上越数学教育研究, 第 16 号, 上越教育大学数学教室, 2001 年, pp. 27-36.

解決過程に見られる問いと問題場面の理解

布川　和彦
福沢　俊之*

1. はじめに

問題がもともと、「それに直面している人が解を見出すことを欲したり必要と考えている」(Charles & Lester, 1982, p. 5)ものであるならば、解決に際して何らかの疑問を持つことは、大切なことだと言える。特に証明問題を考えたときに、Hanna (1996) が述べる「説明する証明」というアイデアに関わり、なぜを問うことが大切となる。彼女は、証明する証明と説明する証明を区別しているが、前者が「何が真であるか」に関わるのに対し、学校数学で特に重要とされる後者は「なぜ真であるのか」に関わるものだからである。

本稿では、証明問題に取り組む過程において、「なぜ」「どうして」という問いが発話の中に現れた事例を取り上げ、分析を行う。その際に、類似の問いが繰り返し問われていることに着目し、その問われ方の変化や問いを支える要因について考察していく。

2. データの収集

以下で考察する事例は、著者の一人（福沢）が東京の公立中学校において行った調査からのものである（福沢, 2001）。この調査は、中学生が証明のアイデアを見出す際にカブリがどのように役立つかを調べること、また事前に計画された教師の介入の効果を調べることを目的とした。生徒はカブリの使用経験がなかったので、最初に基本的なコマンドの説明や基本的な作図の練習を３時間行った後、２回の解決のセッションを行った。各セッションで取り上げられた問題は以下の通りである。

問題１：四角形 ABCD を作図し、辺 AB の中点を P、辺 BC の中点を Q、辺 CD の中点を R、辺 DA の中点を S とする。このときそれぞれの中点を結んでできる四角形 PQRS はどんな四角形になりますか。（垣花, 清水, 1997；改題）

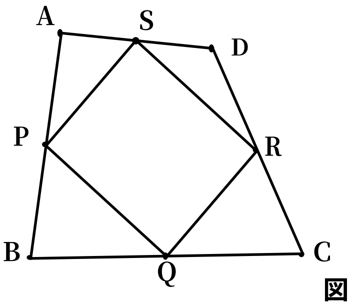

図１

問題２：△ABC がある。BA を１辺とする正三角形 BAD を△ABC の外側にかき、AC を１辺とする正三角形 ACE を△ABC の外側にかき、BC を１辺とする正三角形 BCF を△ABC の内側にかきなさい。このとき四角形 ADFE はどんな四角形になりますか（能田, 中山, 1996；改題）

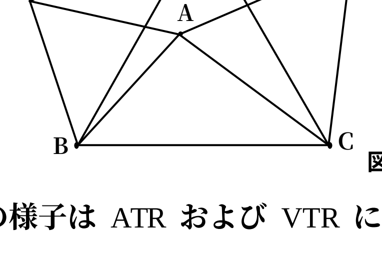

図２

解決の様子は ATR および VTR により記録さ

＊ 上越教育大学大学院修士課程２年

れ、それに基づきプロトコルが作成された。

以下では男子２名からなる野川と山田（仮名）のペアの解決過程を取り上げ、その中で生じている問いについて考察していく。

３．問題１の解決における問い

3.1 解決の概要

(i) 四角形 ABCD として見た目に基づいて長方形を作り、各辺の中点を結ぶ。PQRS の対角線を引き、対角線の交点 O を作り、PO、QO、RO、SO の長さを測定した。見た目にはひし形として、PQ、QR、RS、SP の長さを測った。平行四辺形に言及し、「対角が等しい」として∠RSQ を測定したり、"平行？"コマンドで PS//QR をチェックした。さらに、PQRS の面積を測定しようとして失敗した。

(ii)辺の長さを整えようとして点 D をドラッグしたことで ABCD が長方形から崩れたときに、平行四辺形に言及した。∠PSQ、∠PQS、∠RQS も測定し対角が等しいとし、C や D をドラッグしても等しいと発話した。「平行四辺形の『定理』に錯角が等しいがあった」とし、測定値からこれも成り立つと述べた。

(iii)「決定的証拠」として面積を求めようとし、辺の長さを整えて PQRS を取り出そうとした。それをあきらめた後、∠SPR、∠QPR、∠SRP、∠QRP を測定し、それらが等しいことを確認して平行四辺形と結論づけた。

