数学の対象に対する実感と感情の表出

布 川　和 彦

１．はじめに

算数・数学の学習に見られる感情については、これまでにも取りあげられてきた。教科としての算数・数学の好き嫌いについては多くの調査で調べられている。また、高橋(2000) では、教師の持つ内面を調べる際にも、算数・数学の学習や授業に関わる情意的側面に注目しているが、教師の発言を見ると、教科ないしはそのある内容に対する好き嫌いや面白いかどうかといったものとなっている。動機づけの問題との関わりでは、算数・数学を学習する際に示される、興味（「面白そう」、「おや？」）や自信、不安といった側面に注意が向けられてきた。例えば、松岡(1992) は個人の解決過程の中でのこうした側面に注意を向けており、また横塚(1997) は、McLeod の情意反応グラフを利用して、数学の授業における生徒の情意の変化を調べている。さらに、布川(1999) は、生徒に意外性を感じさせる算数・数学の授業について考察しているが、これは関心の文脈において議論されている。

感情は、ある状態や対象に対する主観的な価値づけであり、「美しい」など対象に関するものと、「快い」など主体自身に関するものを含むとされる。先に述べた横塚(1997) の場合に扱われていたのは、「わくわくしてやる気になった」、「できてうれしい」、「まちがいを指摘されてがっかり」といった、自己に対するものであり、松岡(1992) の解決過程に見られる自信や不安も、同様である。これに対し、布川 (1999) では、数学的な処理と現実場面での処理との関わりから生ずる意外性や驚きが扱われているが、これは現実場面を数学的に処理することに対する価値づけとも考えることができる。松岡 (1992) が興味として取りあげているものは、あるきまりが他の場合にも成り立つかやってみたいといった、自分が考えている数学の内容に向けられたものとなっている。本稿では、最後にあげた、数学の内容に向けて表出された感情を取りあげることにしたい。

２．中学生の解決過程に現れた感情の例

数学の内容に向けられて表出された感情の例を、福沢(2001) の示す中学生による解決過程の中からいくつか拾ってみたい。この解決過程は、平面図形に関する問題を解く２名の女子（阿川と野田、いずれも仮名）からなるペアのものである。ただし、この解決においては「カブリ・ジオメトリー」という作図ツールが利用されている。作図ツールは図形の学習のためのソフトウェアであり、点、直線、円などの基本図形を作図し、その長さや角度を測ることができるだけでなく、平行や直角といった条件を保ちながら、図形を連続的に変形することができる。例えば、四角形の各辺に中点をとり、隣り合う中点どうしを結んだ図形を考えると、作図ツール上では、各辺の中点が結ばれているという条件を保ったままで、もとの四角形の形を自由に変えることができる。

<u>場面１</u>：場面１は、阿川と野田が次のような問題を解決する過程において見られたものである。

問題１「四角形ABCD を作図し、辺AB の中点をP、辺BC の中点をQ、辺CD の中点をR、辺

DA の中点を S とする。このときそれぞれの中点を結んでできる四角形PQRS はどんな四角形になりますか？」（図１参照）

阿川と野田は作図ツール上でいくつかの四角形をとり、それぞれについてのPQRS を作って、どのような四角形になるかを調べている。ABCD として最初は平行四辺形をとり、次には図１のような「台形っぽい」（阿川）四角形をとり、いずれもPQRS が平行四辺形になることを見出している。次に「とびきりゆがんだ」（阿川）四角形を作るが、このときもPQRS が平行四辺形になることがわかると、「何か許せない」（野田）と感じている。さらに、「四角形と呼べる代物でしょうか」と評した、図２のような凹四角形についてもPQRS が平行四辺形らしいとわかると、以下のような会話をしている（発話の前の番号は福沢(2001) におけるプロトコルの番号に対応する)。

