数・計算・測定[1]

–算数教材の整理のための覚書–

上越教育大学　布川和彦

（2017 年 6 月 23 日版）

０．基本的立場

本稿は、小学校算数で扱う数と計算、ならびに数と計算を利用する内容について、その基本的な捉え方を、できるだけ統一的に説明する試みである。算数の内容の数学的基礎を与えるというよりも、算数を教える側としてその内容を整理すること、ただしその際に関連する内容の間の整合性をとりながら整理することを目指している。具体的には、以下のような希望をもって整理を試みる。

・算数では具体物を用いて数や計算の学習をするので、量と数との関係を意識しながら整理できるようにしたい。
・算数では自然数、０、小数、分数とそれらの計算を扱うが、それらを同じ土俵の上で展開できるように整理したい。
・算数では計算の学習と数量関係の学習とが密接に関連しながら進展していくので、数量関係についても同じ土俵で展開できるように整理したい。

数や計算についていくつかの公理を置き、そこから数学的な証明を積み重ねて数と計算の領域を構成する方法もある[2]。しかし歴史的には、数学的に再構成される前から、数や計算は日常的な場面の中で構成され、利用されていただろうと推測し、また算数で扱う場合には具体物の操作や日常的な感覚を出発点として指導することも多いことからも、本稿では日常的な感覚に沿った公理や定義をもとにするよう心がけた[3]。また途中の議論でもそうした感覚を持ち込んだ部分があり、そのために数学的な厳密性は欠いてしまっている。そうした議論でも、算数の教材研究の上から、数学的な裏付けが有効な部分については適宜修正していきたい。その修正により、算数で数や計算、あるいは数量関係の内容を学習する際に、どのような数学的な議論を経験や日常的な知識で補っているのかや、どのような推論が前提となるのかが、より明確になるものと期待している。

---

1 本稿は LibreOffice を用いて作成し、和文フォントとして IPAex 明朝とゴシックを用いた。また適宜内容を更新する予定であり、どの版も決定稿ではない。

2 例えば、彌永(1972)、瀬山(1996)はペアノの公理に基づき構成している。大竹(1995)は全順序集合にいくつかの公理を入れて自然数を構成している。他方で高野(2007)は n が自然数のとき n+n と n+(n+1)も自然数になることを公理として設定し、自然数を構成する試みを行っている。フォン・ノイマンによる自然数の構成を含め、いくつかの自然数の考え方について小島(2008)の第４章、第５章にわかりやすい紹介がある。より詳しくは足立(2011)を参照。ちなみに河田(1968)はデデキントの立場を序数的自然数論、ラッセルの立場を計数的自然数論と呼んでいる。こうした試みに関わりデデキント(1961)は次のように述べている：「人間が測り得る量のどんな表象をも用いず、簡単な思考の進みの有限個の体系によって純粋な連続な数領域の創造にまで向上できることこそ、いっそうみごとなことのように思われる」(p. 49)。なお足立 (2013)は加法の交換法則や結合法則など算数に出てきそうな法則を公理として組み込み、数学的帰納法を前提にしない体系にも言及している(p. 20; ロビンソン算術というらしい(例えば鈴木(2015))。

3 数学と量の関係については竹内 (1978a)の議論が参考になる。なお、Singer ら (1997)は前-量的スキーマ (protoquantitative schema)という考えを導入し、次のように述べている:「子どもたちのフォーマルな数学の理解は、物理的世界についての彼らの初期の直観的理解を相続している」(p. 116)。

１．量の集合

出発点として同種の量からなる集合を考える。量としては以下に述べるいくつかの性質を満たすものを考える。ただし、ここでの量はまだ数では表現されてはいないが、大きい・小さい、長い・短い、多い・少ないといった程度には比較が可能であるものとする。

量の集合 P で次の性質を満たすものを考える[4]。中に現れる「＋」は P の中で与えられているものとし、量を合わせる操作を表している[5]。性質は Nagumo (1977)に依っているが、例えば「長さ」の集まりを考えれば、私たちの日常経験にも沿ったものと言えよう[6]。（　）の中に長さを例とした場合を示しておく。

P1. p_1 と p_2 が P の要素であるならば、p_1+p_2 も P の要素である。

（２つの長さを合わせたものもまた長さになる）

P2. p_1 と p_2 が P の要素であるならば、$p_1+p_2=p_2+p_1$。

（２つの長さを合わせる順序をかえても合わせた長さは同じになる）

P3. p_1、p_2、p_3 が P の要素であるならば、$(p_1+p_2)+p_3=p_1+(p_2+p_3)$

（３つの長さを合わせるとき、最初の２つを合わせたものに３番目を合わせても、最初のものに２番目と３番目を合わせたものを合わせても、同じ長さになる）

P4. p_1 と p_2 が P の要素であるならば、$p_1+p_2 \neq p_1$。

（２つの長さを合わせたものはもとの長さとは異なる）

P5. p_1 と p_2 が P の要素で $p_1 \neq p_2$ であるならば、ある量 p_3 が存在して、$p_1+p_3=p_2$ か $p_1=p_2+p_3$ が成り立つ。

