える際に子どもから、136×7 が出され、その理由として 28÷4＝7 であり、「28 こを４こ分にわけると、４こ分が７セットあるとわかる」という考えも出された。その延長で 952÷7 の考えを取り上げ、４こずつのグループが７セットでき、そのうちの１つを求めることが子どもから出された。２つの考えを同じ図の上に表すことで、最終的に次のような図にまとめられた。

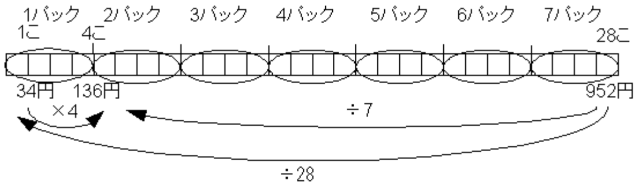


図２

第４時は次の問題を３つの情報と共に提示した :「同じサイズのくぎが 100 本あります。100 本分の重さを求めましょう」。情報Ａ：25 本で 30g、情報Ｂ：30 本で 36g、情報Ｃ：40 本 で 48g。全員が情報Ａを使いたいとしたので、まずＡを用いて全員で考えると、すぐに 100÷25＝４、30×4＝120 という考えが出された。これを図１と同様の図を用いてまとめた。

その後、ＢかＣの情報を用いて 100 本分を出すよう求めた。個別活動後の話し合いの中で、Ｂを使ったとき 10 本分の重さが求まらないという問題意識が出され、これに対し 36÷3＝12 で求められるという意見が出された。30 本の中に 10 本が３個あるから３で割ることが確認された。この時、図３によっても確認された。また 10 本分が 12g ということから、12×10 という考え方も出された。最後に、図１と同様の図を用い、12×10 を「×10」で、36×3＋12 を「３

こ分と３つに分けた１つ分」としてまとめた。

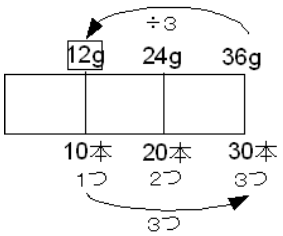


図３

最後にＣの情報を用いて各自で解決し、それを全体で話し合った。40 本分を半分にすることで 20 本分を求める考えが出された。図１と同様の図でまとめ、「２こ分と半分(２つに分けた１つ分)」としてまとめた。24×５という考えも最後に出された。

３．抽出児の学習の様相

本節では５名の抽出児のうち、１名の児童・正人（仮名）に焦点を当て、第１～４時の中で彼の考えが表に現れた場面を中心に、彼の学習過程を追ってみることにする。

3.1 第１時の学習

12ｍの重さを求める問題では、すぐに 27×12＝324 として答えを求めた。教師から図で説明するよう求められると、最初図４(a)をかいた（下段右側は点線）が、その後、下段右側を変更して図４(b)のようにした。しかしさらに

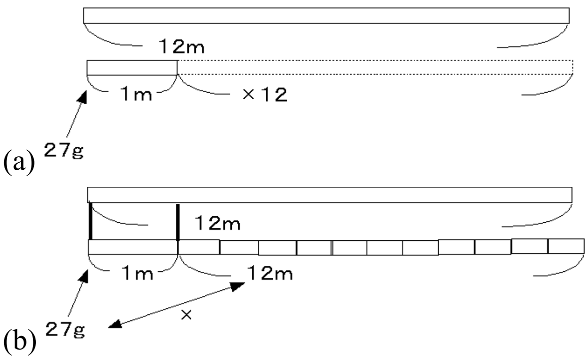


図４

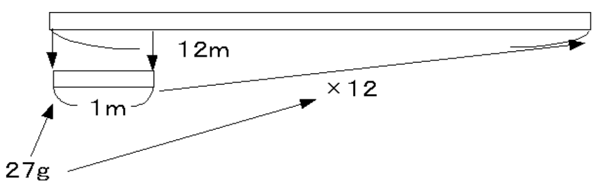


図５

この図をすべて消し図５をかいた。

説明について全体で話し合っている途中で、ある図に関わり 27 を 12 回足すように見えると指摘した子がいたが、その際には「それでもいいじゃん」と発話していた。

後半の１ｍ の重さを求める問題では、すぐに 459÷17＝27 として答えを求め、また自分から図６をかいた。「÷17」の矢印は、最初逆向きで「×17」となっていたが、これを消して図６のようにしたものである。

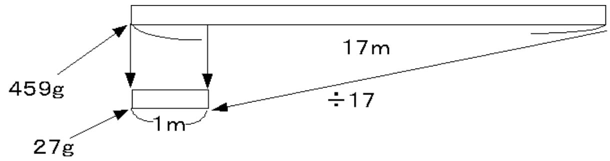


図６

この図を消して、次に図７をかいた。図をかいている途中で全体での答えの確認が始まったが、正人は下段の数字を書き続けた。

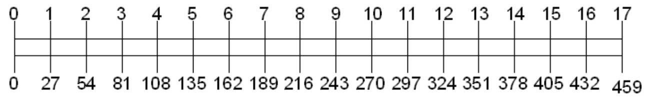


図７

教師から図をかいて説明するよう指示があると、図７を消し、図８をかいた。

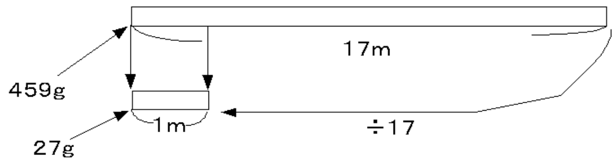


図８

しばらくしてから 27×17＝459 の筆算をした。

3.2 第２時の学習

１ｍ の重さを求める問題についての話し合いでは、教師が 17 等分する理由を尋ねると勢いよく挙手したが、指名はされなかった。また累減による確かめが行われた際、教師が「17 回引けたってことは？」と尋ねると、「17 等分可能」「÷17 であってる」と発話した。