294　阿　やーだ、やーだ、先生例外がない、ふふふ、つまんない、つまんない、

295　野　例外持たないでよ、

296　阿　え、世の中例外で生まれてきたんだよ、

297　野　そうなの？ふふふ、

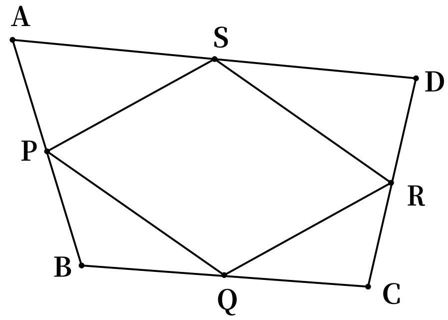

図１

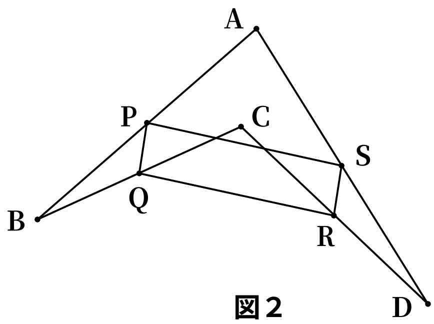

図２

ABCD として「ゆがんだ」形をとれば、PQRS は平行四辺形のような特別な形にはならないであろうという彼女らの期待は裏切られ、そうした結果について「つまんない」という感情を表している。ただし、彼女たちの発話の様子からは、真剣に「つまんない」というよりも、かなりふざけた言い方になっている（発話がふざける中では以下の発話でも同様)。

<u>場面２</u>：次の会話は、場面１で作られた図２の図形をなぞりながらなされている。

304　阿　美しい、

305　野　美しい？ふふ

306　阿　美しい、

ふざけた様子の中ではあるが、図２のような四角形を、単に「へこんだ」といった形状だけではなく、「美しい」という言葉で形容している。

<u>場面３</u>：図２のあとで、気づいたことをまとめる際に、以下のような発話が見られた。

337　阿　どんなにゆがんだ四角形でも平行四辺形になってしまった、惜しくもでもい

いし、ふふふ、へへへ、悔しく、へへ、悔しい、悔しい、

338　野　括弧惜しくもってつけとく？

339　阿　うん

図２のような形でも PQRS が平行四辺形になることに対し、「惜しい」「悔しい」などと評している。これに対しては、さらに次のような会話がなされた。

412　阿　考えてみるとどんなにゆがんだ四角形を描いても平行四辺形になってしまうという、

413　野　うん、

414　阿　なんたる矛盾点、っていう、

415　野　ふふふ、

416　阿　いらいらしてくる、ふふふ、

417　野　腹がたってくるね、

418　阿　ね、例外を見つけたいけど、例外というのは、たぶん五角形とか、うふふふ、

彼女らは ABCD としてどのような四角形をとってもPQRS が平行四辺形になることを「矛盾」と表現し、それに対してふざけながらではあるが「いらいらしてくる」「腹がたってくる」といったコメントをしている。

<u>場面４</u>：解決の後半では、中点連結定理（△ABC の２辺AB と AC の中点を結ぶと、その線分はBC に平行で長さはBC の半分になる）を今の問題に適用する仕方を探っていた。阿川は、ある線分を引くと中点連結定理が適用できることに気づいた際に、以下のように発話した。

931　阿　いやーすごいいとこに気がついた。真ん中だよ、真ん中に線を引くとすごい面白いことが起こるよ、絶対、たぶん、絶対とか言ってたぶん、

ここでは、線分を退いた後の状態を「すごい面白いことが起こる」と表現している。さらに、定理を適用して野田に説明をする中では、以下のような表現が見られた。

945　阿　（中点連結定理により）なんと、これ AC と RS）　２：１だから平行でしかも長さ一緒やん、

959　阿　（中点連結定理で）なんと、平行やって、で終わり、

ここでは、定理の帰結を述べる際に、「なんと」と言葉を加えている。なお、問題１の解決を振り返る中では、阿川は次のように発話している。

1028　阿　どんなにおかしな図形にしたって、なる、

<u>場面５</u>：阿川と野田による２回目の問題解決では、次の問題が取りあげられた。

問題２「△ABC がある。BA を１辺とする正三角形BAD を△ABC の外側にかき、AC を１辺とする正三角形ACE を△ABC の外側にかき、BC を１辺とする正三角形BCF を△ABC の内側にかきなさい。△ABC の形状によって四角形AEFD の形が変わる。どんな四角形がで