(iv)調査者が測定値に依存しないよう介入した。新たに ABCD として長方形のような形をとり、PQRS の対角線を引き、∠SOR、∠SOP、∠POQ、∠QOR を測定した。△POQ≡△ROS を示せば PQ＝SR で「錯角も同じ」とわかるとし、合同をチェックするコマンドを探した。

(v) 調査者がいろいろな四角形を考えるようにと介入した後、最初の図 ((iii)まで用いていた図)の頂点をドラッグする中で ABCD を凹四角形にし、凹四角形でも PQRS が平行四辺形になることに気づいた。次に、ABCD を長方形、そして台形のようにした。

(vi) 調査者がカブリの機能を使うよう介入すると、"正多角形"コマンドで正方形を描き、PQRS とその対角線を引き、SO と QO の長さ、∠PSR、∠PQR、∠SRQ、∠SPQ を測定し、正方形と言えるとした。そして「結局どんな四角形でも平行四辺形になる」と述べた。

(vii) 調査者が図を動かしてみるよう介入すると、各頂点をドラッグし、C を動かしても P と S が動かないこと、B を動かしても AD と DC、あるいはそれらの中点には「影響が来ない」ことに気づき、平行四辺形になるとした。また B をドラッグしても PQ の長さがなぜ変わらないのかと山田が発話した。

(viii) 調査者が Q と R は動いているのに長さが変わらないのはどうしてかと介入すると、野川は QR が△CQR の底辺であることに触れたのに対し、山田はなぜ動かないのかと発話した。Q と R の動き方や頂点と中点で作られる三角形（△CQR 等）により説明をしていたが、△APS と△CQR の大きさが全く異なっても PS＝QR であることに気づいた。

(ix) C のドラッグ中に、変わらないものを調査者が問うと、山田は C 以外の頂点に言及した。また PO と RO の変わり方が同じことや、錯角にある角が同じになることにも触れ、なぜいつも SO＝QO なのかと発話した。

(x) 調査者が作図の再現を行うよう介入し、2 回目の再現の各中点を結ぶ箇所で、山田は中点どうしを結ぶとなぜ対辺が同じ長さになるのかと発話した。調査者が、非表示のコマンドにより ABCD と PS、QR、O だけを表示した状態で C をドラッグさせ、対辺が等しくなることを説明できないかと介入すると、山田は O が一緒に動くからいつも同じなのではないかと発話した。時間が 98 分を過ぎており、調査者により解決活動が終了された。

3.2 解決過程で見られた問い

問題１の解決では、ひし形の場合を独立して答えるかどうかの検討はあるものの、四角

形 PQRS が基本的には平行四辺形になることは、作図をし辺の長さや角度を測定した後すぐに見出されている。最初の長方形のような図について(ii)で D をドラッグした時も、以下のように発話し、PQRS が平行四辺形になるという結論は当然のことのようにしている。

279　山　どんな四角形になりますか、四角形っていうのは簡単だよ、ああ、平行四辺形っていうのは簡単だよね、
280　野　うん、平行四辺形じゃない、だって、
281　山　向かい合う辺等しいしね、
282　野　向かい合う辺も等しいし、角も等しいでしょ、

「決定的な証拠」を求めて、PQRS の面積に着目した際には以下のように発話した。

350　山　平行四辺形には見えるんだよね、でも平行四辺形って言い切れないんだよね、

しかし、∠SPR、∠QPR、∠SRP、∠QRP を測定した後、対辺、対角、「錯角」が等しく、対辺が平行であることを理由に平行四辺形と結論した。ここまでは、PQRS が平行四辺形になることに関わり、問いは生じていないように見える。

その後、(v)ではドラッグの途中で偶然、凹四角形が現れ、その場合にも PQRS が平行四辺形になることが見出されている。これについて野川は「すごい」と感想を述べているが、山田は「本題に戻るか」として、ABCD を長方形のような形に変えている。

710　山　ちょっとそれでも平行四辺形だよね、
711　野　ああ、なにげに平行四辺形、
712　山　どこいっても平行四辺形なんだ、
713　野　角があれになるだけ、
714　山　それでも平行四辺形じゃん、
715　野　すごい
716　山　///平行四辺形でしょ？さて、じゃ、本題に戻るか、

