

算数・数学の問題解決的な授業と子どもたちの学習

上越教育大学学習臨床講座 布川 和彦

1. 算数・数学における問題解決的な授業

問題解決的な授業には算数・数学を作る過程を子どもたちにも経験してもらうという側面もあるが、同時に、新しく学ぶ算数・数学のアイデアについて子どもたちによりよく理解してもらうという面も持っていると考えられる。つまり、問題解決を通して新たなアイデアと出会うことにより：(1) そのアイデアが自分の既に持っている算数・数学のアイデアとどのように結びついているのかを知ることができる；(2) 既に持っている算数・数学のアイデアだけでは対処できないどのような場面にとって新しいアイデアが有効なのかを知ることができる (Nunokawa, 2005)。通常の単元の中で問題解決的な授業が扱われる場合には、こうした面が特に大切になってくると思われる。その単元で学習する算数・数学的なアイデアの新たな側面を、問題解決を通して子どもたちに感得してもらうのである。

こうした授業では子どもたち自らが算数・数学のアイデアを生み出したり、その新たな側面に気づいたりするなど、主体的な学習が生まれると期待されることが多い。しかし、一方で以下のような問題点も指摘されている。

「教科教育の専門家や学校の先生は、見学した授業の中で何人かの子どもたちがそういう活発なやりとりをしているのを見て、非常に良い授業だと評価するかもしれませんが、しかし、そこで『自分で考える』といっても、なかなか考えが進まない。他の子どもたちのやりとりが、いったい何を言っているのかがよくわからないような子どもたちにとっては、たいへんつらい授業で、一時間が終わった時に何が残っているだろうかと言え、自分は十分参加できなかったという悔いのようなものになってしまうかもしれない。[中略]一人一人の学習者がどういうふうな理解状態とか、学習意欲とか、満足感をもってその授業を終えたかということが、ややもすると見過ごされてしまう。」(市川, 2001, pp. 162-163)

こうした問題点が指摘されたときに問題解決的な授業を捨てることは簡単である。しかし上述したような利点もあるとすれば、こうした批判が生じる原因を探り、問題解決的な授業をよりよいものとするのも一つの採るべき道であろう。そこで、以下では原因のいくつかを探ってみたい。

2. 本当に考えるべき問題

「他の子どもたちのやりとりが、いったい何を言っているのかがよくわからない」という状況が起こる原因の一つとして、皆が何を問題にしているのかがよく分からないということが考えられる。実際、私たち大人でも、話し合いが進む中で一部の人たちの議論についていけなくなった際に感じるのが、「彼らは何をそんなにもめているのか」という疑問ではないだろうか。算数・数学の授業でも、「要するに何が問題なの？」「結局何を考えた方がいいの？」「どうしてそんなこと考えるの？」ということがクラスで共有されていなければ、問題解決的な授業がその利点を生かすことは難しくなると思われる。

例えば、小学校5年生の÷小数の導入時において、次のような問題を扱ったとしよう：

「1.6で320円のジュースがあります。このジュース10分のねだんを求めましょう」。よく知られているように、ここには少なくとも3つの課題が隠されている。すなわち、(1) $320 \div 1.6$ というわり算の式を見出すこと、(2) 10分の値段を求めること、(3) $320 \div 1.6$ の計算の仕方を考えること、であり、教科書もそうした課題にそった問いを設定している。この導入を扱った授業を拝見したことがあるが、子どもたちから活発に意見や質問が出されているのだが、そこで出された意見や質問は(1)～(3)に関わるものが混在していた。このように混在した場合、特に算数の苦手な子ほど「何が問題なの?」「何を考えたらいいの?」が不明確になり、市川(2001)が指摘するような状況が生まれやすいと考えられる。

こうした場合に例えば、(2)から(3)への課題の移行において(2)に関してクラスで共有された結論(10分の値段は200円)を確認するとともに、(3)の課題を新たにクラスの中で共有し、ここでは「何が問題なのか」「何を考えなければいけないのか」「なぜそれを考える必要があるのか」を再度確認する場面が必要と考えられる。実際、(2)の10分の値段を考えることはジュースについての場면을対象として考えているのに対し、(3)の計算の仕方を考えることは求める操作や手続き自体を対象としており、話しが違っている(Gravemeijer, 1997)。ちなみに(1)は除法に関わり自然数の範囲から小数の範囲までの拡張を意図している。したがって、2mや3mのときを考えれば $320 \div 1.6$ となるのが自然であり、そうなるように「したい」というのが正直な話ではないだろうか。つまり、(1)、(2)、(3)はまったくレベルの異なる課題と考えることができ、それだけに「今は何を考えたらいいのか」を子どもたちがその時々で共有できるようにすることが意図的に行われる必要がある。