きるか調べ、それぞれの時、もとの三角形はどのようになるかを追究しなさい。」（図３）

この解決の後半部で、△ABC が二等辺三角形の場合に互いに合同になる三角形（△DBF、△ABC、

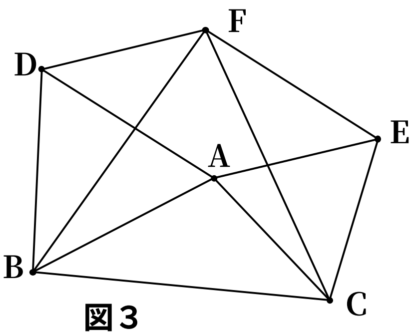

図３

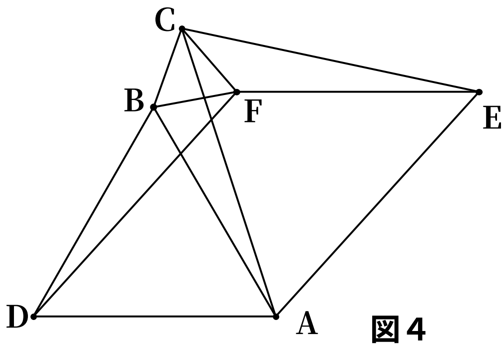

図４

△EFC）が見出された後、「めちゃくちゃ変な三角形」（阿川）を作った（図４）。この図を描くにあたって、以下のような会話がなされた。

784　阿　三角形変にするってどうなるの、不思議な図形大好き、

785　野　あとで泣くのは阿川ちゃんよ、

さらに、この△ABC をもとに問題で与えられた図形を作図する過程では、次のように発話している。

804　阿　平行だよ、かわいい、

805　野　かわいい、

806　阿　かわいい、超かわいい、で、

807　野　で、結ぶんだよね、

808　阿　うん、ぼくが作るとほら、こんなにきれいな図形ができるよ、

ここでは、図形に対して「不思議な」と述べたり、「超かわいい」と述べたりしている。

３．数学の内容に向けられた感情

松岡 (1992) は興味に関わり「おや？」「なぜ？」「不思議だ」といった感情を取りあげていたが、阿川と野田のペア、あるいは同じ問題を、やはり作図ツールを用いながら解決する他の男子生徒のペアにおいても、こうした「おや？」「どうして？」といった感情が見られた（福沢2001; 布川、福沢, 2001）。作間 (1999) は、授業を面白くする工夫ではあるが学習内容とあまり関係のないものが勉強の「糖衣錠」であるのに対し、学習内容から生ずる驚きや不思議さを感ずることは「素材の味を味わうこと」だとしている。この意味において、問題１と問題２を解く過程でそれぞれのペアで見られた「おや？」「どうして？」といった反応も、数学の内容に向けられた感情である。

上で取りあげた事例においては、数学の内容に向けられながらも、「おや？」などとは少し異なる感情も見られる。例外があると思っていたにも関わらず、どんな四角形についてもある性質が成り立つことに関しては、「やーだ」「つまんない」「惜しくも」「悔しい」「いらいらしてくる」「腹がたってくる」といった感情が表わされている。同様のことは、男子ペアについても見られ、問題１の

