

解決過程への着目と考える研究課題

布川 和彦
上越教育大学

1. はじめに

算数・数学における問題解決の研究が 1980 年代に盛んに行われた結果として、メタ認知や情意、教室文化など、解決に関わる多様な側面に注意が向けられるようになり、子どもたちの解決を見る私たちの視点も豊かになってきた(例えば De Corte ほか, 1996; Schoenfeld, 1992)。また、こうした側面の育成においては、数学的な実践に学習者を参加させることが重要であるとする立場(例えば Schoenfeld, 1994)は、近年の状況的認知などの動向にも影響を与えてきた(ブラウンら, 1991)。

ところで、こうした諸側面への着目と関連しながらも、多少異なる展開を見せた研究もある。これを簡潔に特徴づけるならば、認知レベルの考察に留まり、解決過程を詳細に追うことを行うものである。筆者自身は後者のような関心のもとで考察をしてきたので、本稿では、こうした解決過程を詳細に追うという考察について述べるとともに、そうした関心の延長上にあると考えられる、今後の課題について述べていくこととする。

2. 解決過程の捉え方

問題解決に関わる過去の研究を見たときに、解決過程をどのように捉えるか、についてのいくつかの立場なり多少の変化なりを見いだせるように思われる。以下では、4つの点からこのことを概観したい。全般的に言えるのは、解決過程の複雑さをどこまで捉えようとするのか、が問題になりそうだということである。

(1) "過程"の捉え方

問題の答えだけを重視するのではなく、答えを求める過程にもっと注意を向けようとする提案がなされてきている。つまり、答えを求めるためにどのような考え方をしたのかを重視し、図をもちいる、パターンをさがすなどの過程が注目された。

しかし、答えるためのこうした過程を解法と呼ぶならば、この解法自体、あるいは解法の中心的なアイデアに気づくまでの過程もまた問題となろう(図1)。

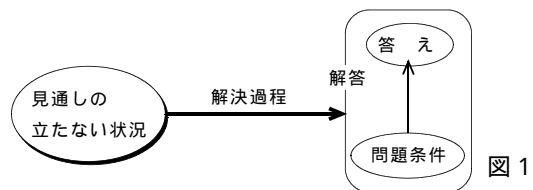


図1

実際の問題解決においてこれらを明確に区別することは難しいが、一方で問題解決を理解していく上で、後者を考察していくことは重要と考えられる。本稿では、後者を解決過程として以下では扱っていくことにしたい。

(2) 解決の流れの捉え方

解決過程の基本的な捉え方は、理解→計画→実行→振り返りという、いわゆる「ポリアの4段階」であろう。これが解決の簡潔な指針として用いられることもあったし、また、この4段階を発展させた形の流れ図が提案されることもあった。発展形においては、解決過程の複雑さを反映する形で、例えば実行段階から最初の方の理解や計画の段階に戻る、あるいは計画段階と探求や分析段階との間を

往復する、といった流れが加えられる様子が見られる。

このように段階の間を行き来するような流れとして解決過程が捉えられるようになってくると、結果として、段階の間を適宜移行することが、解決過程にとって重要な特徴となってくる。Schoenfeld (1992)が示す解決過程の時間軸グラフ(pp. 356-357)は、メタ認知やモニタリングの重要性を示す調査結果を示しているが、同時にこのグラフは、6つの局面(読み、分析、探求、計画、実行、確認)の間の移行が適宜生ずることの重要性をも示しているように見える。また、Wilson ら(1993)は、4段階の間を双方向の矢印で結んだような図により、解決過程を示している。

このように、解決過程の複雑さを反映しようとした結果として、いくつかの段階を経るという捉え方から、むしろいくつかの局面の間を行ったり来たりするような流れとして、解決過程が捉えられるようになってきた。

(3) 問題解決における理解

問題の解決にあたっては、問題に与えられる条件やその目標を理解することが必要であろう。他方で、問題を解決しようと思うと、それら以外にも理解しなければならないことが出てくる(布川, 1991)。