中学校1年生の文字式の導入でも同様のことが生じているのではないだろうか。マッチ棒でできた正方形あるいは正三角形をいくつかつなげたときに、必要な本数を求め、□個つなげたときの本数を表すところから文字式の導入につなげる授業がよく見られる。場合によっては3個、あるいは10個程度を具体的に調べ、いくつの場合も同じようにできるからと進める場合もある。しかし最近の調査(国立教育政策研究所, 2006)を見ても、4個と6個の場合がわかっているときに100個の場合をイメージできたのは6年生でも49%にとどまっている。自然にそうした拡張が生じないとすれば、そのための問題の移行を意図的に行うことが考えられる。つまり、上のわり算のときと同様に操作や手続き自体を考察の対象とするという問題をクラスで共有することになる。例えば100個の場合をあえて取り上げるとマッチ棒の場面自体を考えることができなくなり、結果としてこれまでの操作や手続き自体が考察の対象となろう。そのときに私たち教師が「どうしたら求められるのか」を問題として設定することで、「今は何を考えたらいいのか」を明確にできるのではないだろうか。

本当に考えるべき問題はもちろん何でもいいというわけにはいかない。それは一方で子どもたちが算数・数学の既有知識を用いて取り組んできたそれまでの活動から生まれるものでなければならぬし、他方ではこれから学ぶ新たな算数・数学のアイデアの価値や威力を示すものでなければならない。そうした問題が授業の適当な時点で共有される必要があろう。

3. 子どもの納得を支えるもの

問題解決的な授業により「一時間が終わった時に何が残っているだろうか」という気持ちに子どもたちがならないためには、本当に考えるべき問題にまつわる疑問がそれぞれの子どもなりにすっきりと解け、それにより新たな算数・数学のアイデアと出会えることが

必要であろう(cf. 古藤ほか, 1990)。前節のわり算の例で計算の仕方を考えることが問題となった場合、新たなアイデアである小数のわり算の筆算との出会いを準備すること、その結果として、自然数の場合と同様に考えられることから除数が小数の場合にも拡張できるという感覚を持てること(つまり前節の(1)の問題が解決すること)が大切と思われる。したがって、(計算の仕方の問題に関わっては) 1ℓの値段が求まればよいのではなく、計算の仕方の中の自然数のわり算との連続性が話題となる必要がある。「なんだ、自分の知ってるわり算に直せるんだ」「この計算で確かに1当たりが求まるんだ」という感覚が持てたところで前節の問題(3)が解消されたことになるろう。

問題解決の中でそうした面に目が向くためには、もちろん1.6を10倍すると16になる、あるいは1.6は0.1の16個分といった前提となる知識の理解も必要である。しかしそれに加えて「既有知識に帰着できるとよい」という価値観もクラスで共有されていなければならない(Nunokawa, 2005)。場面によっては「いつでも使える方がよい」「簡単にできる方がよい」といった価値観が求められることもあろう。こうした算数・数学的な価値観は「社会=数学的規範」(Cobb & Yackel, 1998)と呼ばれるが、それはクラスの中で長期的に育成せざるを得ないものである。逆に考えれば、今クラスで共有されている価値観によれば、どのような形でこれから学習する算数・数学のアイデアとの出会いが作れるかを考えて、授業が組み立てられることになるであろう。

また、前提となる知識のうち比較的に見えにくい部分への配慮も必要であろう。小数のわり算で子どもたちの納得は、「1あたりを求めるにはわり算をする」という理解(白石, 2006)、および「除数と被除数に同じ数をかけたり割ったりしても商は変わらない」という理解に支えられる。これらの知識は授業の中で何らかの形で扱われているが、自然数の筆算の仕方ほどにはレディネスとしては意識されていないように思われる。小数のわり算の授業の中でこれらの確認を始めると、「今何が問題なの？」が再び曖昧になってしまう。上の価値観にしろ、見えにくい知識や理解にしろ、納得を支える基礎となるためには、当該の授業時にはそれらが自然なものとなっていることが必要であろう。またそれを可能とする長期的なカリキュラム構成が、実は問題解決的な授業を支えていることがわかる。

