

## 昭和40年代の中学校教科書に見られる 方程式と関数とを関連づける記述について

布川 和彦  
上越教育大学

### 1. はじめに

文字式や方程式の学習と関数の学習とを関連づける試みは代数に対する関数的アプローチ (a functional approach to algebra) として、例えば Kieran ら (1996) により提唱されてきた。Kieran ら (1996) によれば、「関数的アプローチでは、文字が変数として見られるだけでなく、関数的関係を表現するために用いられる表象が操作的、プロセス志向的な仕方で提示される」(p. 258) とされる。また文字式を用いた問題解決では、通常、未知数を伴う方程式を作ることが行われるが、関数的アプローチの場合には「問題中に与えられたものの間のより一般的な関数的関係を作り出したり、入力-出力の文字の名称を変数と見なすといったことが行われる」(p. 258)。例えば、雑誌販売のバイトで週の基本給が20ドルで1契約につき4ドル加算される時、50ドル以上を得るには何件の契約が必要かを考える場合、通常の方程式の学習であれば、 $20+4x=50$  と方程式を立て、これを解いて答えを求めるであろう。関数的アプローチでは、まずは  $20+4 \times (\text{契約数}) = (\text{収入})$  という一般的な関係を作り出すことを促しており、またその際に、(契約数) や (収入) といった名称は変数と見なされることになる。

Kieran ら (1996) の用いたコンピュータ・プログラムでは、上のような関係を子どもたちが計算手続きとして記述すると、入力の数を入れるごとに対応する値を出力してくれるだ

けでなく、表の形やグラフの形でも表示できるようになっている。ただし彼らは、子どもたちがコンピュータ上で計算手続きを記述する前に、「いくつかの演算を手で実行」し、「いくつかの数を試してみることで問題文の感じをつかもうとする」(p. 259) ことを重視している。上の契約の問題であれば、5件の契約がとれたときの収入や10件の契約がとれたときの収入を計算してみることが考えられる。さらに初期の段階では、代入する数値を変えながら逐次近似的に目標となる数値に近づけて答えを求める方法も許されている。場面中の数量間の関係をいったんは関数的関係として捉えようとすることを通して問題場面を把握することを試み、その後、1つの量が特定の値になる場合をその関係をもとに考えるという解決の流れが見られる。

関数的アプローチを採用した研究はその後も見られ、例えば Farmaki (2004) は関数的アプローチを採用し、13歳児を対象とした方程式と関数の単元を統合したコースを開発している。そこでは多様な問題場面をグラフ、表、式と結びつけるとともに、これらの表象を方程式の考えと結びつけたとしている。ただし解決の初期段階では、問題のグラフ的表現に注意が向けられ、 $x$  は未知の量というよりも変数として見られるようにしている。例えば  $2x+4$  と表される量と  $3x$  と表される量が等しくなる場面、つまり方程式  $2x+4=3x$  で表される場面についての問題でも、最初は  $y=2x+4$

と  $y=3x$  のグラフや表といった、それぞれの量の変化を表す表象が用いられている。解決を行う生徒へのインタビューをもとに、関数的アプローチでは場面が参照領域となり文字に意味が与えられたり、また関数的アプローチが場面を参照しながら問題を解決する方法を与えうることを示している。

さらに Schliemann ら (2013) は、このアプローチも利用しながら小学校 3～5 年生に方程式を指導することを試みている。この研究でも、「扱っている場面に関わる量や行為にシンボルが関連付けられる」(p. 162) ことが重視されている。

わが国の現行の教科書では、中学校 2 年の 1 次関数単元の中で、2 元 1 次方程式のグラフ、および連立方程式と 1 次関数との関係が扱われる。これに関わり榎本 (2015) は教科書の 2 元 1 次方程式のグラフに関する内容を分析し、2 元 1 次方程式を関数を表す式と見るにあたっては、 $x$  に数値を代入して  $y$  の値を求める活動と、式を  $y=ax+b$  の形に変形して 1 次関数のグラフの特徴である傾きや切片を読みとる活動があること、前者が式の操作的捉え方に対応するのに対し、後者は式の構造的捉え方に対応することを指摘している。

また榎本 (2013) は、関数的アプローチという視点から文字式の理解をとらえる枠組みの構築を試みており、式変形に基づき方程式を解く代数的アプローチに対して、関数的アプローチを次のように規定している (p. 28) : 「代数的アプローチによって立式された方程式・不等式に対応する一般的な関数関係を見出し、関数表現である表・グラフを利用して解を求める方法」。また関数的アプローチを行う際には、方程式・不等式の中の「文字を未知数から変数へ見方を変えなければいけない」こと、および「方程式・不等式が表している数量関係を相等 (大小) 関係から関数関係へ見直す必要もある」ことを指摘している (p. 31)。さらに榎本 (2013) は式の形により生徒