求めるものを導くような式を立てようとするれば、与えられた条件や求めるものの間の関係を理解しなければならない。この関係が問題の中に見やすい形で与えられていることもあるが、一方で、「いくつかあげたので、残りは5つになりました」といった問題では、「あげたのだから、その分を返してもらって、残った分に合わせればよい」といったように、条件から論理的に導かれる内容を理解していくことで、条件と求めるものとの関係が見いだされることになる。図形の証明問題などは、ある意味では、こうした論理的に導かれる内容を増やしていくことにより証明が作られて

いくとも言えよう。

算数・数学の問題の中には、条件からは必ずしも論理的に導けるとは限らない条件についても、理解が求められることがある。いわゆる暗黙の前提の理解もこれに当たるであろう。例えば、34 人の人が4人がけの椅子に座るとき、椅子が何脚いるかを求める場合、算数の問題としては、9脚という答えが求められることが多い。ここには、椅子は必ず4人ずつ座る、1名でも余っていれば新たに4人がけの椅子を利用する、といった暗黙の前提が含まれている(cf. Silver *et al.*, 1993)。暗黙の条件を明示化することは有効とされる(De Corte *et al.*, 1985)が、何らかの暗黙の前提を含む問題は多いと思われるし、またそれを適切に理解できる解決者も多い。

このように、解決の中で何が理解されるのかについても、解決過程の複雑さを考慮すると、様々な可能性を含んでくる。

(4) 問題解決における知識の利用

解決を直接示唆する知識を持たないことが問題の要件であるとする、問題や問題場面を新たに捉えなおしていき、その結果として解決者の持っている知識が使えるようになるという過程が想定される。先に述べた「いくつかあげた」という場面で、これを「返してもらおう」と捉え直すことで、たし算の知識が使えるようになる。また、補助線を引くなどして既存の定理が適用できるようにすることも頻繁に行われる。

同時に、知識は問題の理解に影響を与える。例えば、問題の理解を、問題スキーマと条件・目標との対応づけとして考えることができる。問題の主な特徴・関係や未知の情報を求める手続に関わる知識のネットワークのようなスキーマに対し、直面する問題の条件・目標をそこに当てはめていくことで、問題の理解が行われる(cf. 崎谷, 1990)。このスキーマによる解決過程の捉え方は、スキーマという知

識が、問題の理解において重要な役割を果たすことを示している (Silver, 1987, pp. 48-49)。特定の知識に対し、それが今の問題でどのように適用できるかを探ることで、問題を捉えていくことになる。

3. 解決過程で生ずることへの着目

前節でとりあげた視点を考慮に入れると、解決過程を、より豊かで洗練された問題の表象を構築していく過程 (Silver, 1987, p. 44) とする見方を、比較的緩やかに解釈するという立場が浮かび上がってくる。すなわち、問題の表象ということ、スキーマとの対応づけや許された手順 (means) に基づく問題空間の構築などに限定するのではなく、むしろ、問題や問題場面に関わる理解の仕方と見て、それがどのように変わっていくかに着目するのである。そうすることで、適切なスキーマや許された手順の見当がつかない、いわば見通しの立たない状況から出発する過程を視野に入れることができ、また、解決に伴い新たに理解される様々な情報を扱うことができるであろう。また、捉え方の変化によりどのような知識が想起・適用されるようになったか、逆にその知識が適用されたことがどのような新たな理解を可能にしたか、などを問題にすることができよう。2(2)では、解決の流れを、いくつかの局面の間の移行と捉える方向に変わってきたことを述べたが、今の立場では、その移行の中で何度も現れる理解の局面に注意を向け、その前後で生ずる計画や実行、探求などを理解との関わりで考察していくことになる。

解決過程の中で生ずる理解の変化を考察することは、明確な研究分野としては現れなかったが、しかし一方で、いくつかの論文においては、解決過程を詳細に捉えようとする試みがみられ、その中で自然に上述の視点が現れてきているように見える。本節では、そうした研究において、どのようなことが示され

てきたかを概観してみることにはしたい。

(1) 情報の生成

解決過程において、解決者が理解を進めること、新たに情報を生み出すことの大切さを示すような研究がある。例えば、Lawson & Chinnappan (1994)の研究は、成功的な解決者が既有知識へのアクセスを効果的に行っていることを示しているが、その中で、新たに情報を生成することが知識のアクセスを促すことにも言及している。その際に、図2のような分析を行っており、図が拡張されたり新たな情報が生成されると右隣の列に移る。

