

# 小学校3年生による比例的推論の課題の解決

—下位単位の利用に焦点を当てて—

布川 和彦  
学習臨床講座

## 1. はじめに

比例的推論は、小学校の多くの学習内容において、前提となる考え方として明示的あるいは暗黙的に用いられている。教科書を見ても、倍など比例的推論に関わる学習を、特設ページのような形で適宜取り入れている。しかし、個々の子どもの学習過程に着目すると、学習内容の理解を確かなものとするために、比例的推論を利用することができないことも報告されてきている (e.g. 布川, 2005; 白石, 2006)。

ここから、小学校2年生でかけ算の学習の中で倍が導入されて以降、比例的推論を意識的に利用できるようになるための経験を、算数の学習の中に取り入れることが1つの可能性として考えられる。こうした問題意識に基づき、布川 (2006)は小学校4年生に対して比例的推論に焦点を当てた授業を実施し、その授業に参加した抽出児童の学習過程を分析している。その結果、問題に示唆された(3個:168円)といった合成単位と全体とが自然数倍になっている場面について、4年生の児童がこうした1ではない単位により全体をノルム化(Lamon, 1994)することができる一方で、10倍や半分に基づかない下位単位の構成、例えば1/3倍の関係を要する場合には、下位単位の構成に困難を示す、と述べている。

こうした4年生の児童の学習過程を考慮したときに、下位単位の構成とその利用の過程をさらに調べることで、あるいはその過程を支援する活動を開発することが必要となる。本稿は、より年少である小学校3年生に対する比例的推論

の授業に参加した児童が、比例的推論の課題を解決する過程を、特に下位単位の構成の部分に焦点を当てて考察を加えることで、上述の過程に関わる知見を得ようとするものである。

## 2. 調査の方法

### 2.1 データの収集

調査の授業は小学校3年生の3月に実施された。60分の授業を3回、30分の筆記調査を1回行った<sup>1)</sup>。授業に際し、教室の後方から教師や黒板で発表する子どもの様子を、前方から子どもたち全体の様子をビデオで記録した。また、担任教師との相談により決定した5名の抽出児童について、1台ずつのビデオカメラによりそれぞれの子どもの学習過程を継時的に記録した。

### 2.2 授業の概要

第1時は次の問題を扱った:「2本で90円のジュースがあります。このジュースが6本だと、いくらになるでしょうか」。各自による解決の途中で $90 \times 6$ と $90 \times 3$ とする子どもの考えを紹介し、どちらになるのかに注意を向けた。話し合いでは、2本ずつのまとまりを3組かいた図が複数の子から出された。それらの図との対応を付けながら紙の帯を1枚ずつ貼るようにして、教師が以下のような図を導入した。また「2つ

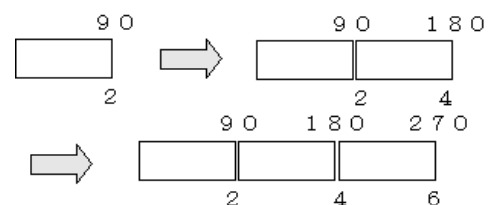


図1

ずつのかたまり」が「3パック」であるなどと言葉でもまとめた。次に「ジュースが24本だといくらになるでしょう」という問いを追加した。これを各自で解決して第1時を終了した。

第2時では24本の問いを各自でさらに考えた後、話し合いを行った。2本ずつのまとまりを12組かいた図、それに基づく $90 \times 12$ という考えが出された。これを受け教師は丸を24個並べた図を提示し、まず児童に2個ずつ囲む活動をさせた。さらにそれぞれについていくらになるかを子どもとやりとりをしながら書き込んでいった(図2)。ここから「2本入りのふくろが12こで、 $90 \times 12 = 1080$ 」とまとめ板書した。

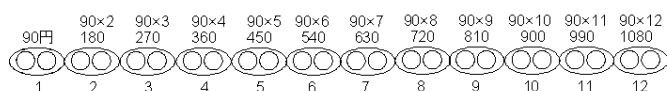


図2

24個の丸を4個ずつ囲んだ子と6個ずつ囲んだ子が図2と同様の図を黒板で発表した。他の子にはこれらの考えを「2本入りのふくろが○こで、 $\square \times \square = 1080$ 」の形にまとめることを考えさせた。

第3時は次の問題を扱った：「3こで29円のチョコがあります。このチョコ12こでは、いくらでしょう」。プリントには丸を12個並べた図を添えたが、子どもからは3個ずつを囲み、 $29 \times 4$ とする考えが出された。教師は図2と同様の図をかき、「3こ入りのふくろが4ふくろなので $29 \times 4 = 116$ 円」とまとめた。続けて「8個で220円のみかんがあります。このみかん32個だといくらになりますか」という問題が扱われ、同様の考えが出された。