の文字の理解が影響を受け、 $ax+by=c$  という形では未知数ととらえながら、 $y=ax+b$  という形では変数ととらえる生徒の例をあげている。

一方、Mizoguchi (2015) や山脇ら (2013) は、現行の教科書の内容を越えて、方程式と関数のグラフとの連携を図っている。彼らは「関数のグラフを問題解決の手段の 1 つとして捉えることを提案し」(山脇ほか, 2013, p. 186)、「生徒がグラフを方程式を立てるための効果的なツールとして利用できるようになること」(Mizoguchi, 2015, p. 625) を期待して、具体的な教科書の作成およびそれを用いた授業の実践を行っている。その中では中学校 3 年生に対しては  $y=ax^2$  のグラフだけでなく一般の 2 次関数  $y=ax^2+bx+c$  のグラフも指導し、2 次方程式との連携を図りやすくしている。また中学校 2 年生を対象とした連立 2 元 1 次方程式を 1 次関数のグラフを用いて考える活動においては、「グラフを  $y$  軸方向に平行移動することで、問題場面の現象を傾きの異なる 2 つのグラフの和として表現すること」(山脇ほか, 2013, p. 188) など取り扱われている。そこには、そうしたグラフの操作も指導することで、問題場面をグラフで表現したり、解の見当をつける可能性を高めようとの試みを見ることができる。

ところでわが国の教科書でも、過去のものを見てみると、方程式と関数との関連づけが現行よりも緊密と思われる記述を見出すことができる。もちろんそこでの扱い方は上述の今日的動きと必ずしも一致するわけではないが、しかしそうした過去の状況についても検討を加えておくことは、今日的な動きをよりよく理解し、またより効果的に展開していく上でも意義のあることと考えられる。そこで本稿では、現行の中学校教科書よりもさらに多様な方程式と関数との関連づけが見出される昭和 40 年代半ばの 2 つの時期の教科書に焦点を当て、そこで見出される関連づけのあり方とその特徴を検討することを試みる。具体

的には、現代化の最初の時期にあたる昭和 46 年検定の教科書と、そこへの移行期にあたる昭和 43 年改訂検定の教科書をとりあげる。

以下では記述を簡潔にするために教科書会社をイニシャルで表す：啓林館→Kr, 東京書籍→T, 大阪書籍→O, 大日本図書→D, 教育出版→Ky, 学校図書→G。その後に検定年度を付して教科書を特定する。例えば Kr43 は啓林館の昭和 43 年版の教科書を、T46 は東京書籍の昭和 46 年版の教科書を表す。

## 2. 方程式を変数を用いて導入している例

現代化の時期の教科書である昭和 46 年版では、いくつかの教科書において方程式を変数を用いて定義している。

O46 は 1 年「方程式」単元で変数を定義した後、「変数をふくんだ等式を、方程式という」として、方程式を変数を用いて定義している。またこの定義の直後にある、さいころを投げて出た目の数に 6 を加えたら 3 倍になったことを関係式で表すという例題では、「出る目の数を  $x$  とすると、変数  $x$  の変域は  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 」という記述がある。ここでは文字を変数と呼ぶだけでなく、変域という変数にそった語り方がなされている。方程式の解法を学習する部分でも次のような語り方がされている：「方程式の解の集合を求めるとき、 $x$  の変域の値について、いちいち代入して調べるのは、手数がかかって実際的でない」。さらに「方程式の利用」において解の吟味に関わり次のような説明がある：「実際の問題では、選んだ変数  $x$  のとる値に制限がついている場合がある」。

2 年でも同様の傾向が見られ、「連立方程式」単元では「2 種類の変数  $x, y$  を含む方程式を、 $x$  と  $y$  についての二元方程式という」との定義を行っている。さらに連立方程式について加減法や代入法を説明する際にも、「1 つの変数を消去することを考えればよい」、「いっぽうの方程式を 1 つの変数につ

いて解き」といったように、文字を変数とする語り方がされている。この時期には連立 3 元 1 次方程式も扱われるが、これも「3 種類の変数」を含む方程式として定義される。ただし 3 年「二次方程式」単元では、文字を変数とする語り方は見られない。

D46 も 1 年「方程式・不等式」単元の最初に変数を定義し、その上で方程式を次のように定義している：「変数  $x, y$  などを使って表した条件が、 $4x=20, 3y+5=14$  などのように、等式になっているとき、この等式を方程式という」。また解についても「一つの変域内において」方程式を満たす変数の値のことだとしており、例えば方程式  $2x+1=6$  を  $x$  の変域が  $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$  の場合と、 $\{1/2, 1, 3/2, 2, 5/2, 3\}$  の場合とでそれぞれ解くように求める問いなども設定されている。