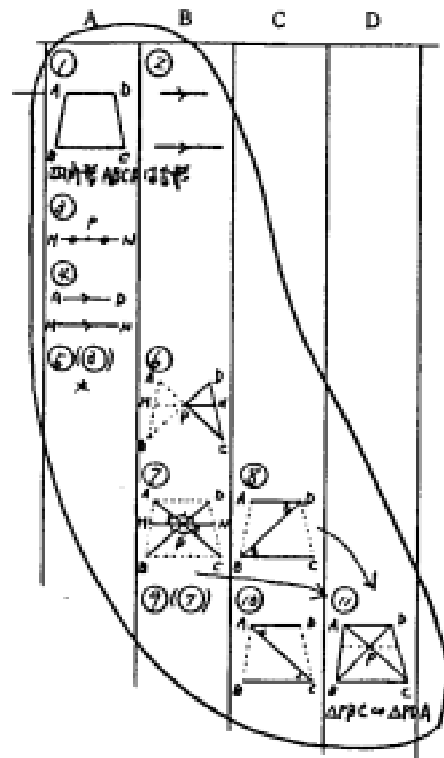


図2 情報の生成の分析 (藤田, 1999)

成功的な解決者では、この図において右に長く伸びた系列が現れることを示し、一連の情報の生成がより多く行われていることを、Lawson & Chinnappan (1994)は指摘している。

こうした情報は、問題場面についての新しい理解を構成する一方で、必ずしも解決に有用な情報ばかりが生成されるわけではない。

したがって、“豊か”になった理解が解決に向かう側面についても探求する必要がある。布川(1993a)は、こうした流れの一つとして、問題場面の再構成を提案している。そこでは、生成された情報の中から中心的なものが選択され、その情報を基本として問題場面が構成し直される様子が示されている。また、その際、新しい要素を問題場面に多く導入することよりも、今ある要素の意味づけを変えながら情報を生成することが重要であるとの指摘もある(布川, 1993b)。

解決に有用ではなかった情報が、解決過程の中では一定の役割を果たしていることも考えられる。布川(1994)は、ある軌跡を求める問題の解決過程で、そのことを示している。解決者は最初、連立方程式を解くことで軌跡を求めようとするが、これを断念し、問題場面の図をえがき、その後、図形の性質を用いて解決に至っている。しかし、図を解釈する際に、方程式を解く中で得られた情報が用いられており、解決とは直結しなかった情報の有用性が認められている。

見通しの立たない状態から、どのような情報が生成され、理解が進められていくかを見ることが、解決過程という一連の流れ全体を捉えようとする方向性が見られると言えよう。

(2)問題の成立

問題解決は何らかの条件の下で、目標とするところに到達したいと思いながらすぐには到達できないという状態から始まると考えられるが、しかし、実際に何が問題なのかが少し考えを進める中で明らかになる、という側面も持っている。

清水(1989)は、「解決者が自ら目標を設定し直し、その目標の達成を試みたこと」が観察されるとき、それを「問題の変容」と呼ぶとしている(p. 6)。清水(1989)はこの問題の変容を、メタ認知を捉えるための視点として利用しているが、その背景には、解決過程を一連

の問題の変容として捉えるという見方がある。逆に言えば、問題は最初に直面したままの形で持続するのではなく、解決過程の中で新たな目標が設定され、問題自体がその姿を変えていくのだと言えよう。その時々で、解決者がどのような問題を設定し、その達成を試みているのかということは、解決過程を我々が理解していくときの重要な視点だと言うことになる。実際、解決により設定された目標により解決過程を捉えようとする積極的な提案も見られる(Yamada, 1998)。

問題が変容するにあたっては、様々な要因が影響を与えている。村上(1990)は、解決者が問題を定式化し直していく際に、解決者が持っている数学観が影響することを示している。例えば、「証明は式で与えるものである」という数学観を持っていた大学院生は、証明を与えようような特定の式へと変形ができないか、という目標を設定している。また、どのような目標を新たに設定するかは、問題場面に関わりどのような情報を得ているかに影響を受けるであろうが、同時に、2(4)で述べたことと似ているが、ある目標を設定したことが、その後どのような情報が生成されるかに影響を与える面もある(布川, 1996)。この意味では、ある時点で設定される目標と問題場面に対する解決者の理解とは、互いに影響を及ぼしあっていると言えよう。