後半ではみかんの問題で12個のときの値段と10個のときの値段を考えるプリントが配られた。12個のときの値段については、子どもからは、4個の値段は半分の110円なので $220 + 110$ とする考えが出された。また別の子は $8 \div 4 = 2$ 、 $220 \div 2 = 110$ とする考えを発表した。教師は丸を8個書いた紙を半分に折り、その片方を切り取り、図2と同様の図の4個分にあたる箇所の下に貼る操作を演示した(図3)。10個のとき

の値段を考える問いについては、8個を4つに分けたものが55円になるので $220 + 55$ とする考えが出された。教師は丸を8個書いた紙を半分に折り、さらにもう一度半分に折った上で2個分を切り取り、図2と同様の図の2個分にあたる箇所の下に貼った(図3)。その図をもとに $220 + 55$ で値段が求まることを確認し、授業を終えた。

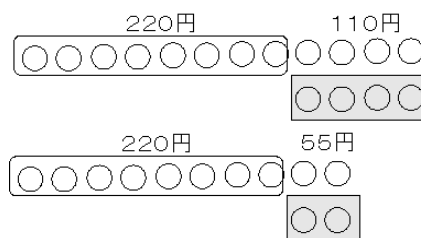


図3

### 3. 抽出児の学習の様相

本節では抽出児のうち、靖史、瑞穂、達也、絵美(いずれも仮名)の解決に焦点を当て、彼らの下位単位の構成の様相を考察していく。布川(2006)の結果から、元の合成単位の $1/3$ の下位単位を構成する問題の解決で児童の困難が現れると予想されるが、実際、この4名中2名は適切な単位を構成できなかった。そこで、以下では、この下位単位を構成できた児童とできなかった児童の解決過程を、他の下位単位(元の単位の $1/2$ あるいは $1/4$ )を要する問題の解決過程も参照しながら比較し考察していく。

前節で述べたように3回の授業の後、第4時として各自で問題を解いてもらう30分の授業を行った。問題のうち、第7問と第8問はそれぞれ次のような問題であった。

第7問：12本で280円のえんぴつがあります。

このえんぴつ15本では、いくらでしょう。

第8問：9こで390円のアイスがあります。こ

のアイス12こでは、いくらでしょう。

第7問では(12本：280円)という与えられた合成単位から、(3本：70円)という下位単位を構成することが期待されていた。ここではもとの単位の $1/4$ を考えねばならないが、布川(2006)などの結果より、半分の半分として考え

る方がわかりやすい子もいると予想される。前節で述べたように第3時では半分の半分という扱いを取り上げていた。これに対し、第8問では(9こ:390円)の合成単位から、(3こ:130円)という下位単位を構成することが必要となる。なお、 $280 \div 4$ 、 $390 \div 3$ は3年生の段階では学習をしていないのでもちろん筆算により求めることを期待したものではなく、硬貨などをイメージした上で、4等分や3等分、あるいは半分の半分をすることで求めることが可能ではないかと期待をして出題をすることにした。

本節で取り上げる4名の児童については、第7問において靖史、瑞穂、達也の3名が答えを求めることができた。残る絵美も280円の半分の半分を求めることがほぼできたが、後述するように最後のところで計算間違いをした。第8問では、靖史、瑞穂は答えを求めることができたが、達也と絵美の解決ではもとの合成単位の1/3というアイデアが見られなかった。

### 3.1 靖史の解決

第7問ではすぐに $12 \div 4 = 3$ 、 $15 \div 3 = 5$ 、 $280 \div 4 = 70$ と書く。 $280 \div 4$ は筆算を用いていた。「そう考えればいいのか」「図でいうと」と言い、図4をかいた。しかし、「考えたら全て違うじゃん」と言い、今までの式と図を全て消した。

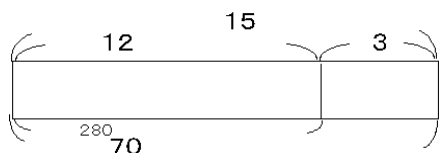


図4

次に $12 \times 15 = 180$ の筆算をするが、その後はプリントを見て「あってんの」「おかしいな」「やっぱあった」と発話した。新しいプリントをもらおうと $12 \div 4 = 3$ 、 $15 \div 3 = 5$ と書き、さらに $280 \times 5 = 1400$ を計算した。ここで図5をかいた。

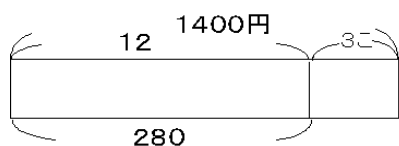


図5

しかし直後に $280 \times 5 = 1400$ を消し、図中の1400も横線で消した。「280は、割るがあるんだ」と

言い、 $280 \div 4 = 70$ 、 $70 \times 5 = 350$ と書いた。図5を図6のように修正した。

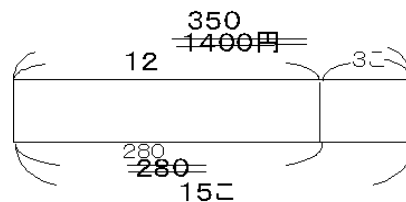


図6

第8問では、すぐに $9 \div 3 = 3$ 、 $12 \div 3 = 4$ 、 $390 \div 3 = 130$ と書いた。 $390 \div 3$ は筆算で行った。さらに $130 \times 4 = 520$ と求め、図7をかいた。

