上越数学教育研究，第29号，上越教育大学数学教室，2014年，pp.1-12.

中学校数学における関数の対象としての構成(2)
ー教科書の利用場面に焦点を当ててー

布川　和彦
学校教育学系

１．はじめに

関数の学習においてはともなって変わる量を含んだ具体的場面を利用することが効果的とされる(例えば Ellis, 2011; Mahir, 2010; 布川, 2010; Schwalbach & Dosemagen, 2000)。小学校４年でともなって変わる量を学習し、また６年・比例の学習で共変の視点から比例を定義するわが国のカリキュラムは、この点からは効果的なものと考えられる。しかし実際には、小中の接続の部分で関数の学習に問題があるとの指摘もなされてきた。例えば大谷(2004)は、小学校の関数は述語の世界、中学校の関数は主語の世界であるとし､教師は｢１次関数 $y=ax+b$ は」と関数が主語となりうるものとして「問い、語り、生徒に対応」するが、生徒にとっては必ずしも「主語や一つのまとまり」にはなっておらず、彼等の経験との間にギャップがあるとしている。そして、そのギャップを埋めることを試みた中学校１年の比例の指導について提案をしている。

関数のような数学的対象が抽象的でディスコース的な対象 (Sfard, 2008)であり、数学的対象の意味は、その対象が一定の役割を演じる実践システムの点から思い描かれる(Godino *et al*., 2011)とするならば、生徒が取り組む課題自体だけでなく、その課題に関わり、関数の役割を理解しやすい語り方がされるかによっても、生徒の関数の捉え方は影響を受けると考えられる。布川 (2014)はこうした立場から、中学校で用いられる教科書、特に関数の定義や式、グラフの学習において、関数についてどのような語り方がなされているかを考察している。しかし紙幅の制約から、関数の利用の分析は課題として残された。そこで本稿では、関数を利用する学習に焦点を当て、そこで関数についてどのような語り方がされているかを、関数が「一つのまとまり」として、探究や表現の対象として成立しやすいかという観点から考察することを試みる。

２．数学的概念の利用とその学習

2.1 中学校数学における利用の学習

数学的概念の利用として最も典型的な活動は数学的モデル化である。その過程は図１のような図式により示されてきた。

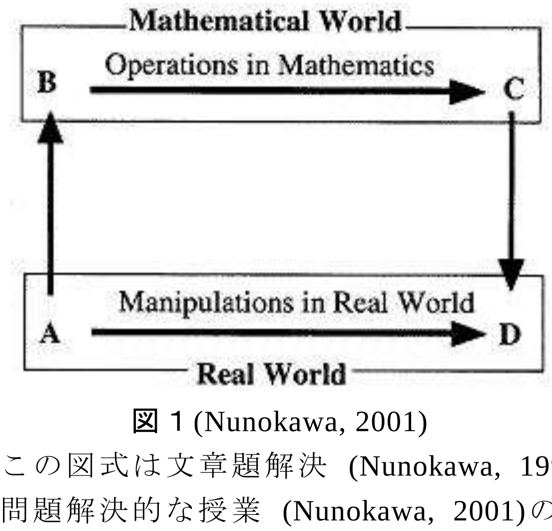

図１(Nunokawa, 2001)

この図式は文章題解決 (Nunokawa, 1995)や問題解決的な授業 (Nunokawa, 2001)の基本的な過程を記述・考察するのにも利用されてきたが、本稿では、数学的概念の利用の学習において、学習者が経験する過程を記述・

考察するのに用いることにする。

例えば、方程式を学習する単元を考えてみよう。3.1 で取りあげる教科書の２年・連立方程式の単元では、後半に「連立方程式の活用」という小単元が設定されている。その最初の問題では、ある条件下で２種類の菓子をそれぞれ何個買ったかを考える。その際、連立方程式を利用して問題を解く手順が、４つのステップとしてまとめられている：(1)場面を理解して未知数で置くものを決める；(2)数量間の関係を調べて連立方程式を作る；(3)連立方程式を解く；(4) 解の吟味をし、適していれば答えとする。(1)と(2)は図１の A から B への矢印に、(3)は B から C への矢印に、(4)は C から D への矢印に対応しており、図１と類似の過程が想定されている。また、(1)で未知数に置くものを決めるステップを設定していることからもわかるように、菓子を買う場面と、その中の数量関係を記述する方程式とは別のものとして区別されている。これらの特徴は、小単元の問題に共通に見られる。

また、菓子の個数は系統的試行錯誤など、方程式を用いずに求めることもできる。数学的手法に依らず、具体的場面の中での探究により個数を求めるという意味で、これは図１の A から D に向かう矢印に対応している。方程式の利用の学習では、A から D に直接向かうよりも、方程式を利用し A から B, C を経由して D に向かう方が、より確実に、あるいはより効率的に求めることができると、生徒が感得し、利用の有効性も理解してくれることが期待されている。

３年「２次方程式の活用」では、数学的な場面も扱われるが、その場合でも、場面自体には文字 x は含まれず、考え方や解答の中で x が導入され、それを用いて方程式を作るという過程になっている。