ある解決において「結局何が目標となるのか」、「結局何が問題なのか」が解決過程の中で変容するという面があるとともに、そもそもそのことがどうして問題なのか」といった感覚が、解決過程の中で生まれるという面もある。例えば、布川と福沢(2001)は、三角形の三辺にそれぞれ正三角形を作ったとき(図3)に四角形ADFEが平行四辺形になるのを示す、という問題に作図ツールを用いて取り組む中学生の解決過程を考察している。

その解決者は、解決を進める中で初めて、与えられた条件だけではDFとAEが平行にな

ったり長さが等しくなるのが自明ではないこ

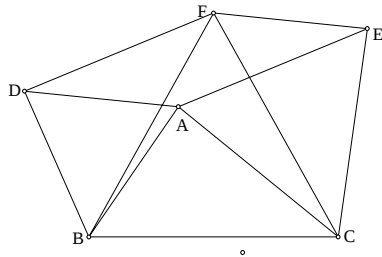


図 3

とを実感し、それらを示すことが問題となりうると感じるに至っている。問題場面を理解していく中で、問題の問題たる所以が感得されたものと考えることができよう。

以上のように、問題場面について理解を進めることと、解決者にとってどのような問題が成立しているかには、密接な関係があると言える。

(3) 助けるとなる活動

解決を助けるような活動として、図をかくこと、簡単な場合を考えることなどが提唱されてきた(cf. Schoenfeld, 1992)。こうした活動はもちろん答えを求める過程(図1参照)において有効である場合も多いが、答えを求めるまでには至らなくとも、問題場面の理解を変えていくための契機となったり、何らかの情報を提供してくれたりといった程度の貢献をすることもある。解決過程を理解の変化として捉える場合には、後者のような貢献を積極的に見ていくことになろう(布川, 1995a)。

Meira (1995) は、一次関数的な場面において生徒が表を作り、修正していく過程を細かく考察している。そこでは、エキスパートがデザインした表象を子どもが如何に解釈するかよりも、学習者が自分の表象を「実際にどのように作るか」(p. 310)に焦点が当てられている。実際 Meira (1995)は、表が作られた過程(書いた順番)などを詳細に提示し、問題場面から表が作られ、さらにその表が独自に発展していくことで解決に寄与していく様子を示している。また石田(1990)は、表を書いてパタン

を見いだしていく解決過程で、表の項目を「漸次的に設定してデータを集め」(p. 64)ていく活動を考察している。Nunokawa(1997)は、表からパタンを探っていく過程で、表の数値から帰納的にパタンを見いだすことが行われるだけでなく、推測されたパタンに基づいて一部の数値が無視されたり拒否される様子に着目している。これらの研究では、表がどのように作られるのか、そしてそこからどのように新たな情報が得られているのかに注意が向けられていると言えよう。

Stacey & Scott (2000)は、ある条件を満たす数を確定するという問題において、条件を満たす数の具体例を用いて解決をしていく過程を分析している。単に具体的な例からパタンを抽出して答えに至るといった捉え方ではなく、いくつくらいの具体例を用いているか、どのような具体例を用いたか、集められた情報をどのように用いたか、分析的な思考とのバランスはどうかなどを捉えようとしている。また、あることが真である理由に注意を向ける解決者とそうでない解決者での、具体例の用い方の違いにも言及している。

図をかくことも解決を促す活動として広く認められている。図の利用において、描かれた結果現れる図だけでなく、図を描く過程自体が意味を持ってくる場合もある。Nunokawa (1994)は、解決過程の中で描かれた図について考察し、結果としてはよく似た図であっても、その描かれた過程には違いがあること、そしてその違いが図を描いたときの問題場面の理解に対応していることに言及している。Gibson (1998)は大学生による簡単な証明問題の解決過程を分析しているが、図による表現が言語的表現に比べ、学生による概念の理解の仕方により自然に対応していることを指摘するとともに、成功的な解決者が図を修正したことに着目している。つまり、図を変化させていくことに目を向けていると言えよう。3(1)で言及した Lawson & Chinnappan (1994)でも、図を