D46 の 2 年では、「一次関数」単元の前に「方程式・不等式」単元が、後に「二元一次方程式」単元が設定されている。ただし前者においては 1 元 1 次不等式の解法が中心であり、1 次方程式については、 $4(x-2)=3(x+1)$  や  $(3x+4)2-(x-1)3=7$  といった形のもの扱われる。「二元一次方程式」単元では「変数を二つふくむ一次の等式を二元一次方程式という」と説明するとともに、 $x, y$  の変域が正の整数の集合である場合や、変域が有理数の集合の場合などを話題にしている。また連立 2 元 1 次方程式の解法を考える際にも、まず 2 元 1 次方程式の解の集合のグラフをつくり、2 直線の交点の座標を用いて解くことを扱った後、「連立二元一次方程式は、式の変形によって、一元一次方程式を導いて解くこともできる」として、代入法と加減法の学習に進んでいる。

Kr46 の 1 年「文字を使った式」単元では、具体的な場面から  $x/4-x/5=1/2$  という等式を作り、この等式に「あてはまる数  $x$ 」を考え、この等式に「このような  $x$  についての等式を、 $x$  についての方程式」というとして方程式を定

義している。ただしその少し前の箇所では「等式  $2x+3=7$  や、不等式  $x+6>8$  は、変数  $x$  の値についての条件を示したものとみることができる」としており、等式が変数に関わるものとして語られている。

Kr46 の 2 年「連立方程式」の最初で 2 元 1 次方程式を導入する場面においては、具体的な場面から立てた  $x+y=10$  という式(1)について「 $x, y$  はいずれも変数と考えられ、この等式(1)は、それらの値についての条件を表したものとみることができる」と説明しており、方程式中の文字を変数として語っている。またこの方程式の正の整数の範囲での解を考える際には、「 $x, y$  の変域が正の整数の範囲であるとき」としており、変域という変数と関連した用語を用いた語り方となっている。

ただし方程式を変数を用いて定義することは、この時期の全ての教科書で行われていたわけではない。G46 は方程式が導入されるのが変数を学習する前ということもあり、方程式を「 $x$  の値によって成立したり、不成立になったりする等式を、文字  $x$  についての方程式といい」と定義している<sup>9)</sup>。同様に、Ky46 と T46 でも変数の学習が方程式の導入の後になることから、「含まれる文字の値によって成り立つことも、成り立たないこともある等式」(Ky46)、「式の中の文字に特別な値を代入したときにかぎって成り立つ等式」(T46)と方程式を定義しており、変数などへの言及はない。これらの教科書では 2 年で 2 元 1 次方程式を学習する際にも、文字が変数であるという語り方はされないが、変域について言及される場面は見られる。例えば、G46 の 2 年「連立方程式」単元では「特にことわりのないかぎり、 $x, y$  の変域は、すべて有理数の集合とする」という記述が見られ、Ky46 の 2 年「連立方程式」単元には「 $x, y$  の変域が  $\{1, 2, 3, 4\}$  であるとき、方程式  $x+3y=10$  の解について調べよう」という記述が見られる。また Ky46 では「連立方程式」単元の中で、 $x+y=7$

を正の整数の範囲で求めた解の組  $\{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$  をグラフに表すことも行っている。

なお、昭和 43 年版の教科書では、それが依拠する指導要領において「未知数」が第 2 学年で指導すべき用語に含まれていることもあり、方程式を「未知数を含む等式」(Kr43)として定義したり、「式の中の文字に特別な値を代入したときにかぎって成り立つ等式」として方程式を定義した上で、方程式中の「まだわかっていない数（または、それを表す文字）を未知数という」と補足したり(T43, D43, O43, Ky43, G43)しており、変数と関わらせた語り方にはなっていない。

### 3. グラフを用いた方程式の解法

第 1 節でも述べたように、現行の中学校の教科書でも、連立 2 元 1 次方程式をグラフを用いて解くことは扱われている。本稿で考察している時期の教科書では、2 次方程式や 1 元 1 次方程式をグラフで考える例が見られる。