凹四角形のような、「中点が結べない」として例外的に考えていた場合にも平行四辺形になることについて、特に問いを発してはいない。

(vii)で野川が、点 B をドラッグしても AD や DC の中点である S と R には影響がないことを説明した。

856　野　この点[C]を動かすとなんか、
858　野　P と Q、あ、S と P が動いてない。そうだよね、S と P が動いてない。
860　野　動いてない、
862　野　これ[D]だと P と Q、
863　T　P と Q が動いてない、
864　野　一応うん、気がついた、
866　山　何で動かないんだ？
867　野　中点だから、
869　野　だってこの B を動かすとさ、
871　野　BA と BC の長さは変わるけど、
873　野　AD と DC の長さは変わらないから中点は変わらない、
874　山　うーん、

その後、画面上では点 B がドラッグされているが、そこで山田は PQ の長さだけ変わらないことについて問いを発している。

896　山　なんでここ [PQ]だけ長さ変わらないんだ？
898　野　中点が一緒だから、
899　山　変わらないのか、ここがさんざん短くなってもね、
900　野　うん、
901　山　変わらないや、
902　野　中点、中点だからね、なんてったって、長さが変わったら中点も、あれでしょ、ちゅ、常に中間にいるわけでしょ、中点、
903　山　こっから、ど、どうしてだ？なぜいっくら動かしても平行四辺形なんだ、
904　野　中点が動かないからじゃないの、
905　山　だよね、っていうか、///中点だからね、

山田は PQ の長さが変わらないことに何度か言及し、「なぜ」という問いを発しているが、野川の方は中点だからという理由を繰り返している。しかも、この段階においては、山田の方も中点だからという理由に、最後は落ち

着いているように見える。

　このやりとりに対し調査者が Q と R は動いているのに QR の長さが変わらないのはなぜかと介入すると、点 C をドラッグしていたが、山田は「なんで動かないんだ」と問いを発し、さらに C をドラッグした後、次のような説明を試みた。

952　山　これ[PR]がつながっているからかな？これ[C]、上[R]、もってこうとするとさ、これ[C]上にいくけどこれ[Q]もついてくるような感じになるじゃん、で今度、下、下げようとすれば、追いかけるような形になるじゃん、

それに基づき、山田は「そんな感じで長さが、変わってないような」としている。ここでは、点どうしが連動して動くという、問題場面のメカニズムをもとに、QR の長さが一定であることを説明しようとしているように見える。しかしさらに点 C のドラッグをしている途中で、「なんで変わらないの」(山 970) と再度問いを発っしている。このすぐ後で、ドラッグを続ける中で、次のようなことを見出した。

973　野　ここ[C]を動かしたらこの長さ[CQ, CR]変わるんだよね、もちろんね、変わるんだよねえ、で、ここ[QR]は変わらないんだよ、

そして、以下のような発話がなされた。

986　山　これ、どう減ってくのかわかればさ、わかるんじゃない、

987　野　一方があがる場合もあれば、一方が下がる場合もあればさ、両方ともあがる場合もあるし、

988　山　まあ縦にこう動かしたら [C を上にもっていきながら]こことここも差 [CR の長さ]が縮まるからね、あれだ、ここってね、一緒になる、

ここでは、△CRQ に着目し、３辺の長さが相殺されることで QR の長さが一定に保たれていると理解しているものと考えられる。実際、

1006　野　もしここ[QR]が動いたら、ここ[CQ]の長さ、変わんないんだろうね、

という発話も見られた。

　しかしドラッグにより△APS と△CQR の大きさが全く異なるにも関わらず PS と QR の長さが等しくなることに気づき、さらに点 C をドラッグして QR に重なるようにした後では、

1048　山　なんで変わんねえんだ、

とまた問いを発した。さらに点 D、A、B をドラッグしながら、

1059　山　どう動かしても長さが変わらないっていうのは不思議だね、

と発話した。

　(ix)で PO と RO の変わり方などが等しいことを述べた後で、山田は PO=RO や SO=QO が常に成り立つことに関して問いを発している。

1104　山　なんで交点までの長さが変わんないんだろうね、考えると、

1108　山　S から交点までの距離と、

1110　山　Q から交点までの距離が、

1113　山　なぜいつも同じなんだろう、

1115　野　中点だから、

1116　山　そうかなあ、

野川は依然として「中点だから」という理由をあげているが、前と異なり、山田はその理由を受け入れているように見えない。

　(x)で作図の再現を行っている途中では、山田は以下のような問いを発した。

1154　山　なんでさ、１本１本の長さぜんぜん違うのにさ、この中点とこの中点をつなぐと対辺は同じ長さになるんだろうね、

1155　野　うーん、

1156　山　中点までの距離[AS や AP 等]もぜんぜん違うはずなのにさ、中点と中点をつなぐとさ、同じ長さになってる、

1157　野　うーん、

これについて調査者がもう一度言ってくれるよう頼むと、山田は次のように説明している (1161〜1191)；「え、あのー、最初、A、B、C、D ってとって、で、長さ、全然気にしてなくて、全然、１本１本全然違う長さの、辺でで