プリンの問題では、すぐに 168÷3＝56、56×15＝840 の計算をし、答えを求めた。しばらくして、自分から図をかき始めた。図９(a)をかい

て 40 秒ほど考え、これにかき加えることで図９(b)を完成させた。プリンをかく際、このときは１個ずつ、あるいは２個ずつ数えていた。

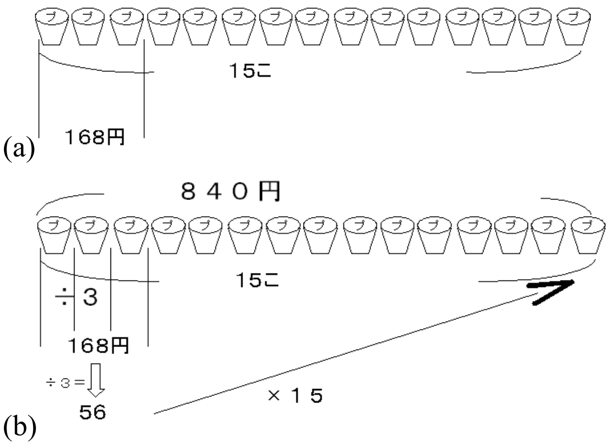


図９

ある子が「１個の値段がわからないと代金は出せない」という発言をしている時、正人は「何言ってるんでしょう、出るよ」と言い、すぐに隣の子に「15 個だから３個ずつ区切れば５束になってる、168×5 で大丈夫」と説明した。この後で、教師より 168×5 の方法が提示された。提示の際教師が「168 かける」と言うと正人はすぐに「５」と呟き、「別にできるじゃん」と発話した。

教師が 168×5 の考え方を説明するよう求めると、正人はまず 15÷3＝5、168×5＝840 の計算を書いた。次に図 10 をかいた。今回はプリンを３個ずつ指でおさえたり、「３、６、９、・・・」と数える様子が見られた。

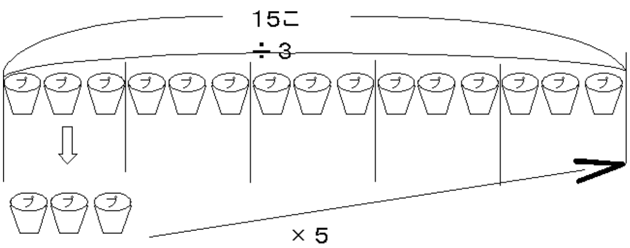


図 10

観察者が「15÷3 って何」「５ってどこにあるの」と尋ねると、正人は「３つずつに分けると５組になる」と答えた。

3.3 第３時の学習

プリンの問題に対する 168×5 という考え方を全体で話し合っている途中で、ある子が「３の５倍するわけだから、168 も同じように５倍する」「15 個は３の何個分か、そういうのが 15 と３の関係」と発言すると、「おー」などと呟きながら反応を示した。その後で教師が「15 は３が何個分？」と問うと、「５個分」と比較的明瞭に発話した。

卵４個の値段を求める問題では、すぐに 952÷28＝ と書き筆算を始めるが、「間違えた」と言いこれらを消した。しかし、「図をかくのか、まいいや」として、「まず１個の値段さえ求められれば」と言いながら、再び 952÷28＝34、34×4＝136 と計算し、答えを求めた。直後に「図がかけねえ」と言いながらも、図 11 をかいた。

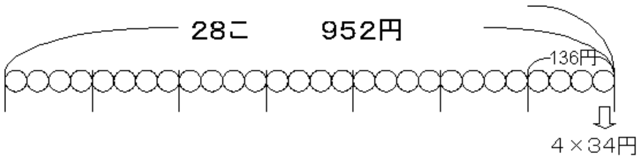


図 11

隣の子と４個の値段が 136 円であることを確認した後、「だよねえ、でも何セットかは求めなくていいってことか」と発話した。

全体の話し合いで 238 円（952÷4）という答えが取り上げられている際、自分の図で４個ずつの組を数えて 136×7＝952 を計算し、「よっしゃー」と発話した。教師が 238 円を支持する発言をすると、238×7 を計算し、「だめじゃん」「確かめすればいい」と発話した。教師が 952÷28 でやった人を尋ねた時、どうして 28 で割るのかを尋ねた時、このやり方で絶対に合ってると思う人と尋ねた時、いずれにも挙手をした。教師が確かめ方を尋ねた時も挙手をし、指名されて「136×7」を答えた。これに関わり他の子が 28÷4 をすると４個分が７セットあることが分かると発言すると、自分の図の上で４個ずつの組を数え、７組あることを確かめた。教師が本当にできるかを尋ねた際には「四七」と呟いた。ただし 136×7＝952 になることを全体で確かめた直後には、34×28＝952 を計算した。