#### (1) 2 次方程式のグラフによる解法

昭和 43 年の教科書では、2 次関数の学習の中で、2 次方程式をグラフを用いて解くことが扱われている。

例えば T43 の 3 年必修・選択用では、「2 次関数」単元の第 3 節が「2 次関数と 2 次方程式」という内容になっている。なお 2 次方程式はこの前の章で学習をしている。節の冒頭では 2 次関数  $y=ax^2+c$  のグラフと 2 次方程式の関係を取り上げる。高さ 45 m のところからボールを落としたときに、 $x$  秒後の高さがおおよそ  $y=45-5x^2$  で表されることを取り上げ、高さが 25 m になるのは何秒後かを考えている。これを式の変形により解くとともに、2 次関数としてのグラフを示し、解いて得られた  $x=2$  がグラフで  $y=25$  に対応する  $x$  の値であることを確認している。

次に  $y=ax^2+bx+c$  のグラフと 2 次方程式の関係に進み、 $y=x^2-2x-1$  についていくつかの  $y$

の値に対応する  $x$  の値を調べた後、2次関数  $y=ax^2+bx+c$  で  $y=k$  としたときの  $x$  の値はこの2次関数のグラフと直線  $y=k$  との交点の  $x$  座標で、それは2次方程式  $ax^2+bx+c=k$  の解であること、特に  $y=0$  のときの  $x$  の値は2次関数のグラフと  $x$  軸との交点の  $x$  座標で、2次方程式  $ax^2+bx+c=0$  の解であることをまとめている。

さらに「2次方程式のグラフによる解き方」として、「 $y=x^2$ のグラフを用いる方法」を取り上げている。例として  $x^2-2x-3=0$  の解を  $y=x^2$  のグラフと  $y=2x+3$  のグラフの交点から求めている。またグラフによる解法では整数解でない場合には「近似値しか求められない」ことを注意している。なお必修・選択用は、現行では高校の数学Iで取り上げられる、 $y=ax^2+bx+c$  のグラフと  $x$  軸の交点の個数が2次方程式の解の個数になるという内容も取り上げている。

以上のような扱いは必修・選択用に限ったことではなく、T43の3年必修用においても見られる。必修用においては  $y=ax^2+c$  のグラフしか扱わないために、上の  $y=ax^2+bx+c$  のグラフと2次方程式の関係は取り上げられないが、 $y=ax^2+c$  のグラフと2次方程式との関係、および放物線  $y=x^2$  と直線の交点を用いた解法は取り上げられている。これはこの時期の教科書が依拠する指導要領において、第3学年で  $y=ax^2$  と  $y=ax^2+c$  のグラフを用いた2次方程式の解法を指導するよう書かれていることに対応している。また必修用では、放物線  $y=x^2$  と直線の交点の個数と、2次方程式の解の個数の関係が説明されている。

Ky43, G43の3年必修・選択用では、導入で具体的な場面を想定せずに関数や方程式の式だけを提示している点を除けば、T43のそれとほぼ同様の内容を取り上げている。Kr43の3年必修・選択用では「方程式の根とグラフ」は2ページ半ほどの扱いであるが、1ページは1次方程式が扱われ、2次方程式に

ついては1ページ半ほどで扱われている。そして  $y=x^2$  と  $y=ax+b$  のグラフの交点を用いた解法だけが説明される。O43の3年必修・選択用も1ページ扱いで、 $y=x^2$  と  $y=ax+b$  のグラフの交点を用いた解法だけが取り上げられている。D43もやはり1ページの記述であるが、 $y=ax^2$  と  $y=k$  のグラフの交点を用いた解法と、 $y=ax^2+bx+c$  と  $x$  軸との交点を用いた解法が取り上げられている。同社の同じ指導要領による初期の検定教科書(D36)では、「二次関数の応用」の節の最初に5ページにわたり「二次方程式のグラフによる解法」の記述があり、T43と同様の内容が扱われている。一部の教科書では系統学習の時期に、2次方程式のグラフによる解法の扱いを軽くする動きがあったと推測される。

2次方程式と2次関数を関連づけることは現代化の指導要領では記載がなくなり、教科書でも基本的には見られなくなる。例えばT46では2次関数について学習する3年「関数とグラフ」単元において「2元1次不等式の表す範囲」という節は見られるが、方程式との関わりについては触れられていない。Kr46では3年「関数」単元に「方程式・不等式とグラフ」という節が設けられ、「関数のグラフと、方程式や不等式の解との関係について考え」ているが、1次の範囲に限られており、2次関数と2次方程式との関係は取り上げられていない。これに対しKy46には3年「関数」単元の中に「2次関数と2次方程式」の記述が、1ページ程度ではあるが見られる。そこでは方程式  $(1/2)x^2-8=0$  を、 $y=x^2$  のグラフと  $y=16$  のグラフの交点を用いて解いている。そして「 $y=x^2$ のグラフをかいておけば、定木のへりで直線を表すことによって、いろいろな2次方程式を解くのに共通に使えるから便利である」と、Ky43と同様の説明を行っている。