きた四角形なんだけど、中点とって、その中点を線分でつなぐと、その線分の対辺、対辺っていうか、ま、対辺ですね、対辺は同じ長さになってる、ってのが不思議で、線、１つ１つ線分までの距離も、全然違うはずなのに、A と S までの距離も違うし、A から P までの距離は、違うはずですし」。

ここでは、最初の四角形 ABCD が任意にとられたものであり、したがって、４辺の長さの間に特別な関係が想定されてはいないこと、また PQRS についても中点を結ぶという条件のみで決定されているだけであり、長さに関わる制約は課されていないことが言及されている。さらに、そうした辺などの長さについての制約が何も規定されていないにも関わらず、PQRS の対辺どうしが同じ長さになってしまうことへの不思議さが表明されている。

解決過程における問いを見たときに、次のようなことに気づく：(1) 後になるほど、問いが問題場面のメカニズムとの関わりにおいて発せられていること；(2) 問題場面のメカニズムとの関わりで問いが発せられるようになると、パートナーの「中点だから」といった説明では納得しなくなっていること。プロトコル番号 280 前後では、四角形 PQRS が平行四辺形になるという現象にのみ注意が向けられ、問いは発せられていない。900 前後では点 B をドラッグしても PQ の長さが変わらないことや、平行四辺形のままであることに対して問いが発せられているが、「中点が動かない」という理由により、問いは解消されているように見える。この途中で、点 B を動かしたときに AB や BC が短くなることに触れたと思われる発話がなされたが、それは以下のようであった(899, 901)：「ここがさんざん短くなってもね、変わらないや」。つまり、AB や BC が短くなることと PQ の長さが変わらないことが対比されているものの、前者との関わりで後者を不思議と感じているようには見えない。

しかし 952 での山田の発話では、QR の長さが変わらないことと、他の要素の動きとの関係が述べられている。さらに△CRQ に着目し、CR や CQ の長さが増減することで QR の長さが一定に保たれる、とするような考えが見える。一方で、こうした問題場面との関わりによる QR の長さの説明が失敗すると、1048 や 1059 のような問いが発せられている。さらに山田は SO=QO となることへの問いも発している (1104-1113) が、野川の「中点だから」という説明に対しては、今度は「そうかなあ」と反応している。その直後に C がドラッグされた状態で、調査者が位置の変わらない点を問うと、野川が S、P をあげているのに対し、山田は B、A、D をあげており、さらに調査者が Q、R、C は「動いているよね」と介入すると山田は「うん」と反応している。このことから、山田の QR の長さに関わる問いは、C をドラッグすると Q や R が動くという問題場面のメカニズムと関わって問われていると考えることができる。そうした問いの性質が、「中点だから」という説明を安易に受容しない対応をさせたと言えよう。

1154, 1156 での山田の問いは、上でも見たように問題場面の構成の仕方と、 SP=QR や PQ=SR という現象との間の関係に注意が向けられている。この両者の間のギャップから問いが発せられていると考えられる。なお、こうした問いに対しては野川は「中点だから」といった説明は行っていない。

４．問題２の解決における問い

<u>4.1 解決の概要</u>

(i) 作図で AB を１辺とする正三角形を描くのに、AB の垂直二等分線上に点 D をとって AD と BD を結び、D を動かして角度を 60°にした。同様のやり方で作図を完成し、見た目では平行四辺形と述べ、AEFD の４つの角を測定した。DF と EF の長さを測定し、前に測った AD の長さと EF が一致しないことに気づき、おかしいとした。