教師が１個の値段を求めずに４個分を求める

方法があるかを問うと、「そこに出てる」と発話した。ある子が 952÷7 の考えを発表すると、952÷7 の筆算を始め、商の一の位を立てる際に「７」を立ててからこれを「６」に直していた。また割り切れた際に「あ、出来た」と発話した。

3.4 第４時の学習

３つの情報が提示された際、「１本８ｇだ、でも違う」と発話した。どの情報を使うのか問われるとＡの時挙手をした。教師がＡで本当に求まるのか尋ねると、「120g だよ」と発話した。求め方の話し合いの中で指名され、「100 の中に 25 が４つあって、その 25 本の釘の重さが 30g だから 30×4」と発言した。

ＢかＣが使えないか教師が問うたときにはＣに挙手したが、プリントではＢを選択した。「30 本、30 だから」「でも半端が出るな」と発話した。36×3＝108 と 48×2＝96 を計算した後、「あれを求めなきゃ」と言い 100÷40＝2 あまり 20 を求めた。「半端出しても、116、4 足りね」と発話した。100÷30＝3 あまり 10 を計算した後でも「118、あなんかわかんね」と発話した。

しばらくして図 12 をかくが、途中で「あーわかった半端な 10 だな」と発話した。

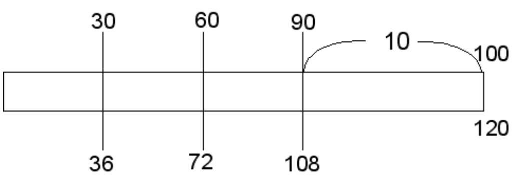


図 12

直後に「10 本の重ささえわかれば」「12g」と発話し、図の下側に「12g」と書き笑顔を見せた。30×3＝90、100－90＝10、36×3＝108、120÷10＝12、108＋12＝120 と計算した。120 を求めた時「あ求められた」と発話した。そしてこれらの式を改めてプリントにまとめるが、「式の順番がわかんねえ」と発話した。また「120 の求め方があった」として 30×4＝120 の式を加えた。

全体の話し合いで 10 本分の重さが 36÷3 で 12g ということが出されると、口を大きく開け「ああー」と発話し、教師が本当に 12g か尋ねた時には頷いていた。その後 36÷30＝1 あまり 6 を計算し、「ダメだ、分からない」とした。12×3＝36 になることが発表され、教師がピンと来た人を訪ねると手を挙げかけるが「だめ」として途中で下ろした。36×3＝108、これに 12 をたして 120 になることに触れ、「この続きが」と発話した。ある子の発言を受け教師が÷３の３がどうして出るかを問うと笑顔で挙手をした。何人目かに指名され、「30 本の中に 10 本は３つあって、あるから、何て言うんだろ、36÷3、かな」と発言した。次の子が 36 を３つに分けるという説明をすると、「今頃整理出来た」と発話した。10 本が 12g であることを確認した後、教師が 100 本の求め方を問うと、12×10 が出された。教師が分かったかと尋ねると挙手をした。次に 36×3＝108、108＋12＝120 が出されると、「それでもいいけど」と発話した。教師が 12×10 はどうやったのかを尋ねると勢いよく挙手した。

36×3＋12 の考えを図でまとめる際、矢印の横になんと書くか教師が問うと、「３個と 0.1 個、じゃねえな、３分の」と発話した。全体で「３こ分と３つに分けた１つ分」としてまとめ、それを皆で読む際、「３分の１」と発話した。休憩時間に観察者が 30×4 の 30 が何か問うと、図 12 左端の 30 本分を指し、「３つしか分けれないけど、あまり関係なしで４つにしちゃうとこれ(30×4)」と答えた。休憩後、前の 120÷10＝12、30×4＝120 を消し、36÷3＝12 と書いた。

情報Ｃを用いて考える場面では、「100 本だろ」とくり返していたが、48×2＝96、40×2＝

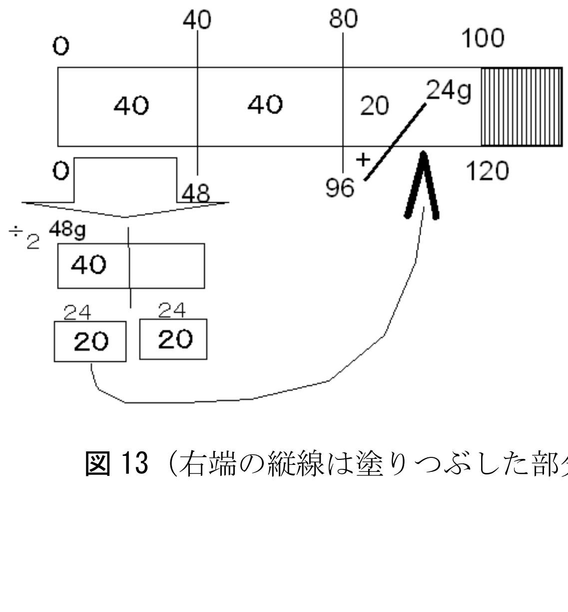


図 13（右端の縦線は塗りつぶした部分）

80、100－80＝20、48÷2＝24 とした。「つまり 20 と 20、だから 96＋24」と言い、96＋24＝120 として「できたあ」と発話した。また自分から図 13 をかいた。

その後、前に書いた式で対応する数値を線で結んだ。48×2＝96 の 48 は 48÷2 の 48 と結び、96 は 96＋24 の 96 と結んだ。48÷2＝24 の 24 は 96＋24 の 24 と結んだ。また 100－80＝20 の 20 の上に「のこりの本」と書き、48÷2＝24 の 24 の下に「のこりの重さ」と書いた上で両者を双方向の矢印で結んだ。