なお2次方程式自体の解法ではないが、平方根を学習する際に  $y=x^2$  や  $y=\sqrt{x}$  のグラ

フを利用することが、この時期の一部の教科書で見られる。例えば、G43の3年必修選択用では、最初の単元が「平方根」であり、したがって2次関数については未習であるにも関わらず、単元冒頭で $y=x^2$ のグラフをかかせている。続く平方根の学習では、 $y=x^2$ のグラフをもとに平方すると9になる数を考えさせている。さらに $y=x^2$ のグラフから $\sqrt{5}$ や $\sqrt{2}$ などの近似値も求めさせている。同様の扱いは3年必修用にもみられる。

またT46の3年「平方根」単元では、やはり2次関数の学習の前ではあるが $y=x^2$ のグラフをかかせ、平方して9になる数がいくつあるかを確認する場面や、 $\sqrt{5}$ と $\sqrt{7}$ の大小を比較する場面でグラフを用いて確認を行っている。

## (2) 1元1次方程式のグラフによる解法

この時期の教科書には、2元1次方程式だけでなく、1元1次方程式についてもグラフによる解法に触れているものが見られる。例えば、Kr43では2年「量の変化とグラフ」単元で「一次関数のグラフと一次方程式の根」について学習しているが、そこではまず、 $y=ax+b$ のグラフと $ax+b=0$ の解との関係を取り上げ、 $ax+b=0$ の解が $y=ax+b$ のグラフと $x$ 軸との交点の $x$ 座標に等しいことをまとめている。その後連立2元1次方程式の解が2つの直線の交点の座標に等しいことの学習に進んでいる。なおKr46では2年「一次関数」で1元1次方程式には言及されなくなるものの、3年「関数」単元の「方程式・不等式とグラフ」の中で、 $y=2x-3$ のグラフで $y=5$ となる $x$ の値を求めると、これが方程式 $2x-3=5$ の解になることを取り上げている。

Ky43の2年「座標とグラフ」単元では、「一次関数と一次方程式」の最初に「グラフを使って方程式を解くことを考えよう」として「一次方程式 $ax+b=c$ の根は、直線 $y=ax+b$ と、直線 $y=c$ との交点の $x$ 座標に等しい」ことを扱い、それから $ax+by=c$ のグラフに進ん

でいる。G43の2年「1次関数」単元でも、「1次関数の応用」の最初に「1次関数と1次方程式」を扱い、「1次方程式 $2x-4=0$ の根」を「1次式を $x$ の関数とみて、 $y=2x-4$ と置」いて考えた後、「1次方程式 $ax+b=0$ は、1次関数 $y=ax+b$ で、 $y$ の値が0になった場合であるといえる」とまとめている。

D43は2年「式の値の変化とグラフ」の単元で連立2元1次方程式のグラフによる解法を学習した後に、両辺に $x$ が現れる1元1次方程式 $ax+b=cx+d$ を取り上げ、これを $y=ax+b$ 、 $y=cx+d$ の連立方程式としてグラフを用いて解くことを扱っている。その後で「一次方程式 $ax+b=0$ をグラフを使って解くには、 $y=ax+b$ のグラフをかき、それと $x$ 軸との交点の $x$ 座標を読めばよい」とまとめだけ示して、問いを解かせている。最後に「グラフを使って解いた結果は、一般に、根の近似値である」との注意を載せている。

両辺に $x$ がある1次方程式をグラフを用いて解くことは、現代化の時期の教科書にも一部見られる。O46では2年「一次関数」で連立2元1次方程式の解をグラフを用いて求めることを学習した後、 $(1/2)x-2=3-(1/3)x$ をグラフを用いて解くことを取り上げている。両辺に対して $y=(1/2)x-2$ と $y=3-(1/3)x$ のグラフを考え、その交点の $x$ 座標として解を求めている。Ky46も2年「1次関数」の最後で「グラフを使って、連立方程式を解く方法」を考えた後、「グラフを使って、1元1次方程式を解く方法を考えよう」として、 $3x-32=-2x+8$ をグラフを使って解いている。そして $y=3x-32$ と $y=-2x+8$ のグラフの「交点の $x$ 座標を読めばよい」とまとめている。

この両辺に $x$ が現れる方程式についてはKieranら(1996)が算数のような逆算による解法が直接適用できないために、生徒にとって困難が見られたと報告しており、関数的アプローチの有用性が感じられやすい方程式とも考えられる。そうした方程式を2つの1次関