解決で図２のような場合にも PQRS が平行四辺形になることを見出した際には、以下のような会話をしている。

712　山　どこいっても平行四辺形なんだ、

713　野　角があれになるだけ、

714　山　それでも平行四辺形じゃん、

715　野　すごい、

つまり、図 2 のような場合にも同じ結果になることに対して「すごい」という感想を述べている。一方で、画面上に現れる図形について「美しい」（場面２）、「きれい」（場面５）といった表現のほかに、「おかしな」（場面４）や「不思議な」（場面 5）、「（超）かわいい」（場面５）といった評価をしている。

このように、「おや？」のような疑問だけでなく、多様な感情が数学の内容に対して表出されているのである。美しさについては、長谷川(1989)が、算数に関わる美しさを論じた先行研究を考察し、算数の美しさを大きく二つにまとめており、その一つとして、図形の対称性などの美しさ、数の並びに見られるリズム、幾何学模様などの数や図形が持つ調和やリズムの美しさについて議論している。しかし、そこでは、美しさを子どもが感じることが目指され、そのための教材や指導の工夫について議論がされている。上で見た事例では、生徒は自分で作った図形について「美しさ」を感じている。しかも、その図形は特に対称性などを持つものではなく、むしろ、解決の中で「四角形と呼べる代物でしょうか」「めちゃくちゃ変な三角形」として作られたものに対するものであった。

女子のペアの楽しそうでふざけたような発話の仕方からすると、彼女たちが本当に「美しい」と思ったとは言い切れないし、また、教師側も図形の中に対称性や調和を認めてほしいと考えていた場面ではなかった。しかし、少なくとも「美しい」、あるいは「かわいい」「おかしな」と評するような実感のある対象として、生徒たちは図形を感じていたものと思われる。

図形について成り立つ結果や性質についても、同様の傾向が見られる。例えば、男子のペアが問題２を解いている中で、作図ツールで図形を動かしながら、次のような発話をしている。

588　野　なんだなんだ、ほら、ほら、怪奇現象だ、これは、ほら、この形きれいじゃない、

さらに、問題２で四角形 AEFD の対辺どうしが平行になることが、与えられた条件だけからでは自明でないことに気づくと、

650　山　怪奇だね、

とまた「怪奇」という言い方をしている。「怪奇現象」という言葉には、そのときに図形について生じていることが何らかの「できごと」であると生徒が感じている様子がうかがえる。しかも、それを「怪奇」と評しており、そのできごとを実感を伴うものとして感じているように思われる。上の場面４において、阿川が中点連結定理の適用の仕方に関わり、「真ん中に線を引くとすごい面白いことが起こるよ」と発話していたが、この「起こる」という言い方も、図形の中に何らかのできごとを見ていることをうかがわせる。ある補助線を引くことで、定理が使える状態になることを、「すごい面白いことが起こる」と、できごとのように表現しているのである。定理から

得られる帰結を述べる際には「なんと」という言葉を加えているが、そうした帰結もできごとの一環でとして感じているのであろう。

作図ツールを利用した場合、図形の性質やそこで成り立つ命題などは画面上に観察できる形で現れ、しかも動しながら観察できるので、できごととして感じやすいという面がある。しかし、生徒たちが発する感情に関わる言葉を見るとき、性質や命題をできごととして感じることには、静的なものが動的に提示されることを越えた何かがあるように思われる。先に、彼らが図形を実感のある対象として感じていたのではないかと述べたが、こうした感情をともなって向き合うことのできる対象について成り立つ命題だからこそ、できごととして実感を伴って感じられたのではないだろうか。そして、そうした対象についてのできごとだからこそ、どのようなことが起こりそうかの期待が生まれ、その期待との関わりにおいて、今度は、できごとに対しても「やーだ」「悔しい」「すごい」といった感情を表現しているのではないだろうか。このように考えてくると、上で見てきたことは、実感を伴って対象を感じることの、いくつかの現れとも考えることができる。

４．作図ツールと対象の実感

作図ツールの環境では図形を連続的に動かすことができるので、そこで成り立つ命題も「形がくずれる」「図形をゆがめても平行四辺形のまま」といったできごととして感じやすい。しかし、ある対象を理解したり経験することに関わる先行研究を参照すると、作図ツールを用いることは、対象となる図形を、実感を伴って感じることにも有用であることがわかる。