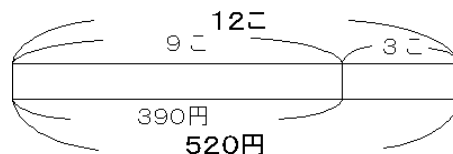


図7

観察者が右側を指し「ここは」と尋ねると、少し間があってから $520 - 390$ を計算し130と求め、右側の長方形の下に130と書き入れた。

### 3.2 瑞穂の解決

第7問ではすぐに図8の外枠と12本の縦線、3本の棒をかいた。図の横に $140 + 140$ の筆算をし、280と求めた。上の縦線6本、下の縦線6本を鉛筆で押さえながら数えた。再度数えるが、今度は3本の棒も数え、棒の部分の横にある空白の囲みを加えた。筆算の140から矢印を出し、「6本」と書いた。140から別の矢印を出し、その先で $70 \times 2$ の筆算をし、棒の部分の下に「70」と書き丸で囲んだ。

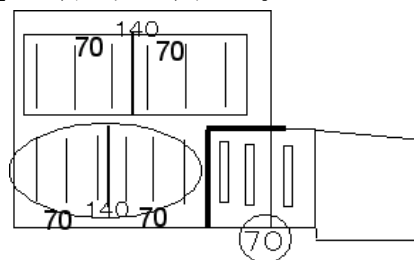


図8

上の縦線6本、下の縦線6本をそれぞれ囲み、囲みの中央上あるいは中央下に「140」と記入した。さらに各囲みの中央に縦線を入れ、分けられたそれぞれの部分に「70」と書いた。図の下に $70 \times 5 = 350$ と書き、答えを350円とした。

第8問では、最初に $12 \div 9 =$ と書くが、すぐにこれを消した。図9のうち、外枠、外枠上部

中央の「390 円」、中の9つの長方形、右下の囲みとその中の3本の棒、右側の3つの長方形を区切るような縦線をかいた。

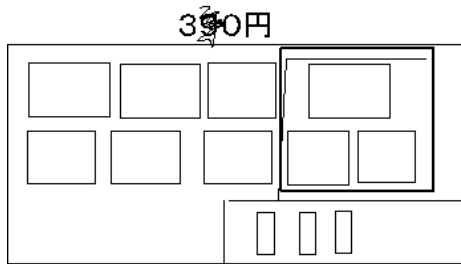


図 9

「390 円」から矢印を出し、その先に  $150 + 150$  の筆算をして 300 と求めた。その 300 の下に 90 と書き、筆算のように横線を引くが、そこで止まった。枠内の長方形を鉛筆で押さえたり、それらを区切るように鉛筆を動かしたりしていたが、今の筆算を全て消した。そして、図の下に  $390 \div 3$  と書いた。その後、 $27 + 3$ ,  $30 + 3 + 3$ ,  $11 \times 3$  を筆算により計算していたが、 $390 \div 3 = 13$  と書いた。少し間があって、13 の後に 0 をつけ 130 とした。図 9 の右側の 3 つの長方形を図のように四角で囲んだ。プリントの右下に  $130 + 130 + 130$  を計算し、390 と求めた。

ここで図 10 の上 3 段の長方形とそこから出る線をかき、その線の先に「39」と書いたがすぐにこれを消した。図 9 の長方形のうち上段 3 番目、下段 2 番目、上段 4 番目、及び右下の棒

の 3 番目を指で押さえた。このとき「1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4 個」と発話した。図 10 の 4 番目の長方形を加え、線の先で  $130 \times 4$  の筆算を行い、520 と求めて答えを 520 円とした。

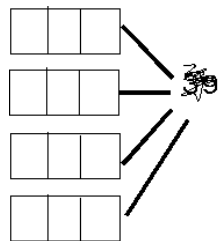


図 10

### 3.3 達也の解決

第 7 問では 20 秒ほどして  $280 \div 2 = 140$ ,  $140 \div 2 = 70$  と書いた。さらに  $280 + 70 = 350$  と書き、答えを 350 円とした。1 分ほどで解決を終えた。

第 8 問では、すぐに  $390 \div 2 =$  と書き、 $390 \div 2$  の筆算を途中までするが、その筆算は途中のまま消した。 $190 \times 2$  を筆算で 380 と求め、それ

を微調整して  $195 \times 2$  とし 390 と求めた。この 195 を  $390 \div 2$  の答えとした。40 秒ほど間があったから  $195 \div 2 =$  と書き、筆算をして 97 あまり 1 と求めた。さらに  $97 \times 2 = 194$  の筆算を行った。97 を 96 や 98 に変えて筆算をするが、結局「だめだなあ」と発話し、 $195 \div 2 = 97$  とした。同時に今までの筆算に縦線を引いて消した。 $390 + 97 = 487$  と書き、その下に「487 円？」と書いた。ここで図 11 をかいた<sup>2)</sup>。まず四角を 9 個かき、プラス記号を書いてからさらに四角を 3 つかいた。次に上段中央と下段左端に縦線を引いた。