変化させることをある種の情報の生成と見なしていた。

図の修正に目を向けるならば、図と解決者の理解が互いに影響を与えながら、それぞれ変化していく様子を考察していくことが必要になってくる。こうした過程の一つの例として、例えば、次のような流れを考えることができる(布川, 2000); 理解していることを図の上で表現→新たな要素の組み合わせが生じる→組み合わせから生じる新たな要素への意味づけ→理解の変化。この流れの場合、新たな要素への解決者による意味づけが大きな役割を果たすために、問題場面の理解の仕方が図の利用に影響を与える可能性も出てくる。つまり、要素の適当な組み合わせが図の上で生じていても、そこから新たな情報が生成されないことにもなる(布川, 2000)。問題場面の理解の変化という点から図などの利用を考えることはこのように、解決者の能動性に、より注意を向けることにつながっていくように思われる。

(4)用いられる知識

ここでの立場からすると、問題場面の理解を変化させていき、それによりどのような知識が用いられるに至ったかに注意が向けられることになる。一方で、何らかの知識が適用されることで、新たな情報が生成されることも多い。明らかな例としては、方程式を解くことで未知の量が判明したり、図形の定理が適用されることで、新たな関係が見いだされる場合がある。

ここで注意したいことは、成功的に用いられた知識だけが情報を生成する訳ではないということである。3(1)で触れた軌跡の問題(布川, 1994)では、2つの曲線の方程式を連立させて解くと軌跡の方程式が得られる、という数学的な知識が適用されているが、この知識が答えを与えてるものではなかった。しかし、これにより得られた「軌跡はサインやコサイ

ンだけで表されそうだ」という情報は、後に図を解釈する際に用いられ、ある角の大きさが一定であることを示すという解決の方針を示唆するのに役立っている。

2(4)ではスキーマが問題の理解に影響を与えることを述べたが、知識の影響としてもより緩やかな解釈が可能であろう。先の軌跡の問題では、解決者が円周角の定理の逆を用いて軌跡が円であることを計画するが、その計画以後は、問題場面の中で大きさの等しい角や補角になっている角を見つけ出していく。つまり、知識が問題場面の理解の方向性を決定していると言える。また、Stacey & Scott (2000)の結果は、パタンの発見→それをういた求答といった流れだけではなく、推測したことの論理的な根拠を求めるような形で、問題場面の理解が進められる可能性を示しているとも考えられる。推測に関わりそうな知識がやはり理解の方向性を示していることになる。

問題場面に関わる情報を提供してくれる、あるいは問題場面を理解する活動を促したり方向付けたりするという意味では、上述の知識は解決を進展させるものと言えよう。こうした見方は、いわゆる知識か考え方かという二分法が単純すぎることを示すものともなっている。

4. 今後想定される諸課題

前節で考えてきた見方をした場合に、どのような課題が可能性として出てくるかを考えてみたい。ここでは、大きく次の二つの方向を考える;(1) 解決過程のさらなる理解;(2) 学習における“過程”への援用。

(1) 解決過程のさらなる理解

Silver(1987)は、問題を構成する諸要素と内的な問題の表象との間のずれや相互作用が解決にとってもっと重要(p. 43)と述べていたが、第3節で述べた立場では、数学的知識を持った解決者が、問題あるいは問題場面という思考の対象とどのように関わっていくか、に焦

点が当てられている。この関わりの中で解決者が問題場面を理解していく過程を考察することで、前節で見てきたように、様々な解決者の様子に気づくことができる。特に、最後の解答に直接は活かされないながらも途中では一定の役割を果たす情報があることは、解決過程で生じた“失敗”にも目を向ける必要性を示唆している。さらに論理的・合理的とは言えない判断の影響をどう考えるか、という問題もある。例えば布川(1996)の解決者は、図に左右されて、ある2線分が接続して真っ直ぐな1線分になると捉え、その前提のもとに議論を展開している部分があった。しかし、その結果として解法の中に活かされうる数学的知識が想起されている。こうした過程を「創造性の基礎を培う」(伊藤, 2001)という点から検討してみることも必要であろう。