全体で図の矢印に関わり「２こ分と２つに分けた１つ分」とまとめた際、やはり「２分の１」と発話した。教師が 48×2＋24 の考えをまとめた後、１つの式でできるかを問うと「12×10、やっぱ 12×10、最終的には」と発話した。

４．抽出児の調査問題の解決

本節では第３節でその学習を追った正人について、学習の最終的な理解の様相を探求するために、第５時として行われた筆記調査における問題の解決について見ていく。

4.1 合成単位の整数倍だけで解ける問題

問題１（６個 124 円の卵 48 個の値段)、問題２（28 個 945 円のヨーグルト４個の値段)、問題３（3m80g の針金 27m の重さ)、問題４（72m882g の針金 8m の重さ）については、基本的に全体が合成単位 (Lamon, 1994) の何倍であるかを求め、比較的容易に解決した。例えば問題１では、48÷6＝8、124×8＝992 として答えを求めた。問題２では 28÷4 とした後、一度 945÷28＝33 あまり 21 とし「わからん」と発話した。しかし後の方の問題を見てから、25 秒後には 28÷4＝7、945÷7＝135 と求めた。

問題３と問題４については特に悩む様子もなく、それぞれ１分弱で解決を終えた。

4.2 合成単位の 1/4 を必要とする問題

問題５（24m20kg の電線 30m の重さ）の解決には６分 30 秒ほどを費やした。20÷2＝10 を計算するがこれを消し、図３(a)のような図をかいた。同様に下が「30m」、上が「？」の図をかき、「６メートル」と言いながら１分ほど考えた後、図に 6m 部分を加えた図 14(b)のようにした。

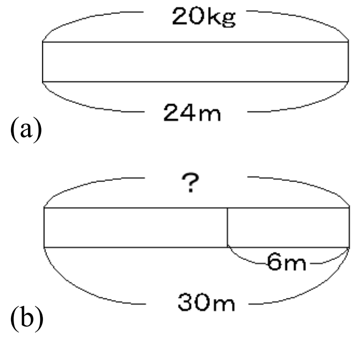


図 14

すぐに 20÷6＝3 あまり 2 を計算した。しかしこれを消し「24m の電線の重さが[聴取不能]、30m、6m」と発話すると数秒後に「24÷6」に言及し「24÷6＝」と書いた。「でもねえ」と言い一度消すが、再び「24÷6＝4」と書いた。「式がわからん」と言い、結局これまでかいたものを塗りつぶした。

「間違えて消してしまった」として改めて図をかいた。図３(a)と同じ図をかいた後、これに 6m の部分を加え、さらに全体を 30m として図 15 のような図にした。

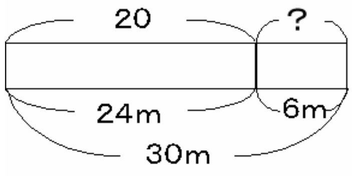


図 15

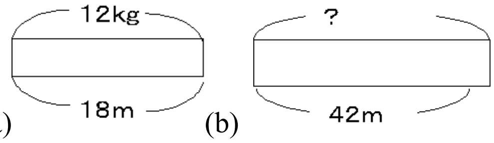
「四六、つまり 20÷4」と言い、24÷6＝4、20÷4＝5、20＋5＝25 と書いた。しかし「でも、この問題がわかんね、確かめ」と発話した。図 15 を見ているが、15 秒ほどして「12m」と言った後、机を数度たたき、24÷6＝4、20÷4＝5、20＋5＝25 の式を塗りつぶしながら「分かっちゃったかも」と発話した。その後、20÷2＝10、24÷2＝12、10÷2＝5、12÷2＝6 と書き、図 15 の「？」「６」を指した。さらに 5+20＝25 と書き、答えの欄に「25kg」と書いた。「分かっちゃった」と発話した。

4.3 合成単位の 1/3 を必要とする問題

問題６（18m12kg の電線 42m の重さ）には、

約９分 30 秒取り組み、答えも間違っていた。

問題文を読み図５をかいた。図 16(a)の後で 18×2＝36、36＋18 の筆算をするが、「違うよ」「何やってんだ僕は」と言い図５(b)をかいた。



(a) (b) 図 16

42÷18 および 18×□の筆算を商や乗数を変えながら数度繰り返し、最終的に 18×2 をして 36m を求める。「36」と書き「18 かける何だ、２か」と言った後 12×2 の筆算をした。そして「36 24」と書いた。これらを塗りつぶすが、すぐにまた 18×2、12×2 を計算し、「36 24」と書いた。

18×2 の筆算と問題文を見直した後、「6m の重さ」と発話した。12÷2 の計算をし、最初「６ｍ６ｇ」と言っていたが、そのうち「８ｍ６ｇ」と発話し、「８ ６」と書いた。また「１ｍが分かれば」とも発話した。18÷2 を計算し、「９ｍだってぇ」と言い「９ ６」に修正した。「だから６を求めて、６ｍの」と言っていたが、「あ、ちょっと待てよ」と言い 18×3＝54、12×3＝36 を計算し、「54 は 36」と発話した。さらに 36－12＝24 と計算した。今の計算のあたりを塗りつぶすまねをしていたが、「42 割る 24」「たぶん 24kg」と言い、答えの欄に「24kg」と書いた。