同様の傾向は、図形に関わる単元での利用の学習にも見られる。例えば、３年「相似な図形」の単元では、「縮図の活用」の項目があり、影から木の高さを求める、池をはさむ２地点の距離を求める、校舎からの距離と仰角から高さを求める問題が取りあげられている。いずれも、求める長さを含む三角形を場面の中に構成し、次に、場面中に構成できる２つの三角形が相似であることを確認したり、縮図にあたる２つ目の三角形を自分で構成する。最後に相似比を用いて、縮図の長さから求める長さを計算することになる。このとき、求める長さを含む三角形を構成することは図１の A から B に向かう矢印に、必要な縮図の構成や相似比による長さの計算は B から C に向かう矢印に、計算された長さを求めたかった長さとして解釈する部分は C から D に向かう矢印に相当する。

これら利用の学習では、学習した数学の概念が現実場面や数学の他領域でどのように用いられるのかを理解することになるが、同時に、その概念を利用してみることにより、概念がどのようなものかを改めて理解する機会にもなりうる。例えば、方程式の活用であれば、場面中のある特徴を持った数量関係を当該の方程式で記述することを通して、その方程式が何を表現する式なのかを理解する機会となりうる。また縮図の利用では、現実場面の中に見られるかなり大きい三角形と、紙の上にかかれる小さい三角形について、両者の関係を感覚的に捉えることで、縮図あるいは相似という関係を改めて理解する機会になりうる。具体的場面に対して、外から持ち込まれた数学の概念を意識するとともに、持ち込んだ数学の概念を直面する場面に当てはめようとする中で、概念の特性も意識することになるものと考えられる。また学習した概念を利用の主体となって用いることは、その概念を全体的なまとまりとして、自ら操作し制御する機会という点でも、当該の概念がどのようなものかを実感し、理解を深める機会になると期待されよう。

2.2 関数の利用

各種研究において関数がどのように利用されているかを見てみると、少なくとも以下の３つの利用のされ方が見受けられる：(1) 測定されたデータを関数で近似し、変化の様子を特徴づける(例えば、鈴木ほか, 2010; 安田ほか, 2012)；(2) 当該の量間の関係がある形の関数で表現できると仮定した上で、データから関数の係数を確定し、係数の大きさにより各要因の影響を推定する(例えば、北條, 2011)；(3) 当該の現象の基本的メカニズムを関数で表現し、シミュレーションを通して現象との整合性を確認するとともに、データを越えたシミュレーションの遂行結果やパラメータ変更の影響など新たな情報を生成する(例えば、三村, 2013)。

このうち、(3)の利用は図１の過程に沿ったものとなっている。すなわち現象(A)を数学を用いて表し(B)、数値計算や微分などの数学的処理を施した結果を導き(C)、それにより新たな情報(D)を生成する。(1)の利用でも関数による近似後にそれをもとに新たな情報を生成することを目指す場合には(3)と同様の過程となろうが、量間の関係を関数により特徴づけることが目標の場合には、関数自体が生成されるべき情報(D)となろう。後者の場合には、データから関数を導くための数学的手続きが遂行される。(2)の利用では、先行研究に基づき、データを収集した現象(A)をパラメータを含むある形式の式で表現し(B)、データから数学的手続きによりパラメータを決定し(C)、現象についての情報(D)を生成する。

以上のように、他領域での関数の利用も、基本的には図１の過程に従っている。ただし、何を目標(D)にするかに応じて、用いられる数学的手続きは異なってくると考えられる。

３．関数の利用についての学習

2.1 で見たように、数学的概念の利用を通して、当該の概念がどのようなものかを改めて理解する機会が得られる可能性があり、2.2 で見たように関数でも図１に沿った利用が行われうるとするならば、関数の学習においても、その利用を通して、関数がどのようなものかを改めて理解する機会が得られることが期待される。

そこで、本節においては、教科書における関数の利用の学習を、そうした機会が得やすい語り方になっているかという視点から考察する。なお、本稿では利用の対象が「関数」として記述される２年「１次関数」に焦点を当てる。また問いのみ提示される練習問題については、生徒の解答の記述や教師による解説に依存する部分も大きいことから、本稿では考え方や解答が示された例題や問題に焦点を当てて考察する。教科書としては、布川(2014)において用いられた教科書 [1)] を本稿でも取りあげ、現行の語り方の特徴を明確にするために、必要に応じて、同じ教科書のいわゆる現代化期の版も適宜利用する。

3.1 A 社教科書における関数の利用

２年「１次関数」の単元には「方程式と１次関数」の小単元があり、その中に「１次関数の活用」の項目がある。冒頭では、水を熱する場面について「x 分後の水温を y℃として x と y の関係を調べた」ときの表が提示され、「時間と水温の間には、どんな関係があるかを調べてみましょう」と問うている。データは 0 分から 6 分までの水温を示しているが、1 分ごとの水温の上昇は 5～7℃と一定ではない。吹き出しでは「変化の割合が一定と考えていいのかな」とある。表の値をグラフにプロットさせ、「グラフは直線になるとみなすことができる」ので、「y は x の１次関数であると考えられる」とする。その後、70℃になるのは何分後かを問い、また表の 0 分と 6 分の水温を利用して直線の式を求め、その式を利用して沸騰するのが何分後かを考えさせる。最後に、水が冷えるときのデータをグラ