数のグラフの交点を用いて解く方法が、この時期には取り上げられていたことになる。

### (3) 2元1次方程式の取り扱い

2元1次方程式を1次関数と関連づけて考えることは現行の教科書でも行われている。ただ2元1次方程式と1次関数のグラフとの関連を扱うにあたり、関数的アプローチの観点から見て、現行の教科書とは多少異なる取り上げ方をしている事例が見られるので、それについても検討しておく。

第一に方程式をグラフを用いて考える際、方程式中の文字を変数とみなすことを明確に断る例が見られる。G43の3年必修選択用の「連立方程式」単元では、冒頭に「方程式とグラフ」として、「等式 $y=x-2$ に適する $(x,y)$ を座標とする点はすべて直線 $y=x-2$ のグラフの上であり、また、逆に直線 $y=x-2$ のグラフの上にある点の座標 $(x,y)$ は、すべて等式 $y=x-2$ に適する」ことを確認している。そして、次のことを明確に断っている：「等式 $y=x-2$ は、 $x,y$ を未知数とみれば方程式となり、 $x,y$ を変数とみれば、 $y$ は $x$ の1次関数となる」。また「このように、 $x,y$ についての等式は、方程式とみることも、関数関係とみることもできる」とも説明している。

D43でも2年「式の値の変化とグラフ」の単元で式(3) $2x+y=5$ と(4) $y=-2x+5$ について次のように断っている：「二元方程式(3)は、 $x,y$ を変数とみるとき、式(4)で表される1次関数と同じ関係を表すとみてよい」。これらの語り方を見ると、榎本(2013)が必要性を指摘する「文字を未知数から変数へ見方を変えなければいけない」ことが、この時期の一部の教科書では明示的に行われていたと見ることができる。

第二に方程式を用いて考える際に、単にグラフを用いて解を見出すことを取り上げるだけでなく、具体的な場面を用いるとともに、方程式を立てる前に、場面に含まれる量の間の関数関係をグラフなどを用いて把握する活

動を取り入れたものが見られる。

D43の2年「式の値の変化とグラフ」単元では、「一次関数と一次方程式」という節があり、2元1次方程式のグラフが取り上げられる。その説明をする直前に、A君は9時8分前に出発した0.5km/分で走る自動車に乗っており、Bさんは9時に出発した0.9km/分で走る自動車に乗っているという場面を取り上げている。そしてまず9時から $x$ 分後に出発点から $y$ kmの地点にいるとして、2台の自動車について $x,y$ の関係を式で表すとともに、それらのグラフを提示している。さらにグラフの交点の座標を読むとBさんがA君にいつどこで追いつくかを知ることができることをまとめた後、今の場面に出てきた $y=0.5x+4$ が「 $x,y$ についての二元方程式と見ることができる」として、方程式のグラフを説明する。さらに「一次方程式のグラフによる解法」に進み、連立2元1次方程式をグラフを用いて解くことを学習している。連立方程式の解法では追いつく場面の式をそのまま利用してはいないが、全体の流れとしては2台の自動車の動きという場面のようすを式やグラフで表現した後に、その関係が方程式としても見ることができると説明し、方程式とグラフの関係を導入しようとしていると考えられる。

D46では第2節でも触れたように、2年「一次関数」単元の後に「二元一次方程式」単元が置かれ、そこで初めて2元1次方程式が導入される。その際まず20円の鉛筆 $x$ 本と10円の鉛筆 $y$ 本を買って120円払ったという場面が用いられる。この場面について立てた方程式の解を座標とする点をプロットしたグラフを提示し、これを2元1次方程式のグラフということを説明する。さらに $20x+10y=120$ などについて、 $y$ は $x$ の関数と見こともできることを確認している。ここでも、2種類の鉛筆を買うという場面のようすを式とグラフで表現している。

その後、連立2元1次方程式の解法を学ぶ

際にも、15円切手と50円切手をあわせて20枚買い、50円切手の方が6枚多かったという場面を用い、そのようすを式とグラフで表している。さらにそのグラフをもとに2つの方程式の両方の解になる $x, y$ の組を求めさせ、そこから連立2元1次方程式の解を説明している。そしていくつかの連立方程式をグラフを用いて解く問いを考えた後になって、代入法、加減法を学習するという流れになっている。ここでは、場面中の数量間の関係をグラフで概観し、また連立方程式の解のイメージをグラフの交点という形で見せることが、式変形による解法よりも先に行われている。

一次関数の学習後に連立方程式を学習するという扱い方、また連立方程式の解法でも最初にグラフを利用したものを取り上げ、その後代入法や加減法を学習するという扱いは、次の指導要領に依拠するD55においても踏襲されている。