隣の子が「ヒントははね 18 割る 12」と言うと正人は「１あまり６」と応えた。隣の子がさらに「そのあまったのを、にするんだよ」と言うと、笑顔で体を起こし「いいこと教えてくれた」と発話した。18÷12＝１あまり６の計算をし、あまりの６を指しながら「今６ｍ の重さを求め」「１ｍ６ｇ ですねえ」と発話した。その後「６ｍ」と言いながら「36 24」の記述を見ていたが、36＋6＝42、24＋1＝25 と計算し、答えの欄を「25kg」に修正した。

4.4 合成単位の 1/10 を必要とする問題

問題７（30 本 40g のねじ 63 本の重さ）は、２分ほどで解決できた。まず 30×2＝60、40×2＝80 と書き「60 本で 80」と発話した。60÷3＝20 を計算し「３本は 20g か」と発話した。隣の子との会話の中で「ありえない」とし、「だって 30 本で 40g だもん、３本で 20g とか普通ありえない」「15 本で 20g だよ普通」と説明した。60÷3 の式を塗りつぶすが、その最中に隣の子が「30 本が 3 本ならいいのに」と発話していた。「待てよ待てよ待てよ」「63 本」「30÷10＝3」と言い、30÷10 の筆算をして商 3 を求めた。しかしこの筆算を塗りつぶした。すぐに 40÷の筆算をしかけながら「40÷10 は、3 グラムで 4 だろ」と言い、「３ ４」と書いた。60＋3＝63、80＋4＝84 と書き、答えに「84kg」と書いた。

５．抽出児の学習に見られた特徴

5.1 与えられた単位による全体のノルム化

調査問題１～４の解決(4.1)を見ると、問題に示唆された合成単位と全体とが自然数倍になっている場面については、抽出児は同一量の中での割合、つまりスカラー的推論(Singer *et al*., 1997)を利用して扱うことができるようになったと考えられる。こうした１ではない単位により全体をノルム化(Lamon, 1994)することは、第２時において自然に現れたが、その際図９(b)を見ていた。この図は第１時にかかれた図５や図８と似たものとなっている。つまり、(i)単位と全体とが意識され、それらを関係づけるように矢印がつけられている、(ii)単位と全体とを関係づける乗除の演算が図の中に記入されている、という特徴を持っている。図９が全体の 15 個と同時に(３個:168 円)という単位を示していたことが、この単位による全体のノルム化を促したと考えることができよう(*cf*. Lamon, 1994)。

ただし、こうしたノルム化に比べて、１を単位とした全体のノルム化への信頼の方が強いという面も見られた。(３個 : 168 円)という単位でノルム化をした直後の問題（第３時）で、図 11 のように４個ずつ区切った図をかいていたにも関わらず、卵１個の値段をまず求めていた。また、同じ問題で 136×7 という確かめ方を自分で

発表していたが、その後で１個の値段をもとに 34×28 を計算していた。第４時で最初に問題が提示された時も「１本８g」と発話し、10 本分の重さを考える中でも 36÷30 を計算しているが、これは情報Ｂから１本分の重さを求めようとしたものと思われる。

この傾向は最後まで残った。調査問題２では、４個が何組あるかを求める 28÷4 の式を書きながら、次には１個分を求める 945÷28 を計算した。最初に述べたように、問題１～４では基本的に合成単位により全体をノルム化することを、図などに依らず数値間の関係として扱えるようになっていたにも関わらず、１という単位に頼る面が残っていたことになる。

第３時の最後で、952÷7 が発表されると正人はその筆算をしたが、商が 136 になると予想していなかったり、割り切れた際に「あ、できた」と割り切れることを当然視していなかった様子からも、合成単位による全体のノルム化をすることができても、それが必ずしもすぐに信頼できる方法とはなっていなかった（布川, 2003）ことが伺える。

5.2 除法に対する乗法の優先性

調査問題１ではすぐに 48 個が６個の何倍かを式により求めて解決を終えたのに対し、調査問題２では 5.1 でも触れたように、１個の値段を求めようとした。問題１と問題２はいずれも、全体が問題に示唆された合成単位の何倍になっているかを考え、その関係をもとにして問題１では全体を、問題２では合成単位を求めるものであり、ノルム化という点では類似の思考を要する問題と考えられる。しかし、調査問題１と２に対する正人のアプローチの違いは、類似の思考を要する場面でも、除法的な関係よりも乗法的な関係の方が彼にとって扱いやすいものであったことを示唆している。

こうした傾向は、授業の中でも観察されていた。第１時後半の問題に対し図６をかいた際に、問題で示唆された単位である 1m 分に向かい全体から矢印を出し「÷17」とする以前に、図５と同じように、1m という単位から全体に向けた矢印を出し「×17」としていた。また、第１時後半の問題に典型的に見られるように、除法の問題では図で説明できる場合でも、乗法により確かめを行っていたことからも、乗法が優先的であったことが伺えよう。第３時後半の卵の問題でも、４個ずつの組が７組あることに気づいたと思われる直後に行ったのは、952÷7 ではなく 136×7 の計算であった。