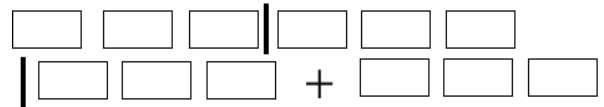


図 11

すぐに「まあ、いいかな」と言い、「487 円？」の疑問符にバツをつけ、解決を終えた。

### 3.4 絵美の解決

第 7 問では、すぐに図 12 をかいた。12 個の丸をかき、これを大きな楕円で囲んだ。さらにその右に 3 つの丸をかいた。

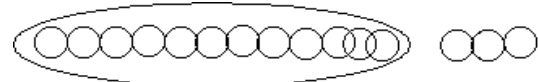


図 12

この図の下に図 13 のように数が枝分かれしたものを書いた。 $140 \times 2$  を筆算で計算し、280 と求めた。その後、図 14 のように、140 から始まる別の枝分かれしたものを書いた。この図の

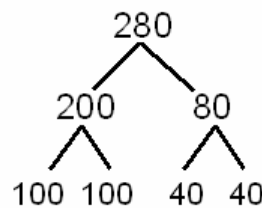


図 13

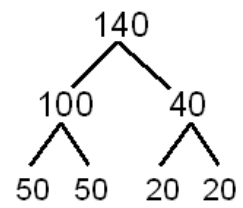


図 14

左に  $52 + 52 = 104$  の筆算をした。図 12 の下に「式  $280 + 52$ 」「答え 332 円」と書いた。 $280 + 52$  の筆算を改めて行ってから解決を終えた。

第 8 問では、最初に次の図をかいた。

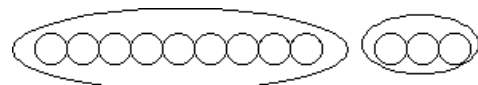


図 15

図の下に 9 から枝分かれしたものを書き、さ

らに 390 から枝分かれしたものをかいた(図 17)。

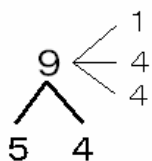


図 16

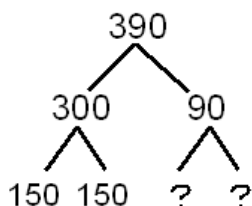


図 17

150+90=240 を計算した後、時々メモのようなものをかきながら 2 分近く明確な動きがなかった。メモの中には「3？」があったが、再度 3 と書くと、今度はその上に 240 と書いた。240+240 の筆算をして 480 と求めた。図 17 の左に 150+40=190 を計算し、さらに 190×2=380 や 150+50=200 の筆算を行った。50 から枝分かれの線を出したもの、また 40 から 20 と 20 に枝分かれしたものを書いた。ここで新しいプリントを受け取った。

新しいプリントに「式 × = 」 「答え円」と書くが、すぐに前のプリントを見始めた。

新しいプリントに 12 を 6 と 6 に枝分かれしたものを書き、150+6=156 を計算した。12 から枝分かれしたものをさらに続けて、図 18 のようにした。

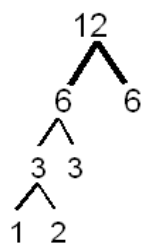


図 18

少し間があった後、12 から枝を出したもの、390 から枝を出したものを書くが、12 からの枝の先には 6 と 6、390 からの枝の先には 300 と 90 を非常に薄い字で書いた。観察者が図を見直してみたらどうかと介入したが、特に図を見直すことはせず、150+4=154 の筆算をした。

再び 390 から枝分かれしたものを書く(図 19)。少し間があったから、150+300=450 の筆算をした。さらに 150

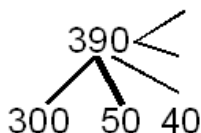


図 19

+50 の筆算を途中までやり、その後これを塗りつぶした。この時点でプリントを集めるという指示があり、解決を終えた。

#### 4. 抽出児における下位単位の構成

本節では 1/3 の下位単位を構成する問題で答えを求めることのできた靖史および瑞穂と、答えを求めることができなかった達也および絵美の解決とを比較してみることにする。

##### 4.1 解決できた児童の下位単位の構成

第 8 問の解決において、瑞穂は答えを求めることができたが、靖史のようにすぐに答えに到達できたわけではなかった。彼女の解決では、以前の解決の仕方そのまま応用しようとして失敗し、それを修正することによって解決に向かった様子が見られる。瑞穂は最初に 12÷9 を計算しようとしているが、これは第 1 時から第 3 時の前半まで扱われ、第 4 時の第 1～5 問にも現れた、所与の合成単位で全体をノルム化できるタイプの問題についての解決の影響と考えられる。例えば、第 5 問の 3 個 80 円の納豆 42 個の値段を求める問題では、瑞穂はすぐに 42÷3 を書いている。これを第 8 問に適用すれば 12÷9 となる。