#### 4. 昭和40年代の教科書の記述と今日的な関数的アプローチ

前節まで見てきたように、昭和43年版および46年版の中学校教科書においては、現行の中学校教科書には見られないような、方程式と関数とを関連づける記述が見られた。すなわち、変数を用いた方程式の定義、方程式に関わる記述での変域への明示的な言及、2次方程式のグラフによる解法、1元1次方程式のグラフによる解法、方程式中の文字を変数と見ることの明示的な宣言、そして方程式で表現する場面のようにグラフにより把握することが見られた。

こうした特徴の中のいくつかは第1節で述べた今日的な代数への関数的アプローチに見られる特徴にも類似している。ここではそうした両者の類似点と相違点について検討してみる。

##### (1) 変数や関数的関係への視点の移行

関数的アプローチの視点から方程式を扱っ

ていくことに関わり、榎本(2013)は方程式中の「文字を未知数から変数へ見方を変えなければ」ならず、また方程式が「表している数量関係を相等(大小)関係から関数関係へ見直す必要もある」ことを指摘していた。これに関わっては第2節で触れたように、昭和46年版の教科書のいくつかでは方程式を変数を用いて定義しており、こうした見方の変更がそもそも不要な語り方になっている場合が見られた。

また昭和43年版のいくつかの教科書では、3(3)で触れたように、方程式中の文字を変数と見なすことを明示的に断っており、変数へと見方を変更することを明確に宣言するような語り方になっていた。以上より、昭和40年代の教科書においては、方程式中の文字を変数と捉えるような語り方がいくつも見られ、関数的アプローチのこうした側面についてはわが国の教科書においてすでに取り入れた事例があったと行うことができよう。

##### (2) 多様な表象の利用

「いくつかの表象を用いることは、代数的問題解決に対する関数的アプローチの不可欠な(integral)部分」(Kieran et al., 1996, p. 260)とされる。3(1), (2)で触れたように昭和40年代の教科書では現行よりも多くの種類の方程式についてグラフを用いた解法を扱っており、この意味で方程式の学習の文脈において式に加えてグラフという表象を併用することが、現行の教科書よりも多く見られたと言えよう。また3(3)で触れたD46の場合には、2元1次方程式の導入時に式、表、グラフが用いられており、いっそう上述の関数的アプローチに近い記述になっている。ただしグラフに加えて表を用いた例は多くないことから、この点についてはKieranら(1996)の提案する学習活動ほどには多様な表象が利用されていなかったことになる。

##### (3) 方程式を立てる前の関数的関係の把握

関数的アプローチに基づくKieranら(1996)



の学習活動では、「いくつかの数を試してみることによって問題文の感じをつかもうとする」(p. 259)ことが重視されており、「問題中に与えられたものの間のより一般的な関数的関係を作り出すこと(p. 258)が行われていた。つまり、すぐに方程式を立てるというよりも、まずは場面中の数量間の関数的関係を捉えたり数量が変化したときのようなすを観察することで、場面を把握することが行われ、その把握が十分なされた後に、数量がある特定の数値になる場合や、2つの数量が一致する場合として方程式が立てられるものと考えられる。

本稿で検討してきた教科書では、グラフを用いた方程式の解法は多く取り上げられていたものの、Kieranら(1996)が重視するような場面中の関数的関係の把握や、Mizoguchi(2015)や山脇ら(2013)が提案する「関数のグラフを問題解決の手段の1つとして捉える」という側面は明確ではないように見える。

確かに、3(3)で取り上げた教科書の事例のように、連立方程式の導入の部分でグラフを用いて場面の全体像を確認したり、さらにはそうしたグラフの交点に注意を向けることで場面の全体像から連立方程式の解のイメージを持たせる語り方をするものも存在した。特に前項でも触れたD46では、方程式の導入で表とグラフを組み合わせた扱いも見られた。

しかしすぐに立式が行われ、Kieranら(1996)のように、いくつかの数を試して問題文の感じをつかもうとすることが、一連の活動中に明確に位置づけられているかは不明確であった。D46でも立式後に、その式を満たす解を表で提示するに過ぎない。Nunokawa(2000)は場面を把握するための問題解決方略という視点からいくつかの方略の意義を再検討し、試行錯誤を行うこと、およびその結果を表に整理することも、単に解を逐次近似的に求める解法としてだけでなく、問題場面中の数量関係を把握するための手立てとして有効であることを指摘している。現行の教科書

で2元1次方程式を関数を表す式と見る際に $x$ に数値を代入して $y$ の値を求めるが、榎本(2015)はこの活動を、関数的関係を「操作的、プロセス志向的な仕方」(Kieran *et al.*, 1996, p. 258)扱うことに対応するとした。こうした活動が問題や関数的関係の感じをつかむこととして位置づけられるよう留意することは、昭和40年代の教科書の扱いと今日的な関数的アプローチの差異を埋める可能性を持つものと考えられる。