(ii) 測定の途中で図が崩れてきたので、新たに、(i)と同じやり方で作図をした。測定により、対角どうしが 0.1°、対辺どうしが 0.02 違うことに気づいた。調査者がドラッグにより正三角形の条件が成り立たなくなることを指摘すると、描き方に問題があることに触れ、新たな作図を始めた。しかし角度を 60°にするやり方をしていたので、調査者が事前に作図してあったファイルを開くよう介入した。

(iii) ファイルを開き、A をドラッグすると図形「全部」が動くことを確認した後、AEFD の４つの角の大きさと４辺の長さを測定した。A をドラッグしていたが、平行四辺形であると述べた。ドラッグを続け、A を C と一致させたり F と一致させたりし、その中で山田がなぜ平行四辺形になるのかと発話した。コマンドにより AE//DF、AD// EF を確認し、結論としては平行四辺形だと野川が発話した。

(iv) 対辺が等しく対角が等しいから平行四辺形としていたが、調査者がどうして動かしても変わらないのかと尋ねると、探求を再開した。A、C のドラッグの中で山田が、なぜ対辺が平行になるのかと発話した。野川は A と F が一致した場合に F が中点になるのではないかを気にし、山田は FB と EB に対して中点連結定理が使えないかを考えていたが、B、A、E が一直線にないことを確認した。

(v) 調査者がカブリの利用を促すと作図の再現を行い、線分 DE を結ぶ時点で、なぜ対辺が平行になるのかと山田が発話した。さらに測定の利用を促すと新たに CE、AC、AB、BD、BC の長さを測定した（以前の測定は AEFD の４辺のみ）。∠DBF と∠FBA を測定してすぐに消し、FB と FC の長さを測定した。

(vi) 調査者が動かしても変わらないものを尋ねると、線分 AC、AB をドラッグし、野川は AB を動かしても△ABD が変わらないとし、山田は動かす点が入っていない三角形は変わらないとした。調査者が△ABC を特別な三角形にしてはどうかと介入すると、正三角形、そして二等辺三角形にした後、野川は△FBC 以外の全部の辺が 8.59 になっていることを述べた。山田は DF がなぜ 8.59 になるのかと発話した。さらに、△ ECF と△DBF がなぜ二等辺三角形になったのかと発話した。

(vii) 頂点や BC のドラッグの後、再び△ABC を二等辺三角形にし、山田は ABC を「基準にしてみる線」と BFC を「基準にしてみる線」でできていると発話した。また山田は BF と BD が決まることから、「自動的に」DF が決まると発話した。EF についても同様のことが言え、二等辺三角形なら対辺が等しくなることが言えることを、二人で確認した。

(viii) 点 A が動いてしまった直後に、野川は△ABC が△DBF、△ECF と「同じ大きさ」であることを見出し、山田は△ABC を B や C を「軸」にして動かすと△BDF や△CEF に重なると述べた。調査者が３つの三角形はいつでも同じかと尋ねると、A をドラッグして確かめ、さらに DF と AC が同じようにしか変わらないことを見出した。調査者が三角形が同じになることと AEFD が平行四辺形になることの関連を尋ねると、C を軸にして動かすと EF＝AB、条件より AB＝AD となることを指摘し、AD＝EF で平行とわかるからと説明した。"平行?"コマンドが説明に使えないことに気づくと、AEFD の対角が等しいことに言及し、角度が等しければ平行とした。110 分を過ぎたので調査者が解決を終了させた。

4.2 解決過程で見られた問い

問題２についても、作図をして測定した結果として現れた現象をもとに、四角形 AEFD が平行四辺形になるとすぐに述べている。

160　野　どんな四角形になりますか、

161　山　見た目では平行四辺形、

長さの表示が平行四辺形という結論に合わないときにも、単純に結論を捨てることなく、「ミスったんじゃん？」「おかしいんじゃないの、どっか」のように、ソフトやその使い方

に原因を求めているように見える (*cf.* Nunokawa , 1997)。ここでは、なぜ平行四辺形になるのかに関わる問いは見られない。

(iii) で、教師の用意したファイルを用いた時点で、以下のような問いが発せられている。

528　山　動かすと全部動くよ、
529　野　なんで？
530　山　わかんない、
531　野　ああ、全部動いてるね、すばらしいね、どうする？

生徒による作図が見た目に依存するものであり、問題場面の各要素が連動して動くものでなかったことを考慮するならば、ここでの問いはそうした作図に関わるものであり、平行四辺形になることの理由に関わるものではないと考えることができる。