フ上にプロットした点の形で示し、「この図から、水温の変化についてどんなことがいえるでしょうか」と問うている。

この問題では、水を熱する、あるいは冷ますときの水温の変化という現実場面を提示し、それを関数により記述し、関数の式に基づき予測を立てるという過程が想定されている。これは、2.1 で見た他単元と同様、図 1 の過程に沿うように見え、また 2.2 で見た関数の利用のうち、(1)で新たな情報の生成を含む場合と似た過程とも言える。データをプロットした際の形状から 1 次関数であると結論する部分については、「グラフが直線ならば 1 次関数」という命題を明確には学習していないことから、アブダクションに基づく判断とみなせるが、これは通常の関数の利用でも行われるものと考えられる。

ただし、いくつかの点で違いも見られる。１つは、1 次関数であると判断をしたときに、それが元データをよく記述するものであるかの吟味がされていないことである。例えば上述の鈴木ほか (2010)や安田ほか (2012)では、決定係数を求めることでデータと回帰直線や回帰曲線の一致度を吟味している。中学校の学習では決定係数を求めることはできないが、しかし、求めた式をもとに 1〜5 分の水温を計算し、与えられたデータと比較することで、元データとそれを記述する 1 次関数との整合性を吟味することは可能である。

実際、A 社の現代化期の教科書では、実験式という考え方を導入し、次のように説明している：「実験、実測などの結果からグラフをつくり、だいたいそのグラフにあてはまる式をつくったとき、その式を実験式という」(p. 93)。そして例題の解答例では、７つ提示されたデータのうちの２つを用いて 1 次関数の式を求めた後、x の値に対して式を用いて y の値を計算し、その値を表で提示されたデータと比較をさせている。つまり、求めた式がデータをある程度反映しているかを吟味していると考えられる。こうした吟味は、式により表される 1 次関数が、データに代表される現実場面そのものではないことを明らかにする。図 1 の A と B を区別する語り方である。

なお、現行の教科書では上述の通り、プロットした点の形状から「y は x の 1 次関数である」ことは確認する一方で、１年で学習した関数の定義に基づきながら、y が x の関数であるかを確認することは明確にはなされていない。

２つ目の相違は、問題文、特に場面を説明する際に、利用される数学の言葉が用いられているかどうかである。他の単元の利用では、問題文の時点で、利用される数学の言葉は用いられていない。例えば、方程式の利用では、場面の説明は場面の言葉で語られ、考え方の説明になった段階で初めて文字 x, y が用いられる。これにより、図 1 の A と B は区別され、方程式を利用して記述される現実場面と、記述する方程式とが区別されることになる。

これに対して、上述の水温の問題では、次のように、最初の問題文の中ですでに文字 x, y が用いられている：「熱し始めてから x 分後の水温を y℃として x と y の関係を調べたところ、次の表のようになりました」。さらに次に提示される表では、表側の項目が「時間」、「水温」でなく「x(分)」、「y(℃)」と x, y を用いて表されている。つまり、問題で扱われる現実場面を説明する際に、これまでの学習で変数を表すのに用いられてきた文字 x, y がすでに用いられ、その結果、関数で記述される現実場面と、その場面を記述する関数との境界を曖昧にする語り方となっている。図 1 で言えば、A と B とが明確に区別されず、問題文で A を説明する中ですでに B に向かう矢印の移行が始まってしまっていることになる。さらに、問題文の「熱し始めてから x 分後の水温を y℃として x と y の関係を調べたところ、次の表のようになりました」という説明は、提示される表が各時点の計測の結果

を記録しただけのものというよりも、既に「x と y の関係を調べた」結果として作成されたような語り方になっている。

A 社の現代化期の教科書では、これとは異なる語り方が行われている。提示される表の項目が「x(g)」、「y(cm)」となっている例が１つあるものの、その場合でも表が提示される前の説明では「いろいろの重さの分銅をかけて、その長さをはかったら、次の表のようになった」と文字は使わずに説明を行っている。さらに別の問題では、表の項目も「重さ(g)」、「のび(cm)」という表現となっている。

最後に、問い方の違いが見られる。方程式などの利用の学習では、場面に関わり何かを求めるように問い、その問いに答えるために方程式を導入するという語り方になっていた。ところが、水温の問題では、問いが「どんな関係があるかを調べてみましょう」あるいは「表からどんなことがいえるでしょうか」となっている。図 1 でいえば A から向かうべき D が明示されないか、あるいは D が関係自身であるような語り方である。2.2 で述べた関数の利用で言えば、(3)よりも関数による特徴づけを目指す場合の(1)に近い問い方と言えよう。