解決過程を詳細に見ていくことで、さらに様々な様相が見えてくる可能性もある。Reeve & Reynolds (2001)はペアによる解決過程でジェスチャーの果たす役割を考察しているが、個人の解決であってもこうしたジェスチャーが理解を助ける場面が考えられよう。また図の利用だけでなく、紙を折る様子(布川, 1995b)など、問題場面を表すモノに働きかける様子も考察の対象となり得よう。この延長上に、テクノロジーを利用した解決過程の考察も位置づけられる。Goldenberg & Cuoco (1998)は作図ツールの利用に関わり、解決者が自分の見ているものをどのように解釈するのかに注意を払うべきであるとしているが、3(3)で述べた図の利用に関する考察のように、作図ツールやグラフ電卓を用いて解決を行う際に、それらからどのような情報を獲得し、問題場面の理解を進めているかを考察していくことができよう(cf. 大澤, 1998)。

このように多様な要因が想定されるが、伊藤(2001)が指摘するように、それらを「連結し統合して把握することが不可欠」であり、解決過程や解決者の活動を総合的に捉えるよう

な視野を考えていかなばならない。さらにそうした視野から見た上での子どもたちへの関わり方を考えていくことは、数学教育上必要なことである。問題場面の理解を進めるものとしての解決過程という視点から支援を試みた研究が既にいくつか行われ、解決者のその時点での理解に沿いながら問題場面の理解を進めるような関わりが効果的であることが示唆されてきている(藤田, 1999; 福沢, 2002; 廣井, 2002)が、さらに教師の関わり方について調べていく必要があるだろう。

(2) 学習における“過程”への援用

問題場面を自分の数学的な知識で意味づけ、理解していく過程として解決過程を捉えた場合、数学的な知識や表現を用いた意味生成(sense-making)として数学という営みを捉えようとする立場(Schoenfeld, 1994)や、生徒の認知的な処理とそれが学習環境に与える影響との間の循環的な相互作用を重視する Owens and Clements (1998)のような立場とのつながりが見えやすくなる。つまり、学習において課題に取り組んだり思考を進めたりする過程を考察する際に、前節の視点を援用することが一つの可能性として考えられる。問題解決の指導をより効果的に行うために授業やグループというセッティングでの問題解決を探究すること(Lester, 1994)ももちろん必要であるが、同時にこれまでの解決過程に関わる視点を導入することで、個々の子どもの学習をより詳しく見ていくことが可能にならないだろうか。

メタ認知については、こうした試みがこれまでも行われてきている。例えば清水(1997)はメタ認知という視点を算数・数学の学習において取り入れ、分数のわり算の道具的理解におけるメタ認知的知識の影響や、図形の定義を生徒自身が決める際のメタ認知的活動について考察を加えている。同様に、前節で述べてきたような問題場面を理解していく過程に関わる視点を、学習場面に援用していく可

能性を、以下で考えてみたい。

新たな概念の理解においても、図などの多様な表現が用いられる。3(3)で解決過程における図の利用に関わって述べたが、学習の過程においてもそうした多様な表現から学習者がどのような情報を生成しているのか、また理解の変化に伴い学習者の表現の仕方がどのように変化していくかを追うことが考えられる。例えば、高橋(2000)は小数の乗法を学習する小学生の学習過程を考察しているが、そこで学習者のかいた図を見ていくと、似たような図であっても、それらが少しずつ変化しており、そこに累加的な理解から倍による理解への変化が反映されている。また日野(1997)は、比の表記に対し学習者の持つ意味の変化を追うことで、ある子どもの比の学習を考察している。表記自体だけでなく、表記の持つ意味やその利用の仕方の変化も、学習の過程を捉える重要な視点であることがわかる。

学習の場面では、教師なり他の子どもから新たな情報が提供される場合も多い。そうした情報の提供の状況と、ある子どもの学習過程との関わりを見ていくことは、他者のアイデアをアプロブリエート(appropriate)していく過程を探求することになる。例えば、布川と桑山(2002)は三角形の面積の求め方を学ぶ場面でのこうした過程を考察している。そこでは、求積の際の図の描き方の変化などをもとに、他者から提供されたアイデアと自分がそれまでに持っていたアイデアとの折り合いを少しずつつっけながら、他者のアイデアをアプロブリエートしていく過程が描かれている。

授業においてはある課題について考えたり、その解決について話しあったりする場面も多い。3(2)で述べたことを考えると、学習者にとっての問いが必ずしも最初から成り立っておらず、考えが進むにつれて徐々に成り立ったり、その目標が変化すること、また問いを問うことの価値が徐々に理解されるといったことが生ずることもあると予想される。問い