5.3 下位単位の構成に関わる困難

調査問題６（4.3）では、(18m:12kg) という合成単位から (6m:4kg) という下位単位を構成する必要がある。正人は (18m:12kg) から (36m:24kg) を求め、６m の長さを求めればよいことを見出すとともに、(9m:6kg) という下位単位は構成できた。しかしその後は、12×3＝36 で求めた 36 を用いて 36－12＝24 とし、24kg を答えとして書いた。また隣の子から“ヒント”をもらった後では、18÷12＝１あまり６を計算し、６m の重さを１kg として答えを 25kg に修正して解決を終えた。つまり、適切な下位単位を構成することはできなかった。

(18m:12kg) から６m の重さを求めることは、調査問題４で (72m:882g) から８m の重さを求めることと、問題の構造としては同一である。むしろ 18÷6 が 72÷8 より容易であろうことを考えると、問題４を実質 30 秒ほどで解決した正人が問題６で６m の重さを求められなかったことは、類似の思考を要するとしても、下位単位を構成するという活動としては困難度が増すことを示唆している。

確かに調査問題５（4.2）や調査問題７（4.4）では適切な下位単位を構成することができていた。ただしそれらは、特別なタイプの下位単位となっている。問題７では問題に示された合成単位を 1/10 倍して構成されるものであった。×10、÷10 は３年生の教科書で特化して取り上げており、また４年生のわり算の学習に関わり用いられてきた。隣の子の「30 本が３本ならいいのに」という発話を受け、これが想起された可能

性がある。また問題５では、(24m:20kg)から(6m:5kg)という単位を構成できているように見える。しかし、一度書いた24÷6＝4を消すということが見られたり、図15の後で24÷6＝4、20÷4＝5をもとに答えを求めた際にも、解決できたという様子ではなく、「この問題がわかんね、確かめ」として解決を続けたりした。結局、24÷6＝4、20÷4＝5を消し、(12m:10kg)を計算し、そこから(6m:5kg)を計算して答えを求め、ようやく「分かっちゃった」と発話した。ここでは半分に分ける操作 (halving)が２度用いられている。つまり、半分に分ける操作で処理できる場合には下位単位が構成できたことになる。

実は同様の傾向は授業の中でも見られていた。第４時の問題で情報Ｂを用いて解決を行う際、10本分の重さが必要となった際に正人は、それ以前に全体の話し合いで求められていた(100本:120g)を用いて、120÷10として(10本:12g)という下位単位を構成できていた。また第４時で情報Ｃを用いて解決を行う際には、(40本:48g)から比較的容易に48÷2として(20本:24g)を構成していた。このとき図13がかかれたが、下位単位の部分は直前に授業で取り上げられた図３のような表現ではなく、(40本:48g)の板を２つに分け、(20本:24g)を２枚作るという表現になっており、図の上でも半分に分ける操作が前面に出たものとなっていた。子どもにとっては半分に分ける操作が優先的なものであることが指摘されている(Misailidou & Williams, 2003; Pothier & Sawada, 1983)が、正人の解決もこの傾向に沿うものとなっていたことになる。

これに対し、第４時で情報Ｂ (30本:36g)から(10本:12g)を構成する部分については、12×3＝36 にピンと来た人と言われ挙手しかけた手を下ろしていた。指名され発言した際には「何て言うんだろ、36÷3、かな」「なんか汗出てきた」と言い、次の子が36を３つに分けるという説明をして、ようやく「今頃整理できた」と発話した。このように、容易にはこの構成が理解しきれなかった様子がうかがえる。

以上のことより、10倍や半分をもとにした以外の下位単位の構成、具体的には今回の調査で言えば３倍の関係を要する場合では、正人は下位単位の構成にある程度の困難を示していたと言えよう。また半分をもとにした場合でも、図12がかけたにも関わらず、下位単位の構成を図３ではなく図13のように表現したり、あるいは調査問題５で４倍の関係を求める式 24÷6＝4を２度も消したりしたことに見られるように、下位単位の構成は必ずしも倍の関係をもとにしていたとは言いきれない。

下位単位を構成する際の困難は別の形でも現れていた。第４時の情報Ｃ (40本:48g)を用いる場面で、100÷40＝2あまり20とした後、「半端出しても、116、４足りね」と発話した。これは、48×2＝96の答えにあまりの20をたしたものと考えられる。重さの96と本数の20をたすこと、つまり量の混同が見られた。情報Ｂ(30本:36g)に関わっても、100÷30＝3あまり10を求めた後、「118、あなんかわかんね」と発話していたが、これも36×3＝108の答えにあまりの10を加えたものと考えられる。第４時途中の休憩時間に観察者が30×4の式の30を問うた際には、図12の30本分を示す長方形を指したことも、同様の量の混同と捉えることもできる。

下位単位を構成する際の量の混同は調査問題においても見られた。5.3冒頭で述べたように、問題６の解決の最後では、(18m:12kg)に対し18÷12を計算し、得られた「１あまり６」から「６ｍの重さは１kg」と判断していた。問題７の解決では、(30本:40g)から(60本:80g)を構成した後、60÷3＝20を計算して「３本は20gか」と発話していた。これは60本に対する３本の割合を求めながら、得られた結果を３本の重さとして捉えているものと考えられる。

なお、以上述べてきた下位単位の構成に見られる困難は、5.2で述べた除法に対する乗法の優先性とも関連すると思われる。下位単位は問題に示唆された単位から除法的な関係によって構成する必要があり、除法的に直接関係を捉え