「１次関数の活用」で取りあげられる２番目の問題は、長方形の辺上の動点と頂点でできる三角形の面積についての問題である。動点 P が「[点]C から $x$cm 動いたときの△PBC の面積を $y$cm^2 とするとき、x と y の関係をグラフに表」すことを求めている。水温の問題の最後に述べたのと同様、この問題でも関係をグラフに表すこと自体が求められており、何かを求めるために関数を用いるという語り方にはなっていない。さらに考え方の説明においては、変域や $y=2x$ といった式について語られるものの、「関数」という用語は現れない。そのため、問題や考え方で語られているどの部分が関数なのかは不明確であると考えられる。

もちろん、式やグラフが関数を表すものであることは経験してきている。また、２元１次方程式のグラフとして、傾きが 0 の直線もこれ以前に一度見てきている。しかし、全体が３つの場合に分けられ、それぞれが異なる式や異なる形状のグラフを持つような関数を扱う経験は、教科書のこの時点までにはないとすると、考え方のどの部分が関数なのか、関数はどのような役割を果たしたのかが、生徒にとっては明らかではない可能性があると考えられる。

駅と図書館から出発した２人について考える問題では、水温の問題と同様、「出発してから x 分後の駅からの距離を ym として」と場面の説明の段階で文字が導入されるとともに、２人の動きが「グラフに表すと、下の図のようになる」としてグラフの形で与えられる。グラフは $y=60x$ と $y=-180x+1800$ のグラフに当たるものであり、場面自体が１次関数で与えられているように見える。このグラフは２人の動きを理想化したものと言えるが、理想化などの説明はなく、現実場面と関数との区別が曖昧な語り方と言える。

A 社の現代化期の教科書には駅を出発した電車が隣駅につく場面を扱った問題があるが、そこでは、走った様子は１分ごとに記録されたデータを点としてプロットする形で提示されており、最初から理想化された直線としては提示されていない。また軸には、x, y の他に「時間」、「道のり」と場面に即した記載もされている。さらに、データは最初の加速や最後の減速の部分も含まれており、その上で、「同じ速さで走っているときの速さ」を考えさせている。つまり中間部を自分なりに理想化し、直線とみなす過程が想定された語り方となっている。

２人の動きに関わる問題では、その小問のうち、関数を必要とすると考えられるのは、２人が出会う時間を求める問いであり、そこでは２つの式の交点を、連立方程式を解いて

求めることが期待されている。直線の式の求め方では、「直線のグラフから、１次関数の式を求め」ることを学習しているので、与えられた直線について式を求める際には、その「１次関数の式」を媒介して間接的にではあるが、１次関数が認識されると期待されていよう。しかし他方でこうした交点を求める学習は、２元１次方程式のグラフの交点を求めるという文脈で扱われており、活動のどの部分が関数に当たるのかはわかりにくい可能性がある。なおこの問題に対する見出しは「１次関数のグラフを活用しよう」であり、関数自体の利用ではないが、ここまで見てきたように、グラフは現実場面の条件を表す、あるいは２元１次方程式を表すように見え、関数のグラフとして捉えることが明確ではない語り方となっている。

3.2 B 社教科書における関数の利用

中学校２年「一次関数」の単元に、「一次関数の利用」という節が設けられている。まず水を熱する実験の場面で、「熱した時間を x 分、そのときの水温を y℃」で表し、「x と y の関係は、次の表のようになりました」として 0～5 分の表が提示される。1 分ごとの水温の上昇は一定ではない値となっている。それらを座標としてグラフに記入させ、「どんなことがわかるでしょうか」と問うている。そして「ほぼ一直線に並んでいるので、y は x の一次関数とみることができます」とする。その上で、５つの点の「なるべく近くを通る直線 l」を引かせ、また５点のうちの２点を「通ると考えて」式を求めさせている。最後に式をもとにして、6 分後、10 分後の水温、72℃になる時間を求めさせている。

ここでの語り方は、A 社の水温の問題と同様の特徴を示している。すなわち、B 社の語り方においても、求めた１次関数の式が元のデータをよく記述するものであるかは問わないこと、問題の説明やデータを提示する表の段階で文字 x, y が用いられていること、図１の A から向かうべき D が明示されていないことという特徴がみられる。

第２の場面では電話会社の２つのプランの比較をしている。A プランと B プランの基本料と１分ごとの通話料の表、および１ヶ月の使用料を計算する言葉の式が提示され、最後に「１ヶ月に何分通話すると、A プランの方が B プランより使用料が安くなりますか」と問うている。

この問題ではまず場面の説明において文字 x, y が用いられていない。説明の文にも料金の表、言葉の式にも文字は使われていない。考え方を示す段階になって「１ヶ月に x 分通話するときの使用料を y 円として」と初めて文字が導入される。また、A プランの方が安くなる通話時間を求めるという、何かを求める問い方がされており、図１の D は見えやすくなっている。D の達成には、与えられた２つのプランについて１分ごとの料金を計算し、両者を比較する方法も可能である。しかしここでは、A から B, C を経て D に至る別の経路がより簡潔な方法として想定されている。A から B に向かう際に場面を記述するために数学的概念が用いられ、B から C に向かう過程で新たな情報を導くために数学的手続きが用いられることが明確となる。実際、考え方では文字を導入した後、「x と y の関係を式で表し、そのグラフをかいてみます」と述べており、関係を記述する式やグラフが用いられることが明示されている。解答例でもこの考え方に沿って解決が進められ、最後はグラフ上で交点の x 座標を読みとることにより答えを求めている。