が成り立つ過程については、社会的なレベルでは熊谷(1989)が「問題構築プロセス」として考察しているが、3(3)のような視点を援用し、個々の学習者の中でどのような問いが生じ、変化しているかを考えることも、一つの課題となりうるのではないか。問いが成り立つかは、学習される内容の意味や価値を感得するにも必要であろうし、授業の能動的な参加にも関わる事柄である。例えば、布川(2002)の事例では、一見すると授業に集中していないように見える児童が、実は全体での話し合いとは異なる問題意識を持っており、その問題意識に応じた参加の仕方をしていたことが示されている。

学習の対象となっている問題場面や数学的内容と学習者との関わりの過程に注意を向けることで、授業の社会的な側面に注意を向けた研究を補完する視点が得られるのではないかと期待される。

5. おわりに

本稿の立場は、なるべく認知レベルにとどまりながら解決過程を詳しく見ていこうとするものであった。これは、誰かが埋めた“理解”を掘り出すというよりも、自分にとって腑に落ちるように対象に働きかけ意味づける解決者の姿に着目するものとも言えよう。この立場が、解決過程の他のレベルからの研究や、授業での社会的レベルでの考察を補うものとなるならば、数学教育の研究における今日的な価値を持ちうるものとなるであろう。

引用・参考文献

- ブラウン, J. S., コリンズ, A., & ダググイド, P. (1991). 状況的認知と学習の文化. 現代思想, 19 (6), 62-87. (原文は 1988 年)
- De Corte, E., Greer, B., & Verschaffel, L. (1996). Mathematics teaching and learning. In D. C. Berliner & R. C. Calfee (Eds.), *Handbook of*

- educational psychology* (pp. 491-549). New York: Macmillan.
- De Corte, E., Verschaffel, L., & De Win, L. (1985). Influence of rewording verbal problems on children's problem representation and solutions. *Journal of Educational Psychology*, 77, 460-470.
- 藤田尚徳. (1999). 数学的問題解決における生徒の情報の生成を促す指導に関する基礎的研究. *上越数学教育研究*, 14, 85-98.
- 福沢俊之. (2002). 作図ツールを使った証明問題の解決活動における教師の支援のあり方について. *日本数学教育学会誌*, 84 (7), 10-18.
- Gibson, D. (1998). Students' use of diagrams to develop proofs in an introductory analysis course. In A. H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education. III* (pp. 284-307). Providence, RI: American Mathematical Society.
- Goldenberg, E. P. & Cuoco, A. A. (1998). What is dynamic geometry? In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 351-367). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- 日野圭子. (1997). 一人の児童を通してみた数学的表記の内化の過程の分析. *日本数学教育学会誌*, 79, 2-10 & 70-78.
- 廣井弘敏. (2002). 算数の問題解決における図による問題把握を促す教師の支援について. *上越数学教育研究*, 17, 113-124.
- 石田淳一. (1990). パタン発見方略の指導に関する研究：抽出児の問題解決行動の分析. *筑波大学教育学系論集*, 15 (1), 57-67.
- 伊藤説朗. (2001). 研究のまとめと課題：(5)問題解決. *日本数学教育学会第34回数学教育論文発表会「課題別研究部会」発表集録*, 96-102.
- 熊谷光一. (1989). 算数・数学の授業における共有プロセスに関する考察. *数学教育学論*, 51, 3-24.
- Lawson, M. J. & Chinnappan, M. (1994). Generative activity during geometry problem solving: Comparison of the performance high-achieving and low-achieving students. *Cognition and Instruction*, 12 (1), 61-93.
- Lester, Jr., F. K. (1994). Musing about mathematical problem solving research: 1970-1994. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25 (6), 660-675.
- Meira, L. (1995). The microevolution of mathematical representations in children's activity. *Cognition and Instruction*, 13 (2), 269-313.
- 村上 豊. (1990). 問題の再定式化における数学観の影響について. *日本数学教育学会第23回論文発表会論文集*, 285-290.
- 布川和彦. (1991). 数学的問題解決における問題場面の構造の構成要素について. *日本数学教育学会第24回数学教育論文発表会論文集*, 227-232.
- 布川和彦. (1993a). 問題場面の構造の大局的再構成について. *上越数学教育研究*, 8, 19-28.
- 布川和彦. (1993b). 大局的再構成の生じた解決の特徴. *日本数学教育学会第26回数学教育論文発表会論文集*, 321-326.
- 布川和彦. (1994). 数学的問題解決における初期の活動の影響. *日本数学教育学会第27回数学教育論文発表会論文集*, 323-328.
- Nunokawa, K. (1994). Improving diagrams gradually: One approach to using diagrams in problem solving. *For the Learning of Mathematics*, 14 (1), 34-38.
- 布川和彦. (1995a). 「考え方」としてのストラテジーの指導. 古藤怜先生古希記念論文集編集委員会 (編), *学校数学の改善：Do Mathの指導と学習* (pp. 99-113). 東洋館.
- 布川和彦. (1995b). 数学的問題解決における物理的モデルの役割：四面体の問題について