前節で取り上げた文字式の導入の場合、100個の場合の求め方について納得ができるためには何が必要だろうか。一概には言えないだろうが、一つの直接的な方法は、実際に100個の場合を生徒が納得しやすい方法で(例えば実際の100個のときの図を用いて)確認するということが考えられる(cf. 谷沢, 2001)。算数・数学においては論理的な説明により納得することはもちろん重要であるが、子どもたちのすっきりしたという感覚を大切にすれば、具体例に訴えるものや体感的なものを含め多様な納得の道筋を用意してもよいのではないだろうか。ただし、具体例に訴えたとしても、上述のような価値観や見えにくい知識の問題は残る。文字の利用と出会うためには、「いつでも同じに表せる方がよい」という価値観を共有していることや、 $(1 + 3 \times 3)$ 本のような表現、つまり $+$ や $\times$ が入った式を1つの数値として見る式の二面性(板垣, 1998)に慣れていることなどが前提となる。

納得の素地を育成するという点からは、見えにくい知識の部分を直接的に考える問題解決的な授業を事前に行うことも考えられる。例えば白石(2005)は発泡スチロールの棒と秤を用いて、わり算が1あたりを求める計算であり等分とは別物であることを、子どもたちと正面から考えるような授業を提案している。これは上で述べた小数のわり算で必要にな

る見えにくい知識を扱った問題解決的な授業と言えよう。また山本(2005)は無理数についての式の二面性を直接扱った問題を生徒に提示しているが、そこでは豊かな話し合いが生じていることが伺える。これらの問題を考えておくことが、別の場面での問題解決的な授業での納得を支えることになる。同時に、それまでの長い学習の中で子どもたちの中に生じてきたしこりに関わり、本当に考えるべき問題を教師が明確にしてあげることにもなるのではないか。こうした子どもたちの疑問を直接取り上げるような問題解決についても、検討していてもいいのではないだろうか。

4. 問題解決的な授業と理解

冒頭で述べたように、通常の単元の中で問題解決的な授業が扱われる際には、新しいアイデアや、以前に学習したアイデアの新たな側面と子どもたちがよい形で出会い、その理解が深まるようにすることが大切である。問題解決やそれに関わるクラスでの話し合い自体が目的のようになってしまうと、アイデアとの出会いやその理解が見えにくくなってしまいうこともあろう。また市川(2001)が指摘するように、ともすると子どもの活動や話し合いが生まれたことに私たちが満足してしまう危険性もある。算数・数学的なアイデアに対する私たち自身の感動を、子どもたちにも経験してもらええるための手だてとして、問題解決的な授業を有効に用いる方策をさらに深めていく必要があるだろう。

引用・参考文献

- Cobb, P. & Yackel, E. (1998). A constructivist perspective on the culture of the mathematics classroom. In F. Seeger, J. Voigt, & U. Waschescio (Eds.), *The culture of the mathematics classroom* (pp. 158-190). Cambridge: Cambridge University Press.
- Gravemeijer, K. (1997). Mediating between concrete and abstract. In T. Nunes, & P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics* (pp. 315-345). Hove, England: Psychology Press.
- 市川伸一. (2001). 学ぶ意欲の心理学. PHP 新書.
- 板垣政樹. (1998). 中学生の文字を用いた説明についての研究: 文字式の二面性の理解を視点として. 上越数学教育研究, 13, 43-52.
- 国立教育政策研究所. (2006). 特定の課題に関する調査(国語, 算数・数学). <http://www.nier.go.jp/kaihatsu/tokutei/index.htm>.
- 古藤怜, 新潟算数教育研究会. (1990). 算数科・多様な考えの生かし方まとめ方. 東洋館.
- Nunokawa, K. (2005). Mathematical problem solving and learning mathematics: What we expect students to obtain. *Journal of Mathematical Behavior*, 24, 325-340.
- 谷沢浩明. (2001). 文字式の学習過程に関する研究: 事象と文字式の関連に焦点を当てて. 上越数学教育研究, 16, 69-80.
- 白石信子. (2005). 子どもの理解に基づいた小数のわりざんの指導について: 数直線への比例的な見方を通じた意味の拡張. 上越数学教育研究, 20, 163-174.
- 白石信子. (2006). 小数のわり算における子どもの学習過程に関する研究: 数直線への比例的な見方の操作に基づく授業を通して. 上越数学教育研究, 21, 69-80.
- 山本晋平. (2005). 子どもどうしのコミュニケーションによる数学の理解の変容についての研究. 上越数学教育研究, 20, 109-120.