以上でみてきたように、この電話の料金プランの問題では、数学的概念により記述される場面と記述する数学的概念とを区別する語り方がなされており、また数学的概念を利用する目的も理解しやすい語り方となっている。一方で、その利用される数学的概念が関数で

あるかについては、曖昧な語り方になっている。まず、考え方や解答の中に「関数」という用語は出てこないので、考え方や解答のどの部分が関数に当たるのかは学習者にとって明確ではない可能性がある。「関係を式で表す」という実践は方程式でも行われており、また２直線の交点を求めることは、方程式のグラフの交点を考えるという文脈の中で取りあげられていた。確かにそれぞれのプランは $y=30x+3500$、$y=40x+2000$ という、関数の学習に現れた式の形で表されるので、そこから関数が利用されたことは伺うことができる。しかし解答のどの部分が関数に当たり、関数がどのような役割を果たしたのかを明らかにする語り方にはなっていない。

例えば、B 社の現代化期の教科書では、問題文で「その費用は、生産トン数に比例する金額と、一定額との和である」との条件が示された問題に対して、解答例では、最初に「y は x に比例する部分と定数との和だから、一次関数で、$y=ax+b$ と書かれる」と、式が単に費用を求める計算となっているだけでなく、それにより費用を一次関数として記述することを明言する語り方がなされている。

なお、料金が１分ごとに加算されることから、場面を式やグラフで記述するとすれば、x は自然数のみをとると考えるか、グラフは階段状になると考える必要がある。しかし、そうした点に触れずにグラフとして直線が採用されており、直線が理想化を伴う場面の記述である点については語られていない。

３番目の例題では、家から店に寄り、親戚の家に行く様子をグラフで提示している。その際、「出発してから x 分後にいる地点からおじさんの家までの道のりを $y$km として、x と y の関係をグラフに表」し提示している。グラフは水平な部分があり、その前後は傾きの異なる線分となっている。グラフから親戚の家までの道のり、店に着く前後ではどちらが速かったか、18 分後の地点から親戚の家までの道のりを考えさせている。考え方の説明では、最後の道のりを求めることに関して、グラフの当該部分の直線の式を求めるとしている。

移動の様子を提示するグラフの軸には x, y だけが記入されており、グラフが現実場面を示すのか数学的なものなのかが曖昧になっている。ただし、A 社の類似の問題と異なり、グラフは直線そのものではないので、人の動きを与えるグラフをそのまま１次関数のグラフと受け取りにくい反面、傾きの異なる３つの線分を１つの関数のグラフとして考える経験がそれ以前にないので、グラフからは、関数を利用していることが自明ではないと考えられる。

３つの問いで関数が必要とされるのは 18 分後の正確な位置を求める問いであり、式を作らないと正確な位置が求めにくいという点では､図１の A から D に至る過程の困難さが内包されている。しかし、考え方や解答例では直線の式を求めるものの、「関数」の用語は現れず、考え方のどの部分が関数に当たるのか、関数がどのような役割を果たしたのかは、この意味でも明確でないと言えよう。

B 社の現代化期の教科書では、移動の時速と目的地までの距離が問題で与えられている。解答ではそれをもとに、出発してからの時間 x 分と目的地までの距離 $y$km について、y を x で表す式を作り、その上で「よって、y は x の一次関数」と確認をしている。

3.3 C 社教科書における関数の利用

２年「１次関数」では、まず途中に「１次関数とみなすこと」という項目がある。保冷バックに入れた飲料の温度の 20 分おきの温度が提示されているが、20 分ごとの温度の上昇は一定ではないデータとなっている。そしてそれをもとに「温度が 20℃になるのは何分後かを予想」させる。吹き出しでグラフにして調べることを促したり、問いで「時間と温

度にどんな関係がある」かを調べさせている。次に、データ中の２点を通ると考えて式を求め、それを利用して 20℃になる時間を予想させるという問いを設定している。

温度変化のデータをグラフに表したり、直線で近似してその式を求めるという点では A 社や B 社の問題と類似しているが、関数の利用に関わる語り方の点ではいくつかの違いも見られる。まず場面の説明においては文字 x, y を用いていない。説明文で用いられていないだけでなく、データを提示する表でも用いられておらず、さらには最初の問いでも「時間と温度」の間の関係と述べており、「x と y の関係」とは表現していない。つまり、ここでの場面の説明では、記述されるべき場面とそれを記述する数学的概念とを区別する語り方が一貫して採られている。

また、C 社の場合には、場面を提示した上でまず 20℃になるのが何分後かを予想させている。もちろんこれは表でもある程度予想することができるが、それをより簡潔に行う方法として、１次関数の利用が位置づけられていると考えられる。つまり、図１の A から向かうべき D を提示した上で、B, C を経て D に至る経路を示唆し、B で場面を記述する数学的概念として１次関数を、また B から C に向かう過程として１次関数の式に y の値を代入し x について解くことを想定している。