## 5. おわりに

本稿では昭和40年代の中学校教科書に見られる、方程式と関数との関連づけについての記述を検討してきた。その結果、現行の中学校教科書には見られないタイプの記述が見られ、それらが関数的アプローチに近い性質を持つことを確認してきた。同時に、当時の扱い方と今日的な関数的アプローチとの間の差異も認められ、そうした点を検討することが当時の扱いを関数的アプローチにより近づけるための視点となりうると考えられた。

こうした検討に関わり1つの残された課題は、方程式と関数の関連づけに不等式も組み入れ、方程式、不等式、関数を変数の観点から統一的にとらえる枠組みを構成することである。本稿では方程式中の文字を変数としてみなす扱い方が当時に行われていたことを見てきたが、変数とみなす事例は不等式においてはさらに多く見られる。実際、T46では方程式については変数と関わらせることが明示的には見られないが、2元1次不等式については3年で「2つの変数をふくむ不等式」として定義している。また同様に、G46の3年「方程式・不等式」単元では「不等式 $2x > x + 3$ 」は、1つの変数 $x$ について次数が1次であるから、これを1元1次不等式という」との記述がある。このように不等式の方が変数の考えとより結びつきやすいとすれば、変数の視点から、不等式も含む統一的な枠組みを構成

する可能性はあると考えられる。

謝辞：資料の収集にあたって本学図書館並びに公益財団法人教科書研究センター附属教科書図書館にお世話になりました。本研究は科学研究費助成事業・基盤研究(C)(課題番号：16K00954)の助成を受けている。

#### 註および引用・参考文献

1) 同じ指導要領に基づく G52 では扱い方が異なる。1年「文字と式」単元の中に「方程式・不等式の解」という箇所があり、冒頭の問いに現れる  $x$  を用いて変数と変域が導入され、次に「 $x$  の変域を  $\{0, 1, 2, 3\}$  として、等式  $2x+3=7$  が成り立つ  $x$  の値」を求める例題を提示する。そして、この例題をもとに「 $2x+3=7$  のように、 $x$  の値によって成り立ったり、成り立たなかつたりする等式」として方程式を定義している。ここでは方程式中の  $x$  は変数として語られているように見える。 $x$  に数を代入して解を見つける例題や問いでは、「 $x$  の変域」を指定して解かせている。さらに1次方程式の解法のまとめで「1次方程式は移項して整理すると  $ax=b$  ( $a \neq 0$ ) と」なり、「 $ax=b$  は、 $2x=6$  や  $-3x=5$  のような式をまとめて表しているから、 $x$  が変数であるのに対して、 $a, b$  は決まった数となる」と補足している。このように G52 では方程式中の  $x$  を変数として語る傾向が明らかであり、同じ会社であっても検定の年度により語り方に違いがあることがうかがえる。

榎本哲士.(2013). 学校数学における文字式の理解を捉える枠組みの構築：関数的アプローチを視点として. 数学教育学論究(臨時増刊), 95, 25-32.

榎本哲士.(2015). 中学校数学科における二元一次方程式の関数的見方に関する理論的分析：数学的概念の二面性を視点として. 教材学研究, 26, 49-56.

Farmaki, V. (2004). From functions to

equations: Introduction of algebraic thinking to 13 year-old students. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 393-400). Bergen, Norway.

Kieran, C., Boileau, A., & Garancon, M. (1996). Introducing algebra by means of a technology-supported, functional approach. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching* (pp. 257-194). Springer.

Mizoguchi, T. (2015). Functions and equations: Developing an integrated curriculum with the required mathematical activities. In C. Vistro-Yu (Ed.), *Proceedings of the 7th ICMI-East Asia Regional Conference on Mathematics Education* (pp. 625-637). Philippine Council of Mathematics Teacher Educators.

Nunokawa, K. (2000). Heuristic Strategies and Probing Problem Situations. In Jose Carrillo & Luis C. Contreras (Eds.), *Problem-solving in the beginning of the 21st century: An international overview from multiple perspectives and educational levels* (pp. 81-117). Huelva, Spain: Hergue.

Schliemann, A. D., Carraher, D. W., Goodrow, A., Caddle, M. C., & Porter, M. (2013). Equations in elementary school. In Lindmeier, A. M. & Heinze, A. (Eds.). *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 161-168). Kiel, Germany.

山脇雅也, 山本靖, 溝口達也.(2013). 中学校数学科における関数と方程式の統合カリキュラムの開発研究：第2学年及び第3学年の授業研究を基に. 数学教育学研究, 19 (2), 185-201.