（２つの異なる長さについて、３番目の長さがあり、一方に３番目の長さを合わせると他方の長さに等しくなる）

P5 にしたがい、ある量 p_3 が存在して $p_1+p_3=p_2$ となる場合は $p_1<p_2$ と、$p_1=p_2+p_3$ となる場合は $p_2<p_1$ と考えることにする。

この P1～P5 を用いると、次のことが証明できる。

P6. [２量の差の確定] P5 の量 p_3 が存在するときにはただ一つだけ存在する。

（証明）$p_1+p_3=p_2$ の場合を示せば、$p_1=p_2+p_3$ の場合も同様にわかる。

---

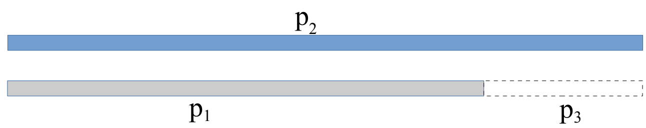
4 渡辺(2010)は「量を数として捉える公準」として 12 の公準をあげている(p. 61)が、その中の加法性の公準がここでの性質に対応している。ただ P5 はなく、次のものが含まれている：$p_1=p_3 \wedge p_2=p_4$ ならば $p_1+p_2= p_3+p_4$。また P1～P5 は外狩 (1985)の和に関する公理にあたるが、外狩(1985)の大小に関する公理は P5 から導けると考えられる。外狩 (1985)はほかに連続性に関する公理を最初に置いている。なお実数の構成までを視野に入れた場合は連続性を保証する公理が必要となる。例えば、アルキメデスの公理、有界増加列が上限を持つとする公理 (小島, 1977b, p. 56)など。

5 以下でも、量どうしの加法については「＋」を用い、量に数を施す場合は「×」を用い、数どうしの加法＋や数どうしの乗法×と区別する。

6 小島(1977b, pp. 54-55)に「長さの空間」の説明がある。

いま p_3 とは別の量 p_4 があり、$p_1+p_4=p_2$ が成り立っているとする。$p_3 \neq p_4$ であるから、P5 より、ある量 p_5 が存在して、$p_3+p_5=p_4$ か $p_3=p_4+p_5$ が成り立つ。$p_3+p_5=p_4$ であるとすると、$p_2=p_1+p_4=p_1+(p_3+p_5)$。P3 からこれは $(p_1+p_3)+p_5$ に等しい。ここで、$p_1+p_3=p_2$ であったので、結局、$p_2=(p_1+p_3)+p_5=p_2+p_5$。これは P4 に反するので矛盾。$p_3=p_4+p_5$ の場合も同様にして矛盾が生ずる。以上より $p_1+p_3=p_2$ を満たす p_3 はただ一つだけしか存在しない。　（証明終わり）

P6 により、$p_1<p_2$ のとき $p_1+p_3=p_2$ となる p_3 は唯一に決まる。そこでこの p_3 を「p_2 と p_1 の差」と呼ぶことにする。これは長さであれば、短い方の長さにどれだけの長さを足せば長い方の長さと等しくなるかを考え、この足すべき長さを２つの長さの差と考えることにあたり、私たちの日常的な量についての経験にも沿うものと言える。



P7. 量 $p_1, p_2, p_3 \in P$ において $p_1+p_3=p_2+p_3$ であれば、$p_1=p_2$ である[7]。

（証明）今、p_1+p_3 と p_2+p_3 が同じ量になるのでこれを p_4 とおく。また P2 より量を入れ換えても和はかわらないので、$p_3+p_1=p_4$ および $p_3+p_2=p_4$ となる。これより p_1 も p_2 も p_4 と p_3 の差と見ることができる。ところが P6 により差は一意に決まるのであった。よって、$p_1=p_2$ となる。　（証明終わり）[8]

２つのコップのもともとの水の量が等しいかが分からないときでも、同じ量の水を足した結果、２つコップの量が同じであったとすれば、もともとの量も同じであると考えることができる、といったイメージにあたる。日常的な感覚ではあたりまえであるが、このことも最初に仮定した P1～P5 を用いて示せるということになる。

【算数教育との関わり】

P1～P5 のような前提を置き、これを満たすものであれば何でも量と考えることは、数学的な議論としては公理を設定するということになろうが、算数教育としては量について調べるときに、子どもたちがそれまでの経験から認めてくれるであろう議論の前提を明示化したものと考えることができる[9]。逆に言えば、子どもたちとの学習の中で、私たち教師が説明や話し合いの中に何気なく持ち込んでいる主張を、明確化することである。