こうした特徴は次の蚊取り線香の問題にも見られ、場面の説明およびデータを提示するための表では文字 x, y は使われていない。また、問いも「あと何分くらい使用できるかを予想」させたり、最初の長さを推測させたりしている。なお、この問題では吹き出しの形のヒントがあるだけだが、そこではグラフや式の利用は示唆されている。しかし「関数」の用語自体は現れていない。

「図形と１次関数」の項では長方形の２つの頂点と辺上を動く動点とで作られる三角形の面積を取り上げている。「点 P が A から $x$cm 動いたときの△APD の面積を $y$cm^2 として、△APD の面積の変化のようすを調べてみよう」「△APD の面積がどのように変化するか、考えてみましょう」と問うている。そして、動点が３つの辺にあるときそれぞれについて y を x の式で表すこと、および全体の変化を１つのグラフに表すことを求めている。

この問題は A 社と同様であり、場面の説明で文字 x, y が用いられ、また変化のようすを調べること自体を問うている。式とグラフを求めるが、「関数」の用語は現れない語り方となっている。

小単元「１次関数と方程式」の中に「１次関数のグラフの利用」という項があり、登場人物の乗ったカーフェリーの出発時刻、到着時刻とジェットフォイルの時刻表から「運航のようすを表すグラフ」をかかせている。その上で、カーフェリーがジェットフォイルと何回すれ違うか、それが何時何分頃かをグラフから読み取らせている。

このときの場面の説明では文字 x, y は用いられていない。また、データとして与えられた表もジェットフォイルの時刻表なので、やはり文字 x, y は現れない。さらに、最初の問いで運航のようすを表すグラフを記入させるための座標軸も横軸は「分」だけであり、縦軸は具体的な数値はなく、出発地と目的地の名称だけが記入されており、文字 x, y は用いられていない。このように場面の説明において、数学的概念は導入されておらず、記述されるべき場面と用いられる数学的概念とは区別されていると考えられる。

問題文では、船がすれ違う際に写真を撮るとしたときに「撮る機会が何回あるでしょうか」と問うており、図１の A から向かうべき D は示されている。ただし、B, C を経由して D に向かう過程を示唆すると考えられる３つの問いにおいても、「関数」の用語が用いられていない。またこの問題では途中でも文字 x, y が用いられることはなく、したがって式

を作ることも求められていない。グラフをかくことは求めているが、上述のように、グラフの軸にも x, y が用いられておらず、文字を使うことは想定されていないように見える。グラフの交点についても、その個数と交点のおよその時刻をグラフ上から読み取るだけで、連立方程式を解くことも想定されていない。つまり、この問題の解決においては、グラフ自体は直線ではあるものの、１次関数のグラフであることが明確になりにくい語り方と考えられる。

なお、出発時刻と到着時刻だけが示された時刻表をもとに「運航のようす」を直線のグラフで表す際には理想化が行われるが、そうした側面については明示的には言及されていない。

４．関数の利用における語り方と対象の構成

前節で３社の教科書について、１次関数を利用する問題での場面の説明および考え方の説明において、どのような語り方がされているかを考察してきた。それらをまとめると、次の３つの特徴が見られた。

4.1 目的の存在

他の単元での利用の学習では、場面についての新たな情報を求めるという形で問いかけがなされる。１次関数の利用でも、そうした問いかけをする問題も見られたものの、最初から変化や関係自体を調べるよう問うという語り方も多くなされていた。これは数学的概念が利用される以前に図１のDに当たる状況が明確にされない、あるいはDが関係の特徴づけ自身になっていることであり、「AからDに向かうことが困難なので、関数を利用してB, C経由でDに向かう」という側面が明確でない語り方である。問題を解決していく際に、関数が果たした役割が捉えにくくなる語り方とも言える。

4.2 場面とモデルの区別

方程式単元の利用では、場面の説明の際には文字が現れず、場面は方程式とは別のものとして語られ、これにより、記述される場面と、記述する方程式とが区別される。図１でいえば、場面であるAとその中のある数量関係を記述した方程式あるいはモデルであるBとは区別されて語られている。１次関数の利用でも、そうした区別をした語り方も行われていたが、他方で、場面の説明において、あるいは数値データを与える表において文字 x, y が用いられる場合も多く見られた。その場合、図１のAの説明の途中で既にBに向かう過程が始まっているかのように見える。

人や乗り物の移動に関わる問題では、場面の説明の中で移動の様子がグラフの形で提示されていた。グラフを用いて場面の説明を行うことは、そのグラフが場面自体の情報なのか、それを記述する関数なのかを曖昧にする語り方と言えよう。