瑞穂はその式ではノルム化ができないことに気づくと、図 9 のような図をかいている。またこの図では 9 個と、12 個にするために必要な 3 個とがかかっているだけでなく、9 個の値段である 390 円も図の上部に書かれていた。つまり、所与の合成単位の 2 つの要素が図の中に現れていたことになる。

瑞穂はその後、390 円から出した矢印の先に 150+150 を計算していたが、これも半分を考える問題の影響と言えよう。実際、第 7 問で 280 円の半分の半分を求める際に、まず 140+140 の計算により 280 の半分が 140 であることを確定していた。しかし、この方向での考えを中断した際には、図の枠内にある長方形を鉛筆で押さえたり、それらを区切るように鉛筆を動かしたりしていた。つまり、ここでも、以前の方法の適用に問題が出た際には図の上で考えることが行われていた。また、鉛筆を動かしていた直後に 390÷3 の式を書いたことから、図の上で長方形の区切り方を考えたことが 1/3 の下位単位

を構成する可能性を示唆したものと考えることができよう。図 10 は 3 個により下位単位で全体をノルム化することを明確化したものであるが、上 3 段を書いた後、図 9 の長方形のうちの 3 つと右下の棒の 1 つを指で押さえ「1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4 個」と発話したことも、瑞穂が図 9 における区切りを下位単位を構成する際の拠り所にしていただことを示している。

$390 \div 3$  が 130 となることを見出した後で、図 9 の右側の 3 つの長方形を図のように四角で囲んでいるが、これは(3こ:130円)という下位単位を意識したものと言えよう。この 3 つの長方形を四角で囲んだことにより、もとの 9 個の中にある 3 個という単位が明確にされることにもなっている。

瑞穂の第 7 問に対する解決を見ても、同様の傾向が認められる。図 8 の上段 6 本、下段 6 本の縦線と右下にかかれた 3 本の棒を対比させて数えていく中で、6 本のまとまりをさらに 2 等分して(3本:70円)という下位単位を構成する可能性に気づいていった、と考えることができよう。第 8 問と同様、図の上で考えていくことで必要な下位単位の構成に気づいている。しかもそこで気づいたことを図の上にかき入れることにより、元の単位の分割により下位単位が構成される様子が表現されることにもなっている。また第 8 問と同様、図の中に本数だけでなく対応する値段も記入されているが、第 7 問の方が第 8 問よりも詳細に記入されている。

靖史の場合には、第 8 問ですぐに  $9 \div 3 = 3$ ,  $12 \div 3 = 4$ ,  $390 \div 3 = 130$  と書き、 $130 \times 4 = 520$  と求めた後になって図をかいていることから、図が解決にあまり寄与していないように見える。しかし、第 7 問の解決を見ると図をかき直したり、修正したりしており、図が解決の助けになっていたことがわかる。また第 6 問と第 7 問で下位単位を構成する際に、所与の合成単位の構成要素のうち、値段の方を等分しないという誤りをおかしていたが、第 8 問ではこの誤りをおかしていない。第 6 問と第 7 問で図を用いて考える

中で、下位単位の構成の仕方がより意識的に行われるようになったものと考えられる。

第 7 問に対する靖史の解決を見てみると、すぐに  $12 \div 4 = 3$  を計算しているが、このときの 3 は  $15 \div 12$  のあまりとして見出されている。実際、第 3 時でのみかん 12 個の値段を求める問題で、靖史はすぐに  $12 \div 8$  が割り切れないと発話し、またこれを「4 余る」と表現していた。 $15 \div 3$ ,  $280 \div 4 = 70$  と書いており、すでに解決がほぼできているように見える。しかし、図をかく中で「全て違う」とし、式や図を全て消したことからすると、この時点では問題場面の全体が十分理解されていなかったと考えられる。 $280 \div 4$  により求めた 70 が図 4 で全体の値段に当たる箇所に書かれていること、図を消した直後に  $12 \times 15 = 180$  と本数どうしのかけ算をしていることは、理解の不十分さを示している。図 4 をかく際、本数の 3, 12, 15 を記入し、次に値段の 70, 280 を記入したところで考え込み、その後、式や図を消していた。また最初に  $12 \div 4 = 3$  の式を消しており、図の中で 70 と 280 の関係が整合しないことが、それまでの考え方全体を見直す契機になったと言える。

図を消して見直した後では、 $12 \div 4 = 3$ ,  $15 \div 3 = 5$  と再度書いた上で、さらに  $280 \times 5 = 1400$  を計算している。ここでは上述したように、所与の合成単位の構成要素のうち、値段の方を等分しないという誤りをおかしている。しかし、これを図 5 のように表した直後に  $280 \times 1400$  を消していることから、ここでも図をかいたことで、280 円と 1400 円の関係の整合性がとれないことに気づき、考えを修正できたものと考えられる。