(iii)で、点 A をドラッグして BC 上に持ってきた様子を見た後に、山田からなぜ平行四辺形になるのかという問いが発せられている。

552　山　それじゃ駄目じゃん、
553　野　ははは、え、でも一応 ADFE じゃん、四角形、これもなにげにあれでしょ、OK なわけでしょ、
554　野　偶然こうなるわけじゃないでしょ、
555　山　何か隠されてる、[A をドラッグして]
563　野　こんな感じかな、また平行四辺形でしょ、こいつは、
574　山　どこ動いても平行四辺形だね、
582　野　形は平行四辺形なんだよ、
583　山　なんで平行四辺形なんだ・・・
588　野　なんでなんだ、ほら、ほら、怪奇現象だ、これは、ほら、この形きれいじゃない？[A が BC 上にある状態から A と F が一致する状態へ]
589　山　平行四辺形・・・
590　野　そうだよな、平行四辺形だよな、
591　山　なんで平行四辺形？
592　野　え、だって対辺が等しいじゃん、
593　山　だよね、

ここでは、なぜ平行四辺形になるのかという問いが発せられるとともに、かなり特殊な場合にも平行四辺形になることが偶然ではなく、背後に「何か隠されている」と考えられている。しかし、AEFD が平行四辺形になるという現象は、問題場面の特定のメカニズムと関連づけられて述べられてはいない。そして、問いに対して野川が「だって対辺が等しいじゃん」と説明すると、山田の方も「だよね」として、それを受け入れているように見える。実際この直後、平行であることをチェックするコマンドを用いるよう山田が提案し、それにより対辺が平行であることが確認されると、「もういいでしょ」として、平行四辺形という結論に同意している。

(iv)で調査者の介入に応じて、山田は「なぜ[対辺や対角が]等しいの」、「なんで平行四辺形なの」という問いをしている。さらに、野川が点 A をドラッグしている際に、山田から問いが発せられている。

644　山　なんで A 動かすと D, E が動くんだろうね、そこが疑問だよ、
647　野　だってそれは、正三角形の頂点だからじゃないの？D と E は。AEC と ADB の正三角形の頂点だから、
648　山　なんでその対辺が平行になるんだよ、
649　野　こいつ[C]動かすと D と A は、
650　山　怪奇だね、

ここでは、対辺が平行になることが、点 A の動きに伴って D と E が動くことと関連づけられて問われている。野川の正三角形の頂点だからという説明をすぐに受け入れてはおらず、問いをより明確化するとともに、問題となっている対辺が平行になるという現象を、「怪奇」として特徴づけている。つまり、生じている現象に対して意外性を感じていると言えよう。

野川が点 C、さらに A を大きくドラッグする中で、山田はさらに問いを発している。

662　山　なーんで平行四辺形なんだろう、これさあ、長さが違う正三角形のさあ、せ

いさ、正三角形にしたくせにさ、対辺が同じ長さになるんだよ、

674　山　平行四辺形っていうのはわかってるんだ、どうやって平行四辺形になるのか、

675　野　そこが問題なんだよ、それがわかれば苦労しない、

676　山　っていうか何で平行四辺形になっちゃうんだ、

山田の発話を見ると、「長さが違う正三角形」を作ったにも関わらず、対辺の長さが等しくなってしまうということが述べられており、問題場面の構成の仕方と生じている現象とが関連づけられて問われている。野川も「そこが問題なんだよ」として、何らかの説明を与えることはしていない。

(v)の作図の再現を繰り返す途中でも、対辺が平行になることに関わる問いが見られる。

779　山　なんでこの線[DF]を引いたときにもう対辺が平行なんだろうね、

803　野　[FC を引くところまで戻して]ここからだと線分で結ぶだけなんだよな、

804　山　[F がとられた時点で]このあたりから怪しいんだよな、

「このあたりから怪しい」という発話に見られるように、３つの正三角形が作られた後の DF を結ぶという手続きが、問いと関連づけられている。

この問いに先立って、作図の再現の中で、もとの三角形 ABC の頂点がとられた時に、次のような発話も見られる。

767　山　え、この点 [A、B、C]っていうのはもうほとんどめちゃくちゃ、

つまり、頂点 A、B、C が特に何らかの性質を持つものではないことが、改めて意識されている。AEFD が平行四辺形になることが、もとの三角形の頂点の取り方とも関連づけられ、先の問いが発せられていると考えることができよう。