また説明の中で関係や変化の様子を調べることに言及した語り方も見られた。目的達成のための数学的手続きとして関係や変化の様子を問うだけでなく、場面の説明の途中でも表やグラフが関係を示すものとして語られる場合が見られた。B社の教科書では、１次関数の利用より前の学習で「x と y の関係は次のように表される」として１次関数の式が示されることがある。したがって、場面を説明する際に「x と y の関係」について語ることは、関数を示唆する可能性がある。これは、図１のAの説明の途中ですでにBに向かう矢印が始まるような語り方である。方程式の利用では、「関係」を調べることは考え方の中で話題にされている。

３社ともに時間の経過に伴う水温の変化を扱う問題を取りあげ、与えられたデータのうち２組のデータを利用して、「直線の式」を求めさせていた。しかし、A社の現代化期の

教科書のように、２組のデータから得られた式がデータの他の組についてもおよそ当てはまるのかの吟味はされていなかった。これは、3.1 でも述べたように、モデルとしての１次関数が与えられた場面をどの程度記述できているかを話題にしない語り方であり、両者の区別を明確にしない語り方と言える。

4.3 考え方の中での「関数」の明示性

例えばA社の教科書における方程式の利用の学習では、考え方の中で「数量の間の関係を整理し、連立方程式をつくる」「これらの数量の間の関係から、次の方程式をつくることができる」などと「方程式」の用語が現れることが多い。これに対し、１次関数の利用の学習では、考え方や解答例の中で「関数」という用語自体が用いられない場合も多かった。図１の A から B に向かう過程で導入されたものが関数であることを明示しないのであり、考え方や解答のどの部分が関数に当たるのか、関数はどのような役割を果たしたのかを明示しない語り方になる。Font ら (2010) が指摘するような特定の表現を関数と同一視するという語り方だとすれば、y=(x の式)という表現やある区間で直線となるグラフを話題にすることで、間接的に関数に言及したとも考えられる。しかし式やグラフは関数の表現であるという見方 (布川, 2014)をした場合には、式やグラフが１次関数を表していることが明示されなければ、何をしたことが関数を利用したことになり、関数はどのような役割を果たしたのかは明確になりにくい。

確かに、水温の問題の場合のようにデータが提示され、その値をグラフにプロットする場合には、プロットされた結果、点がほぼ一直線上に並ぶことから「y は x の１次関数」との確認はなされていた。しかし３社とも、１年で学習したことに従って「x の値を決めると、それに対応する y の値がただ１つ決まる」という条件を確認することはしていなかった。関数であることは自明とした上で、それが１次関数かどうかのみを確認するような語り方となっていた。

4.2 でも触れたように、問題や考え方の中で、「x と y の関係」に言及する場合もあり、これが関数を示唆するとも考えられる。実際、上述のように式が「x と y の関係」を表す、あるいはグラフが「x と y の関係」を表すという記述も見られる。しかし、１次関数を定義する際には「y が x の１次式で表される」とされ、単元のその後でも基本的には「y を x の式で表す」という語り方であり、さらに１年の関数の定義では、x の値に「対応する y の値」を関数として語り、「関係」の用語は用いていないとすれば、「関数」と「関係」とのつながりは自明ではない。つまり、「関係」による説明は、関数の利用を明示的に特定する語り方ではない。

4.4 語り方の特徴と対象としての関数

以上の３つの特徴に共通しているのは、方程式など他の単元の利用の学習に比べて、図１で表される過程が不明確ということである。出発となる場面(A)とその数学的記述(B)とが明確に区別されていない、あるいは数学的処理を施す目的(D)が明確にされていない語り方がされる場合が見られた。また B および B から C に向かう矢印に当たる考え方や解答例の中で、関数の役割を明確に認識しにくい語り方も見られた。関数を利用する学習でこうした語り方がされた場合、関数が場面のどのような側面を記述したのか、場面のどのような現象を考察するのに役立ったのかが捉えにくくなる可能性がある。つまり、関数を一つのまとまった対象として感得することに有効に働かない可能性がある。例えば、ある量が別の量に対応して決まるという場面の特徴を明確にした上で、別の量に対応して決まる当該の量を記述するために関数を導入することは、１年で学習した関数の定義との接続を容

易にし、関数が何であるのかを改めて理解する機会となりうる。またそうした量を明確にし、別の量の関数として記述することは、関数の具体化(instantiation; 布川, 2013)を与えることにもなり、逆にそうした量の抽象化として関数を理解し、対象として捉える機会を与えうる[2)]。

関数の利用において扱われる場面やその中の量を関数の具体化として扱い、そこから関数を改めて理解する機会も得たいと考えるならば、場面と関数を区別することは重要となる。水温の問題において「１次関数とみなすことができる」(C 社)や「直線になるとみなす」(A 社)という表現が用いられているが、「みなす」が「見てこれこれだと仮定または判定する。実際はどうであるかにかかわらず、こういうものだとして扱う」(広辞苑)ことを意味するとすれば、これはデータをどのように扱うかの解決者側の立場を示すものとも考えられる。関数を場面と向き合う視点として語ることは、上述の区別がしやすい語り方と言える。また、場面の特徴をある種の関数とみなす場合、理想化がなされていることが多いが、そうした理想化を明示することも、区別に留意した語り方となる。