第 8 問の最後に観察者が右側の部分について尋ねた際に、すぐに答えられず、また結局  $390 \div 3$  ではなく  $520 - 390$  により 130 と求めたことは、「余る」という考えを基に構成した下位単位が、図示された関係の中で十分意識されていなかったことを示している。しかし、計算で求めたことを図で視覚化することにより、与えられ

た条件や求めたことの整合性を確認し、その中で考えの誤りを自分で修正することができると言える。第7時では図の方も書き直したり、修正をしたりしており、瑞穂と同様、ある種の図との相互作用が見られる(cf. Nunokawa, 2006)。さらに靖史の図では、瑞穂の第7問の図と同様、本数や個数とそれらの値段の双方が記入されており、自分で求めた数値も書かれている。こうした図の特徴が、上のような整合性の確認を支えたものと考えられる。

#### 4.2 解決できなかった児童の下位単位の構成

達也は第7問では特に図をかくこともなく、280の半分の半分を求め、それを12本の値段に加えることで15本の値段を容易に求めている。所与の合成単位の $\frac{1}{3}$ が必要となる第8問でも、達也は半分の半分を求め、それを与えられた9個の値段に加えることで答えを求めた。彼はこのやり方で487円という答えを求めた際にはその後ろに疑問符を付けており、答えに自信を持っていなかったと考えられる。その後で図11をかいていることから、瑞穂のように以前の方法の適用に問題を感じるところまではいっていないが、他の問題よりも不安定さを感じて図をかいたという面が伺える。

図11に見られるように、図ではもとの9個が3個ずつのまとまり3個に分けられていた。しかしこの中に問題の中で与えられた値段も自分で求めた値段も書かれることはなかった。また、最初にかかれたもの以降、図をかき直したり修正することもなく、すぐに「まあ、いいかな」と発話して、487円の後ろの疑問符を消した。こうしたことから、図は自分の考えを確認したり修正したりすることに役立たなかったと言える。487円という答えを受け入れたということは、第8問に半分の半分という考え方を適用すること自体が、検討されずに終わったと言える。つまり達也の解決では、自らの下位単位の構成の仕方が対象化されなかったと考えられる。

絵美は第7問では、すぐに図12をかいているが、そのかき方から、15本にするためには12

本にあと3本を加える必要があることに気づいたと考えられる。また3本の値段を求めるために、12本の値段280円の半分の半分を求めればよいことにも、容易に気づいたものと思われる。最後の段階で50と20を併せて70とすべきところを52としてしまったために正答には到っていないが、半分を求める方法を工夫しながら適切に考えを進めていたと言えよう。

第8問でも絵美は、値段の分かっている9個に3個を加えることで12個になることを、図15に表していた。図16では個数の9を、図18では全体の個数12を分けようとしており、第7問との違いに気づいていたと考えることもできる。しかし9の分解では右横には3つに枝分かれしたものを書いているものの、それ以外では第7問と同様2つの枝に分けている。確かに図19で390円を分ける際には300と50と40の3つに分けられているが、それまでの計算を見ると、この50と40は390の90を2つに分けたものと考えられ、2つに分けることの延長にあった。

図17以降の計算を見ると、そこでの枝分かれに関連した計算をしていたと考えられる。また、90を分けたと思われる50や40をさらに分けようとしていることから、半分の半分の考えを用いていたと見ることができる。しかし、解決の後半になると、390円を分けることから出てきたと思われる150と12個を分けることから出てきたと思われる6を足す(150+6)などしており、その考えが今どのように適用されているのかについてのモニタリングが行われにくくなっていたと考えられる。

絵美の解決では、図17では枝の最後に疑問符が書かれ、解決に困難を感じている様子が伺えるが、この時点においても、また観察者が促した際にも、図に戻って考える様子は見られなかった。新しいプリントを受け取った際にも、まず「式  $\times =$  」と書いており、式の形でまとめることに気持ちが向いていたと思われる。

結局、絵美の第8問の解決では、最初に図が

かかれるものの、考えが停滞したときに図に戻って考えたり、図をかき直したり修正したりすることはなかった。また達也の図と同様、個数に関わる情報は丸や囲みにより表されているが、値段についての情報は図の中に書き込まれなかった。値段の390円や個数の9個、12個などを枝分かれにより半分に分けることが考え方の中心に据えられていたが、半分にすることが図などを用いて検討されることはなかったのである。

### 4.3 児童の解決における相違

4.1 で取り上げた児童と 4.2 で取り上げた児童の解決における違いをまとめてみる。

第1の違いとして、靖史と瑞穂は、図を書き直したり修正したりする様子が見られた。靖史が計算で求めた結果を図の中に組み入れていたのに対し、瑞穂は計算に行き詰まった際に図に戻るといった違いはあるが、両者とも図との相互作用を通して考えていた。一方で達也と絵美も図はかくものの、それを用いて考えている様子が見られなかった。また図を用いて考えないこととも相俟って、達也も絵美も、半分に基にした考え方を、問題場面との整合性を検討することなく使っていた。Diezmann & English (2001) は図をかく過程自体が、問題の表象としての図の十分性を振り返る機会を与えるとし、「問題構造の理解を改善する手段として図をかくことを利用する」(p. 88)よう提唱している。靖史や瑞穂の図の利用は、下位単位の構成を必要とする問題において、この機会を十分に利用したものと言えよう。