にくいことは、そうした過程に負の影響を与える可能性があるからである。

６．抽出児の学習からの授業改善への示唆

本稿で議論してきた授業は、高学年への橋渡しとなるような比例的推論の学習を目指してデザインされたものであった。抽出児の学習の分析から得られた学習の特徴をもとに、授業の目標に関わって授業を改善するために、本節では「その子の論理に沿いながら理解を変容させていく可能性を探る」(布川, 2005b)ことを試みる。

前節で見てきたように、今回の授業を通して抽出児は、提示された合成単位により全体をノルム化することができるようになっていった(5.1)。ただし、除法的な関係に比べて乗法的な関係により信頼を置く傾向がある(5.2)ことども相俟って、提示された単位から下位単位を構成する過程では、比例的推論をもとにした考え方ができにくい様子を示した (5.3)。

高学年への橋渡しとなるような比例的推論の学習という今回の授業の目標からみたときに、下位単位の構成過程を意識できることは重要な要素であると考えられる。例えば、調査問題６でとりあえず 42m の重さを知るためであれば、６m の重さが何グラムかが最終的に求められればよい。しかし、小数倍や分数倍への拡張を視野に入れた場合には、第４時のまとめの際に注意を払ったように、42m の重さを求めるに必要とされた６m 分の重さと、もとから示されていた単位との関係に注意が向けられる必要がある。このことを Lamon (1994)の表記を用いて表すと次のようになる。

(a) (42m : 28kg)＝(18m : 12kg)×２＋(6m : 4kg)
(b) (42m : 28kg)＝(18m : 12kg)×2
＋(18m : 12kg)×(1/3)
(c) (42m : 28kg)＝(18m : 12kg)×(2+1/3)

小数倍、分数倍(c)に拡張するためには(a)から(b)へ移行することが必要になると考えられる。

さらに、倍を２量の関係とし数学的対象としていくことを考えた場合、Sfard (1995)の数学的知識の二重性が成立する過程によれば、操作的な理解から出発することが考えられる。下位単位を構成する操作を含む(b)のようなとらえ方が内面化、圧縮化することを経て、倍という関係自体が実体化することが想定され、その途中の段階では、関係を即座に把握すること(subitize)が求められると考えられる。しかしその出発点は、下位単位を意識的、意図的に構成する過程であろう。先の例で、42ｍや６ｍの重さ自体よりも、(18m : 12kg)という単位から(42m : 28kg)を構成する過程自体に注意が向けられる局面が一層重要であると考えられる。

子どもの学習の様相と授業の目標との双方を視野に入れて以上のように考察をしてくると、授業を改善するための一つの可能性として、倍の関係に基づく下位単位の構成過程を、子どもたちが自分たちの持っている知識により意味づけながら、同時にそれを意識的、意図的に行えるようになることに資する活動を、一連の授業の中に組み込んでいくことが考えられる。今回の授業における抽出児の学習を考慮したときに、２つの可能性が考えられる。

5.3 で触れたように、正人は半分にする操作にはかなりの信頼を置いていた。調査問題５では半分の半分の操作を行うことで 1/4 を作り出していた。Pothier & Sawada (1983)は、与えられた領域の分割において、子どもは半分にすること、次いで 2^n 個への分割をまず獲得し、その後、それらの分割を利用しながら偶数個、奇数個の分割へと発展していくと述べている。また布川(2005a)は、目標を緩和した問題により領域固有なスキーマの獲得が促されるという Owen & Sweller (1985)の知見に基づき、１つのもとにする量に対し様々な割合を考える課題の重要性を指摘した。これらを考慮して、下位単位を構成する過程を意識しやすい活動を想定するならば、１つの所与の合成単位をもとにして、半分にする操作を生かしながらも、様々な下位単位を構成する活動を設定することが想定される。

実際、調査問題７の解決の途中において（30

本：40g)という単位に対し、(60 本：80g)を見出した後に 60÷3＝20 を計算し、「３本は 20g か」と発話した際には、すぐに「30 本で 40g だもん」「15 本で 20g だよ普通」として考えを修正することができた。ここでは、信頼できる半分にする操作が倍に基づく考えを支えていた、と言えよう。一方で、調査問題５の解決では、半分の半分を考えることで「分かっちゃった」としながらも、倍に基づく 24÷6＝4、20÷4＝5 の式を消してしまっている。つまり、両者が結びつく可能性を持ちながら、しかし自動的に接続されるものではないことを、正人の解決過程は示していると言えよう。調査問題６では 1/3 が必要とされる場面でありながら、半分の操作に依存し、(18m：12kg)から(9m：6kg)を求めて行き詰まった。上述のような活動で、半分の操作に反射的に訴えるのではなく、多様な倍の関係を意識的、意図的に使えるようになることは、こうした困難を解消するものと考えられる。

下位単位の構成過程を意識的、意図的に行えるようになるための活動のもう一つの可能性は、構成過程を表現し、そこに操作を加えていくことであると考えられる。調査問題６では適切な下位単位が構成できず、調査問題５では構成が倍の関係と結びついていなかった。それらの解決でかかれた図（図 15、図 16）と、倍の関係が意識できた解決でかかれた図（図９、図 11）を比べてみると、後者では倍の関係で結ばれる２組の量が図の中でも関係づけられているのに対し、図 15 では２組の量は並列されているのに過ぎないし、図 16 では１組の量は表現もされていない。さらに図 11 を見ると、１個の値段を求めて解決していたにもかかわらず、４個という単位で 28 個をノルム化するという働きかけが見られる。