場面中のある量が他の量に対応して決まるかどうかは、それらの量の間に明らかな因果関係が認められる場合には判断が容易であろう。しかし、ともなって変わっているように見える場合でも、ある量が他の量に「対応して決まる」という感覚につながることは当然とは限らない。例えば、教科書では水温を時間の１次関数として表している。このとき、熱量など他の量を介在させないと時間と水温の関係は理解しにくいとすれば、水温が時間により決まっていることは必ずしも自明とは言えない。

確かに測定した各時点にそのときの測定値を対応させることはできる。しかし、水温が時間に「対応して決まる」という、関数の定義に当たる関係にあるかはわからない。したがって、その場面に関数を利用することを明確にするとすれば､与えられた測定結果から、水温が時間に「対応して決まる」とみなすことにも触れる必要がある。そうした見方に立って場面と向き合うという語り方の中で関数を利用することは、１年の定義に沿う形で関数を経験することになると考えられる。

５．おわりに

図１の過程に沿った関数の利用は、中島(1981)が重視する「関数の考え」とも整合する。「関数の考え」に関わっては、場面から変数を見出し、また変数間の関係を見出すことの難しさが指摘され、生徒がそれを行う過程について研究も行われきた (桐山, 1999)。本稿では、教科書の問題では変数が生徒にとって見出しやすい形で提示されることが多いという従来の指摘とは別に、図１の過程自体およびそこでの関数の位置づけが見えにくい語り方がされており、そのために、関数の利用を通して、関数がどのようなものかを改めて理解し対象として捉える機会が得られにくい可能性があることを示してきた。これは、関数を考察や表現の対象として構成することに対し、関数の利用がより有効に働くような改善の余地を示すものとも言える。

謝辞

本研究は科学研究費助成事業・基盤研究(C)（課題番号：25350190）の助成を受けて行われている。

注および引用文献

1) A 社は一松ら(2012)、B 社は岡本ら(2012)、C 社は藤井ら(2012)である。またこの後で触れる現代化期の教科書としては A 社では加藤ら(1976)、B 社では正田ら(1977)を用いた。
2) 場面の何を関数で記述するかは、関数の定義により異なる (*cf.* 布川, 2014)。

Ellis, A. B. (2011). Algebra in the middle school: Developing functional relationship through quantitative reasoning. J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 215-238). Berlin: Springer.

Font, V., Godino, J. D., Planas, N., & Acevedo, J. I. (2010). The object metaphor and synecdoche in mathematics classroom discourse. *For the Learning of Mathematics*, *30* (1), 15-19.

藤井斉亮ほか. (2012). 新しい数学２. 東京書籍.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R., & Lurduy, O. (2011). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational Studies in Mathematics*, *77*, 247-265.

一松信ほか. (2012). 中学校数学１～３. 学校図書.

北條雅一. (2011). 学力の経済分析：国内実証研究の展望. 国際公共政策研究, *16* (1), 163-179.

加藤国雄ほか. (1976). 中学校数学２. 学校図書.

桐山眞一. (1999). 中学生における関数の理解に関する研究：一次関数を事例として. 上越数学教育研究, *14*, 61-72.

Mahir, N. (2010). Students' interpretation of a function associated with a real-life problem from its graph. *PRIMUS*, *20* (5), 392-404.

三村昌泰. (編著). (2013). 現象数理学入門. 東京大学出版会.

中島健三. (1981). 算数・数学教育と数学的な考え方. 金子書房.

Nunokawa, K. (1995). Problem solving as modeling: A case of augmented-quotient division problem. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *26*(5), 721–727.

Nunokawa, K. (2001). Surprises in mathematics lessons. *For the Learning of Mathematics*, *21* (3), 43-50.

布川和彦. (2010). 数量関係の学習と背後の現象や共変性の意識化. 上越数学教育研究, *25*, 1-10.

布川和彦. (2013). 「数学：パターンの科学」の捉え方と学校数学の関係の検討. 上越教育大学研究紀要, *32*, 169-180.

布川和彦. (2014). 中学校数学における関数の対象としての構成：教科書の考察を中心に. 上越教育大学研究紀要, *33*, 85-96.

岡本和夫ほか. (2012). 未来へひろがる数学２. 新興出版社啓林館.

大谷　実. (2004). 学ぶことの愉しさを感じることのできる授業の工夫. 鳥取大学数学教育研究, 6. Retrieved from http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu/mathedu/journal06_files/06-01.pdf.

Schwalbach, E. M. & Dosemagen, D. M. (2000). Developing student understanding: Contextualizing calculus concepts. *School Science and Mathematics*, *100* (2), 90-98.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. New York, NY: Cambridge University Press.

正田健次郎ほか. (1977). 新訂数学２. 新興出版社啓林館.

鈴木智子ほか. (2010). コムギ圃場におけるネズミムギによるコムギ減収率の簡易査定法. 雑草研究, *55* (3), 174-182.

安田知久ほか. (2012). 重心動揺計による動的平衡機能検査 (Foulage test). *Equilibrium Research*, *71* (2), 61-70.