第2の違いとして、かかれた図に数値が書き込まれていたかどうかがある。靖史と瑞穂の図では値段の情報が書き込まれており、特に瑞穂の図では構成された(3こ:70円)といった下位単位の2つの要素が図に含まれていた。これに対し、達也と絵美の図では本数や個数は長方形や丸により表されていたが、値段の情報は書き込まれていなかった。問題からの数値的情報を図に組み込むことの重要性が指摘されている(Lopez-Real & Veloo, 1993)が、第1の違いとも関

連して考えると、靖史や瑞穂のように自分が見出した数値も図の中に組み入れていくことは、その基になった自分の考えを確認することにもなり、今回取り上げた問題では下位単位の構成の仕方を対象化することを可能にすると考えられる。

こうした傾向は、第3時の授業で下位単位を構成する必要がある問題を解く際にも、すでに見られていた。靖史は丸を並べた図の中に値段と個数の数値を書き込んでおり、また10個の値段を考える際には「8やると2余るから」と言いながら左から2番目と3番目の丸の間を指で押さえる仕草を見せていた。瑞穂は8個入りや4個入りの袋を書いた後、そこに縦線を引いて半分にしたり、値段を記入したりするなどを何度も行った。達也の場合は、12個の値段を求める問題では4個の丸を囲んだところにその値段110を書き込んでいたが、10個の値段を求める際には、図はかかずに計算により答えを求めた。絵美は12個の値段を求める問題の話し合いで220の半分が話題になった際には、12個の丸を4個ずつ囲むという操作をしているものの、12個の値段を自分で考える場面や10個の値段を自分で考える場面では、所与の単位である8個の丸を囲んだだけで、あとは220や110を枝分かれのようにして半分にした値段を求めた。

以上より、第3時以降、下位単位の構成と問題場面との関わりを、図を継続的に用いながら考えてきたかどうか、第7問、第8問の解決に影響を与えたと見ることができよう。

### 5. 比例的推論の意識的な利用

本稿で取り上げた問題については、瑞穂や達也、絵美のかいた図における線や長方形、丸が個々の鉛筆やアイスを表していることからすると、彼らの図は問題場面の表現と考えられる。したがって、前節で述べてきた違いは解決において困難を感じたり停滞したりしたときに問題場面に戻って考える傾向(Nunokawa, 2001)に関することとも言える。日野(1996)は比例的推論に関わり、自分の持つアイデアの適用可能な範



困を意識することが、アイデアに関わる具体性を伴うイメージを持つことと関わっていること、またこうしたイメージがない場合には形式的な計算に陥ってしまうことを指摘している。問題場面との接点を持ちながら考えることは、イメージを持ってアイデアの適用可能性を考えることを支えるものと期待されよう。これに加えて、前節で述べた違いはまた、比例的推論という認知的道具の意識的な利用という問題も内包していると考えられる。

Wells (1999) は、学習者は協同的活動の中で文化的な人工物(artifacts)や文化的実践をアプロプリエートすると述べている。ここで、文化的実践には教科を背景とした推論の仕方を行うことを含めることができよう (e.g. Rosevery *et al*,1992)。また、そうした推論を支えるアイデアは、認知的な人工物や道具として捉えることができよう。実際、Prawat (1996, 2000) は教科からとられたアイデアは、生徒の思考をある方向に向かわせる道具であり、生徒がものごとを新しい光の下で見るように促すとしている。

これとは別に、数学的な表象も認知的道具の役割を果たしうる。Vygotsky (1997)は認知的道具として言語、記数法、文字式、図式、地図等をあげている。また大谷(2002)は、数学的な表象が社会的機能だけでなく思考機能を持つように移行することを指摘している。思考機能では、表象が自分自身の思考や行動を制御する手段となると考えられるが、このことは Vygotsky (1997)が認知的道具を技術的道具から区別する最も本質的な特徴として言及していたことである (p. 87)。

本稿の事例で考えてみると、比例的推論という数学的なアイデアが一方であり、授業の中で教師が導入し用いた表象がある。丸を並べ困んだ図は数学的とはいえないが、授業の中で導入され公的に用いられたという意味では、今回の実践では文化的道具と考えられる。比例的推論はある種の場面との学習者の相互作用を媒介するものとなる (図 20(a))。前節の考察は、アイデアのレベルでの認知的道具である比例的推論

を自覚的に利用することにおいて、表象レベルでの認知的道具を用いて自らの思考をモニターしコントロールすること (図 20(b)) の重要性を示すものと捉えることができよう。