また、この問いの後では、BD と AB が同じ長さというのはわかる（825　野）とか、測定されていない FB の長さが「わかっている」（832　野）と述べており、与えられた条件から等しくなる長さに注意を向けている。

(vi)で線分 AC や AB をドラッグした時点では、それぞれ△ACE と△ABD が「変わらない」ことに、さらに点 A をドラッグしたときにはその点が「入っていない」△BCF は「変わらない」ことに言及している。その後△ABC を二等辺三角形にしたところ多くの辺が 8.59 になったが、調査者がなんで全部 8.59 になるのかと問うと、次のような問いが見られた。

947　山　この２本[DF, EF]はさ、8.59 になる理由はわかるけどさ、その上の２本がさ、なんで 8.59 になるかわかんないんだよね、

955　山　あ、ABC、あ、ABD の

957　山　三角形が

959　山　三角形の辺が全部 8.59 になれば、

961　山　ここ[AD]もやっぱ 8.59 になるし、

963　山　こっちも同じように[AC のあたり]

965　山　なるけど、上の２本だけは、ただ単につないだだけの線なのに、

ここでは DF を結ぶ部分が「怪しい」というのではなく、むしろそこは「ただ単につないだだけ」なのに、AE と平行になってしまうことに問いが焦点化されている。これ以前の彼らの活動を考えると、３つの正三角形によって問題場面の基本的な構成が決定されてしまい、したがって点 D や E もこの時点で既に決定されていることが意識化され、それが問いを支えたものと考えることができる。

なお、上の発話の直後には表示された長さに基づき、△EFC、△DBF、△ABC が二等辺三角形であることに気づいているが、これについても単に現象の観察に留まらず、「なんで二等辺三角形になったの」（981　山）と問いを発している。これが、(vii)以降で３つの三角形の合同に気づくことにつながっていったと考えられるが、EF や DF がなぜ特定の長さになるのかわからないから、この二等辺三角形に

ついての問いがなされていると考えると、この問いも、問題場面の理解に支えられたものと言えよう。

問題２についても、最初の段階では AEFD が平行四辺形になるという現象について問いは発せられていないが、590 前後で特殊な形でもやはり平行四辺形になることが示されたときには、なぜ平行四辺形になるかという問いを山田が発している。しかしこのときは、野川の「対辺が等しい」という説明に対し、それで納得しているように見える。その後 645 前後で、点 A が動くと D と E も動くにも関わらず、なぜ対辺が平行になるのかと問う時点では、野川の「正三角形の頂点だから」という説明の後も「怪奇」と述べており、670 前後で問題場面の構成の仕方と問いが関連づけられているときには、野川の方もすぐに説明を与えることを避けている。804 の問いから、問題場面の探求を経て、960 前後の問いで、問いが問題場面とより具体的に関連づけられた際には、３つの二等辺三角形に注目するという山田の探求に、野川の方も一緒に関わっていった。

このように、問題２における解決過程でも、問いは徐々に彼らの問題場面の理解と関連づけられるようになり、それにともない、安易な説明では解消されないようになっていると考えることができる。

5．問いと問題場面の理解

本稿で取り上げた事例においては、調査者の介入の影響も大きく、また証明とは何かについての理解の問題もある。さらに彼らが結論を妥当化するのに「証明」ではなく「証拠」を集めようとしたことは、van Hiele の第２水準の様相を示しているように思われる。こうした点から見て、上記の事例で、如何にして問いが生まれたかを論ずることは、容易ではないであろう。しかし、発せられた問いについては、前節までに見てきたような特徴を見出すことができた。すなわち、結論に関わる問いが、徐々に問題場面についての理解と関連づけられるようになり、またそうなると安易な説明では納得しにくくなっていた。

Balacheff & Kaput (1996) は、作図ツールによって幾何学的な性質についての命題が観察できる幾何学的な現象になると述べ、その現象が実験のフィールドで起こると表現している (p. 476)。本稿で取り上げた解決過程でも、作図ツールにより、命題の結論にあたる部分はフィールドである問題場面で起こる現象として容易に観察されていた。これに加え、仮定の条件により規定される問題場面のメカニズムが作図ツールを用いた探求により解決過程の中で明らかにされることで、既に見出されていた現象が自明のものでないことが気づかれていっている。作図ツールは図形の幾何学的な性質を明示化することを促すとされるが（Mariotti & Bartolini-Bussi, 1998; 辻, 1997）、本稿の事例では各図形の性質が明らかにされるだけでなく、問題場面のメカニズムとそこで起こっている現象とのギャップが見出されていた。そして、そのギャップが問いを生み出していたと言えよう。