守屋 (2000) は、文字を手で写すことで、それらが互いに意味づけをしあい、自らの素性を明らかにしてくるという白川静の文章を引用して、白川が「資料を完全に制御しうる状態」にすることと述べたことを、ことばを「からだ化」することとして論じている(p. 99)。ここに、文字を単に読むだけでなく、実際に手を使って書いてみることで、文字の「素性」が次第に現れてくる様子が伺える。文字を手で写すことを、文字に対して人が働きかけることであり、その働きの中から明らかになる素性があり、文字が「からだ化」すると考えるならば、文字との相互作用の中で文字についての実感と理解が深まる様子と言えよう。

これは、高橋 (1992) が経験について述べていることと呼応する。彼は、デューイを引きながら、経験を、対象と相互作用しつつ、ある意味世界を不断に構成し続けていく営みとして考えている(p. 103)。また、今日の状態が断片化された情報である「〜についての知識」に満ちあふれ、「それと相互作用しつつ自己の思考を深めていくことのできる原物（オリジナル）の見えにくい社会」であることを指摘し、知識を構成したり対象を理解するために、対象との相互作用、つまり対象にはたらきかけ、反作用を受けながら、実感的に、イメージ豊かに認識していくことが大切であるとも述べている (pp. 37-39)。

数学の対象である式や関数についても、それを処理すべきプロセスと見ることを越えて「モノ化」することは、対象に施す操作と密接に関連していると考えられている。Sfard (1991) は、数学的対象が手続き的な過程から「モノ化」することで生まれると考えているが、数学的対象へと実体化 (reified)

することの特徴の一つとして、それに対して操作が施されるようになることをあげている。また、操作を施すことが実体化を促すとも考えられている。

実感を伴う対象との相互作用は、対象の理解を深めるとともに、対象への次の関わり方を示唆することにもなる。

上野 (1999) は、「連続的に展開する行為の流れは、暗黙知の実現というよりは、あくまで、加工されて変化する対象や道具を含めた相互行為の展開である」(p. 30) と述べている。彼の事例を見ると、対象へ働きかけ、その結果生ずることが可視化されると、対象の中に次の道筋が見えてくる、といったようにして行為が進んでいるように思われる。

数学を考えている際にも似たようなことが生じている。例えばNunokawa (1997) は、問題解決の中で立体を紙で作り、そこに働きかけながら思考を進めた事例を考察している。立体への働きかけにより、対象についての理解が深まり、また対象への意味づけや関わり方が変わるなどの様子が見られる。また、布川と福沢 (2001) の考察は、対象への理解が深まることで、何を調べるべきかの焦点がしぼられ、同時に「どうして？」という気持ちが強くなる様子を示している。

このように考えると、対象への働きかけが大切であり、逆に相互作用を通してあるものが実感を伴った対象になるとも言えよう。そして、対象との相互作用の中でそれについての理解が深まり、対象についての思いをめぐらすことができたり、対象に対して感情を持つことができるようになる。だとすると、図形や図形からなる状況に関わって思いをめぐらしたり、感情を持つためには、図形との相互作用が必要であるが、作図ツールは、図形に働きかけることを可能とし、また働きかけたときの反作用が現れやすいようにもなっている。こうした環境の中で、上で見たような、図形やそこに成り立つ性質を実感を伴って感じられるようになり、それらに対する感情が表出したのではないかと考えられる。