第４時のまとめの部分では、下位単位の構成過程を図３のようにまとめた上で、さらに(100 本：120g)＝(30 本：36g)×3＋(10 本：12g)、および(100 本：120g)＝(40 本：48g)×2＋(20 本：24g)という関係を図１と同様の図で表現した。その際に正人は「３個と 0.1 個」「３分の１」「２分の１」と、所与の合成単位と下位単位との関係を示す言葉を、教師の意図を越えて発話していた。これは、下位単位の構成過程や下位単位を含む関係が外的に表現されれば、所与の単位と下位単位の関係をかなりの程度把握しうるものであることを示唆している。

７．おわりに

本稿では高学年への橋渡しとなるような比例的推論の学習を中学年で行うための授業の可能性を、抽出児の学習の様相をもとに吟味してきた。その結果、除法的な倍関係について４年生でも授業が可能であるが、これと同様の関係を持つはずの下位単位の構成に関わっては、その構成過程が意識化されにくいことが示された。また、下位単位の構成を意識的、意図的に行えることにつながる活動についても考察したが、下位単位の構成過程を含め、所与の単位から別の量を構成する過程自体を意識化するような活動へと拡張することも検討する必要があろう。

謝辞：調査にあたりご協力頂きました上越教育大学学校教育学部附属小学校の先生方に感謝申し上げます。本研究は平成 14～16 年度科学研究費補助金・基盤研究(C)（課題番号 14580186)の支援を受けて行われた。

註および引用・参考文献

1）調査の授業は以下のメンバーにより実施された：中村光一、布川和彦（上越教育大学）; 林克巳（上越教育大学附属小学校）; 市川啓、白石信子、浦原卓也、大関聡、小池徳男、山本晋平、五十嵐真（上越教育大学大学院生）; 五十嵐望美、佐藤恵、清水則仁（上越教育大学学部生)。授業者には市川と白石がなり、授業は授業者の２名と中村、布川が中心となり立案し、メンバーで検討した。各授業の後でメンバーによりミーティングを持ち、報告された子どもの学習の様子を参考にして次時の修正を行った。

馬場雅史. (2005). 小数の乗法における意味の構

成に関する研究. 日本数学教育学会誌, *87* (4), 3-11.

Gravemeijer, K. (1997). Mediating between concrete and abstract. In T. Nunes & P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics: An international perspective* (pp. 315-345). East Sussex, UK: Psychology Press.

Greer, B. (2004). The growth of mathematics through conceptual restructuring. *Learning and Instruction*, *14*, 541-548.

Kenney, P. A., Lindquist, M. M., & Heffernan, C. L. (2002). Betterflies and caterpillars: Multiplicative and proportional reasoning in the early grades. In B. Litwiller & G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (pp. 87-99). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lamon, S. J. (1994). Ratio and proportion: cognitive foundation in unitizing and norming. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 89-120). Albany, NY: State University of New York Press.

Misailidou, C. & Williams, J. (2003). Diagnostic assessment of children's proportional reasoning. *Journal of Mathematical Behavior*, *22*, 335-368.

Merenluoto, K. & Lehtinen, E. (2004). Number concept and conceptual change: Towards a systemic model of the processes of change. *Learning and Instruction*, *14*, 519-534.

布川和彦. (2003). 有効な迂回路としての算数・数学. 上越数学教育研究会Σ会 (編), 今こそ Do Math!(pp. 25-34). 上越数学教育研究会.

布川和彦. (2005a). 子どもの学習過程に基づく支援の構想:5年生「割合」単元における学習過程の分析を通して. 上越数学教育研究, *20*, 11-20.

布川和彦. (2005b). 問題解決の研究と学習過程の探求:学習過程臨床という視点に向けて. 日本数学教育学会誌, *87* (4), 22-34.

Nunokawa, K. (2005). Mathematical problem solving and learning mathematics: What we expect students to obtain. *Journal of Mathematical Behavior, 24,* 325-340 .

大谷　実. (2002). 初等・中等教育段階の接続性を持つ数学的活動カリキュラムの開発と評価. 平成 11～13 年度科学研究費補助金(基盤研究C(2))成果報告書.

Owen, E. & Sweller, J. (1985). What do students learn while solving mathematics problems? *Journal of Educational Psychology*, *77* (3), 272-284.

Pothier, Y. & Sawada, D. (1983). Partitioning: The emergence of rational number ideas in young children. *Journal for Research in Mathematics Education*, *14* (5), 307-317.

Sfard, A. (1995). The development of algebra. *Journal of Mathematical Behavior*, *14*, 15-39.

Singer, J. A., Kohn, A. S., & Resnick, L. B. (1997). Knowing about proportions in different contexts. In T. Nunes & P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics: An international perspective* (pp. 115-132). East Sussex, UK: Psychology Press.

白石信子. (2005). 子どもの理解に基づいた小数のわりざんの指導について：数直線への比例的な見方を通した意味の拡張. 上越数学教育研究, *20*, 153-162.

高橋久誠. (2000). 小数の乗法の授業構成に関する考察:比例の考えをもとにして. 上越数学教育研究, *15*, 85-94.

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2005). Not everything is proportional: Effects of age and problem type on propensities for over- generalization. *Cognition and Instruction*, *23* (1), 57-86.

Vergnaud, G.. (1997). The nature of mathematical concepts. In T. Nunes & P. Bryant (Eds.), Learning and teaching mathematics: An international perspective (pp. 5-28). East Sussex, UK: Psychology Press.