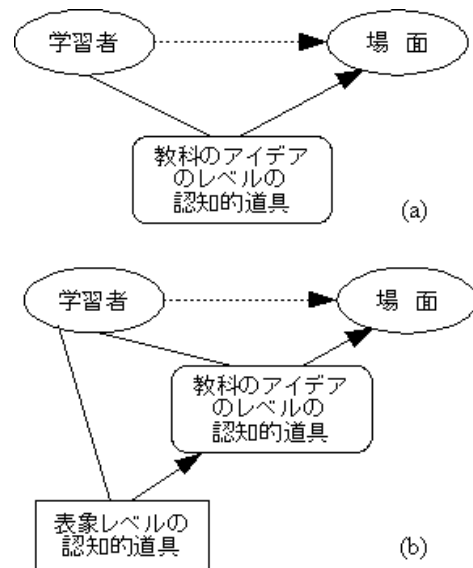


図 20

## 6. おわりに

本稿では、小学校3年生が比例的推論を用いて問題を解く過程を分析することを通して、適切な下位単位を構成できていた児童が、数値の情報を書き入れた図との相互作用により思考を進めていたことを示してきた。また、そうした思考の特徴を、表象レベルでの認知的道具を通してアイデアのレベルの認知的道具を自覚的、随意的に利用できるようになることとして捉えた。こうした捉え方に基づく支援をより意図的に行った場合の子どもたちの思考の発達について、さらに探求する必要がある。

**謝辞：**調査にあたりご協力頂きました武井由香先生、泉豊先生、林克巳先生はじめ上越教育大学学校教育学部附属小学校の先生方に感謝申し上げます。

### 註および引用・参考文献

- 1) 調査の授業は以下のメンバーにより実施された：中村光一、布川和彦（上越教育大学）；林克巳（上越教育大学附属小学校）；武内裕、中澤和

- 仁、白石信子、五十嵐真、早川英勝、渡邊武浩、米本香太郎（上越教育大学大学院生）；清水則仁（上越教育大学学部生）。授業者には武内と中澤がなり、授業は授業者の2名と中村、布川が中心となって立案し、メンバーで検討した。各授業の後でメンバーによりミーティングを持ち、報告された子どもの学習の様子を参考にして次時の修正を行った。
- 2) 達也は第6問（12個300円のチョコ18個の値段）で類似の図をかいていた。そこでは最初に図をかき、次に $12 \div 2 = 6$ ,  $300 \div 2 = 150$ ,  $300 + 150 = 450$ として答えを求め、2分ほどで解決を終えた。ただしこのときの図には図11のような縦線は入っていなかった。また12個を表す長方形も上段に7個、中段に5個と、6個のまとまりとなるようにはかかれなかった。
- Diezmann, C. M. & English, L. D. (2001). Promoting the use of diagrams as tools for thinking. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 77-89). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- 日野圭子. (1996). 比例の問題の解決において構成されるユニット: Well-chunked measure を含む問題に対する日米児童の応答の分析. 筑波数学教育研究, 15, 15-24.
- Lamon, S. J. (1994). Ratio and proportion: cognitive foundation in unitizing and norming. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 89-120). Albany, NY: State University of New York Press.
- Lopez-Real, F. & Veloo, P. K. (1993). Children's use of diagrams as a problem-solving strategy. In I. Hirabayashi et al. (Eds.), *Proceedings of the 17th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 169-176). Tsukuba, Japan.
- Nunokawa, K. (2001). Possible activities facilitating solving processes: A lesson from a stuck state. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 32 (2), 245-253.
- 布川和彦. (2005). 子どもの学習過程に基づく支援の構想: 5年生「割合」単元における学習過程の分析を通して. 上越数学教育研究, 20, 11-20.
- Nunokawa, K. (2006). Using drawings and generating information in mathematical problem solving. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 2 (3), 33-54.
- 布川和彦. (2006). 比例的推論の授業における小学校4年生の学習の様相. 上越数学教育研究, 21, 1-12.
- 大谷 実. (2002). 初等・中等教育段階の接続性を持つ数学的活動カリキュラムの開発と評価. 平成11~13年度科学研究費補助金(基盤研究C(2))成果報告書.
- Prawat, R. S. (1996). Constructivism, modern and postmodern. *Educational Psychologist*, 31 (3/4), 215-225.
- Prawat, R. S. (2000). The two faces of Deweyan pragmatism: Inductionism versus social constructivism. *Teachers College Record*, 102 (4), 805-840.
- Rosevery, A. S., Warren, B., & Conant, F. R. (1992). Appropriating scientific discourse: Findings from language minority classrooms. *Journal of the Learning Sciences*, 2 (1), 61-94.
- 白石信子. (2006). 小数のわり算における子どもの学習過程に関する研究: 数直線への比例的な見方の操作に基づく授業を通して. 上越数学教育研究, 21, 69-80.
- Vygotsky, L. S. (1997). The instrumental method in psychology. In R. W. Rieber & J. Wollock (Eds.), *The collected works of L. S. Vygotsky, Volume 3: Problems of the theory and history of psychology* (pp. 85-89). New York: Plenum Press.
- Wells, G. (1999). *Dialogic inquiry: Toward a sociocultural practice and theory of education*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