フィールズ賞を受賞した小平 (2000) は平面幾何を「紙の上に定木とコンパスを使って描いた図形に見られる現象を研究する自然科学、すなわち図形の科学」(p. 18) と表現しており、さらに描いた図形を「平面幾何の研究の対象」と、図形を描くことを「図形の科学の実験」と呼び、物理学の実験を精密に行わなければならないのと同様に、図も正確に描かなければならないとしている(p. 19)。作図ツールでは図を正確に描くことができ、しかもそれを変形できるので、多くの事例を描いた（すなわち多くの実験を行った）のと同じ効果を持つ。しかし、上での議論を考慮するならば、作図ツールにおいては、自分で図形に働きかけることができるということ自体にも、意味があると言えよう。それにより、対象との相互作用が可能となり、対象についての実感や理解も深まっていく。その中で、対象や、対象について起こる現象についての感情も生まれてくるものと考えられる。

５．おわりに

感情を「ある状態や対象に対する主観的な価値づけ」としたとき、そもそも状態や対象を実感することがまず必要なのであり、そのためには対象となるものとの相互作用が必要なのであろう。それは、犬をなでたり、犬と遊んだりすることで、犬のことがわかり、また愛着を持つようになることと似ているのかもしれない。ここでは作図ツールとの関わりで図形について考えてきたが、数、式、関数を

対象と考えたときに、そこでの相互作用はどのようになるのかも考えていく必要があろう。

ホフマン (2000) は、ハンガリーの数学者エルデシュにとって素数が「仲のよい友達」であり、彼が誰よりもよく素数を理解していた、といった表現で、数学をする人と数学の対象との関係を述べ、また、実在とより直接的な関わりを持つのが数学者であるという、英国の数学者ハーディの言葉を紹介している。数学の営みに参加している人にとっての数学的概念とは、実はそのような実感を伴ったものなのであろう。我々教師が、子どもに算数・数学についていろいろと考えてほしいと願うならば、数学の対象が、子どもたちにとって「仲のよい友達」であるようにも配慮するべきであろう。そして、「仲よし」になる普通の方法は、一緒に遊んでみることなのではないだろうか。

引用・参考文献

福沢俊之. (2001). 証明問題の解決活動における作図ツールの役割についての研究. 上越教育大学大学院学校教育研究科修士論文 (未公刊).

長谷川弘司. (1989). 算数のよさや美しさを味わう指導. 上越数学教育研究, *4*, 97-106.

ホフマン, P. (2000). 放浪の天才数学者エルデシュ. 草思社.

小平邦彦. (2000). 幾何への誘い. 岩波書店. (初版は 1991 年)

松岡宏之. (1992). 数学的問題解決におけるaffect に関する研究. 上越数学教育研究, *7*, 89-98.

McLeod, D. B., Craviotto, C., & Ortega, M. (1990). Students' affective responses to non-routine mathematical problems: An empirical study. In G. Booker et al. (Eds.), *Proceedings of PME XIV* (vol. 1, pp. 159-166). Mexico.

守屋慶子. (2000). 知識から理解へ：新しい「学び」と授業のために. 新曜社.

Nunokawa, K. (1997). Physical models in mathematical problem solving: A case of a tetrahedron problem. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 28* (6), 871-882.

布川和彦. (1999). 算数・数学の授業における意外性. 上越数学教育研究, *14*, 11-20.

布川和彦, 福沢俊之. (2001). 解決過程に見られる問いと問題場面の理解. 上越数学教育研究, *16*, 11-20.

作間慎一. (1999). おもしろさが生まれるメカニズム. 授業を考える教育心理学者の会 (編), いじめられた知識からのメッセージ (pp. 120-125). 北大路書房.

Sfrad, A. (1991). On the dual nature of mathematical conception: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 1-36.

高橋　等. (2000). 成人のもつ数学的知識の様態：算数・数学を専門としない教師を調査参加者としてのグループ・ディスカッション法による調査から. 上越数学教育研究, *15*, 19-28.

高橋　勝. (1992). 子どもの自己形成空間：教育哲学的アプローチ. 川島書店.

上野直樹. (1999). 仕事の中での学習：状況論的アプローチ. 東京大学出版会.

横塚昌平. (1997). 数学の授業における生徒の情意の変化に関する研究：情意反応グラフを手がかりとして. 上越数学教育研究, *12*, 155-164.