布川(1999)は、意外性を感じるには、対象についての期待を持っていることが必要であると述べているが、そうした期待を持つには対象についてある程度の知識を持つことが求められるであろう。その意味で、問題場面のメカニズムが見出されていくに従い、現象の非自明さに気づくことは、自然なことと言える。例えば問題２で、線分 DF が AE と常に平行で同じ長さになるという現象を、山田は自明ではないと感じるようになっていった。これは、与えられた条件では DF が AE との何らかの関係を持って引かれるわけではない、という問題場面についての知識を前提としている。

また理解をアイデアや事実のネットワークと考える立場 (*cf.* Hiebert & Carpenter, 1992) からすれば、問題場面に関わる事実などと結び

つくことで、問い自体もよりよく理解されるのだと考えることもできよう。問題場面を理解していくことは、解決にとって重要である (*cf.* Nunokawa, 2000) だけでなく、そもそもの問いを理解することにとっても大切だということになる。

こうした問いの発生は作図ツール環境に限らず見られる。例えば久保田(1994)は、問題の理解を促す発問として、解決者の問題場面の理解に「インパクト」を与えるような発問の重要性を示している。彼の事例では、５×５のマスの中にある正方形の数を数え上げる問題で、５×５＝25 より 25 個と答えた６年生のペアに対して、調査者が「先生が数えたら 55 個だったの」と介入している。生徒は驚きながら「55？55 っていうのは多いんじゃない、ね、30、30 個探すの」「ガーン、55、55 ね」と発話した後、問題場面の探究を熱心に行っている。ここでも正方形が 55 個あるという現象が提示されただけでなく、解決者が自分なりの帰結（25 個）を導く程度に問題場面を理解している。自分の理解から導かれる帰結と提示される現象とのずれが次の探究を誘発していると見ることができよう。

６．おわりに

本稿では、問題で示すべき事柄に関わる問いが、徐々に問題場面についての理解と関連づけられ、安易に解消しにくくなる様子を見てきた。この点を考慮に入れたときに、問題を理解するとはどのようなことかを、改めて考えてみる必要があろう。

引用・参考文献

Balacheff. N. & Kaput, J. (1996). Computer-based learning environments in mathematics. In. A. J. Bishop *et al.* (Eds.), International handbook of mathematics education (pp. 469-501). Dordrecht: Kluwer.

Charles, R. & Lester, F. (1982). *Teaching problem solving: What, why & how*. Palo Alto, CA: Dale Seymour.

福沢俊之. (2001). 証明問題の解決活動における作図ツールの役割についての研究. 上越教育大学大学院学校教育研究科修士論文 (未公刊).

Hanna, G. (1996). 学校教育における証明の役割 (磯野正人訳). 上越数学教育研究, *11*, 155-168.

Hiebert, J. & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-97). New York: Macmillan.

垣花京子, 清水克彦. (1997). コンピュータ環境下での証明の機能の変化に伴う学習活動の具体的な検討. 日本数学教育学会第 30 回数学教育論文発表会論文集, 379-384.

久保田敏也. (1994).問題意識の質的変容を促す発問に関する一考察. 上越数学教育研究, *9*, 73-84.

Mariotti, M. A. & Bartolini Bussi, M. G. (1998). From drawing to construction: Teacher's mediation within the Cabri environment. In A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol 3, pp. 247-254). Stellenbosche, South Africa.

能田伸彦, 中山和彦. (編著). (1996). 自ら学ぶ図形の世界. 筑波出版会.

Nunokawa, K. (1997). Data versus conjectures in mathematical problem solving. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 19* (1), 1-19.

布川和彦. (1999). 算数・数学の授業における意外性：解決過程の図式を視点として. 上越数学教育研究, *14*, 11-20.

Nunokawa, K. (2000). Heuristic strategies and probing problem situations. J. Carrillo & L. C. Contreras (Eds.), *Problem-solving in the beginning of the 21st century* (pp. 81-117). Huelva: Hergué.

辻　宏子. (1997). コンピュータ環境での作図活動の効果. 日本数学教育学会誌, *79* (11), 329-337.