- の解決過程の分析から. 上越数学教育研究, 10, 11-20.
- 布川和彦. (1996). 問題場面の構造の構成に対する下位目標からの制約. 上越数学教育研究, 11, 21-30.
- Nunokawa, K. (1997). Data versus conjectures in mathematical problem solving. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 19 (1), 1-19.
- 布川和彦. (2000). 数学的問題解決における図と情報の生成. 上越数学教育研究, 15, 9-18.
- 布川和彦. (2002). 算数の授業における一人の児童の活動とその能動性. 上越数学教育研究, 17, 45-56.
- 布川和彦, 福沢俊之. (2001). 解決過程に見られる問いと問題場面の理解. 上越数学教育研究, 16, 27-36.
- 布川和彦, 桑山仁志. (2002). 算数的アイデアのアプロプリエーションの過程に関する考察. 日本数学教育学会第 35 回数学教育論文発表会論文集(口頭発表の部).
- 大澤弘典. (1998). 中学校における数学的モデリングの指導についての研究: 生徒によるグラフ電卓の利用を視点として. 上越数学教育研究, 13, 53-62.
- Owens, K. D. & Clements, M. A. (Ken). (1998). Representations in spatial problem solving in the classroom. *Journal of Mathematical Behavior*, 17 (2), 197-218.
- Reeve, R. A. & Reynolds, F. J. (2001). The role of Gesture in co-constructing mathematical understanding. In D. Clarke (Ed.), *Perspectives on practice and meaning in mathematics and science* (pp. 231-253). Dordrecht: Kluwer.
- 崎谷真也. (1990). 問題解決における類推過程. 日本数学教育学会第 23 回論文発表会論文集, 243-248.
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, an sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York: Macmillan.
- Schoenfeld, A. H. (1994). Reflections on doing and teaching mathematics. In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving* (pp. 53-70). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- 清水美憲. (1989). 中学生の作図問題解決過程にみられるメタ認知に関する研究. 数学教育学論究, 52, 3-25.
- 清水美憲. (1997). 数学の学習とメタ認知. 日本数学教育学会(編), 学校数学の授業構成を問い直す(pp. 107-121). 産業図書.
- Silver, E. A. (1987). Foundations of cognitive theory and research for mathematics problem-solving instruction. In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 33-60). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Silver, E. A., Shapiro, L. J., & Deutsch, A. (1993). Sense making and the solution of division problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24 (2), 117-135.
- Stacey, K. & Scott, N. (2000). Orientation to deep structure when trying examples. In J. Carrillo & L. C. Contreras (Eds.), *Problem-solving in the beginning of the 21st century* (pp. 119-146). Huelva: Hergué.
- 高橋久誠. (2000). 小数の乗法の授業構成に関する考察: 比例の考えをもとにして. 上越数学教育研究, 15, 85-94.
- Wilson, J. W., Fernandez, M. L., & Hadaway, N. (1993). Mathematical problem solving. In P. S. Wilson (Ed.), *Research ideas for the classroom: High school mathematics* (pp. 57-78). New York: Macmillan.
- Yamada, A. (1998). A study on cognitive process in mathematics problem solving: Segmentation of problem-solving process. 日本数学教育学会第 31 回数学教育論文発表会論文集, 371-376.