日常的な感覚で言えば P6 も P7 もあたりまえなので、これも前提に置いてもよいかもしれないが、数学的な議論で言えば、前提は少ない方がよいので上の形にしている。また、P1～P5 を用いて証明することは、P6 や P7 がどのような前提に支えられているかを吟味する

7田村 (1978) p. 16 の定理 1

8 P1 から P5 だけを用いて証明したければ、$p_1<p_2$ および $p_2<p_1$ と仮定するといずれも矛盾を生ずることを示すことで証明することもできる。

9 ただし量をとらえることにも困難はある。例えば乳児の例については吉田(1991, pp. 3-12)参照。

こととも言える。

上では長さを例にしたが、広さ、かさ、重さなどでも同様に考えることができる。また多さ、少なさを含めることもできよう。おはじきやリンゴなどの集まりについて、その多さを上の p_1 や p_2 とし、そうした多さの全体をＰとすることにあたる[10]。個々のおはじきやリンゴを●で表すとすると[11]、●●は●より多いが●●●よりは少ないということは、個数を数えなくてもわかる。このとき、「＋」は●の集まりの多さどうしを合わせる操作と考えられる。例えば、(●の多さ)＋(●●の多さ)＝(●●●の多さ)と考えられる[12]。このように解釈すると、日常的な感覚では、上の P1 から P5 が成り立つと言えよう。

なお、Ｐを「長さ」や「広さ」、あるいは「多さ」の全体としており、物質的なモノではないと想定している。これはある種の抽象化であるが、実際には小学校 1 年の教科書でもこうしたことは想定されている。例えば、いろいろな長さを紙テープを用いて比べたり、机の横の長さを鉛筆の長さで表現する活動が用いられるが、その際には「長さ」はモノの種類を越えて比較可能なものとして子どもがとらえていることを前提にしている。また 1 年の最初に数を学習する際には、動物や果物、そしてブロックなどの頭数、個数を比べる活動が用いられる。そこでも異種のモノの間の「多さ」を比較しており、具体的なモノを越えて「多さ」を子どもが考えることができると想定されている。その意味で、上述のある種の抽象化された「長さ」や「多さ」の全体としてＰを想定することは、算数教育としても可能と考えられる。

算数教育では長さや広さを外延量と呼び、速さや密度などの内包量と区別する[13]。日常的な感覚で考えたときに、動いているものが速いか遅いかは、時速や秒速を計算しなくてもおよそは判断できる。新幹線が走るようすは速いと感じるし、カメが歩くのは遅いと感じる。また持ったときに小さいわりに重いと感じたり、大きいわりに軽いと感じることもある。この点では、速さや密度も長さや広さと近い部分がある。前-量的 (protoquantitative; 例えば Singer ら, 1997)という考えを内包量へも適用しようという試みは、こうした判断をとらえ、学習の基礎に据えようとするものと考えられる。

外延量と内包量の違いとしてしばしば言及されるのは、長さや広さはたすことできるが、速さや密度はたすことができないということである[14]。確かに上の「＋」という操作を合併と解釈する場合、速さや密度に適用することは難しく[15]、上の P1 から P5 が成り立つことも示しにくい。しかし「＋」を重ね合わせと考えると、P1 から P5 が成り立つとも考えられる。

---

10 竹内 (1978b, p.62)では量の基本概念の議論を離散の場合も含めた事例から始めている。なお、長さや多さを前提とした説明は数学的な厳密さには欠けるが、算数での指導ではそうした感覚的な判断を学習の出発点とすることが多いので、それに沿って説明してみる。厳密さを考えるならば、そうした解釈を排し、P1～P5 を単なる量の集合についての公理と読む方がよい。なお多さについては、有限集合について全単射による同値類を考え(彌永, 1972, p. 55)、同値なものは同じ多さを持つと考えてはどうだろうか。

11 多さに関わるある種のパターンを取り出すために用いる (布川, 2013, p. 171)。

12 実際には●の集まりを合併させるときに、どのように合わせるのか、合わせ方により合併後の量は変わらないのかなどを考える必要がある。とりあえずは経験にもとづく感覚的な判断に依拠することになる。

13 例えば遠山 (1978) pp. 107-110 参照。

14足せない事例については、例えば正田(2014)の第５章で議論されている。

15こうした場合に 40 km/h の自動車と 60 km/h の自動車を連結しても 100 km/h にならないといった例が出されることもあるが、しかしこの場合、合併されたのは自動車であって速さ自体ではない。人口密度の場合に２つの土地を合わせるという話でも、合併されたのは土地であり密度ではない。同様の指摘は小島(1980) pp. 148-151 や藤井 (1982) p. 175 にもある。藤井 (1982)は射影量という考え方を導入し、その内部演算として Staudt 和とベクトル和を区別することを提案している。

例えば、ある速さ v_1 で動く歩道の上を歩道が動くのと同じ向きに速さ v_2 で歩く場合と、速さ v_2 で動く歩道の上を速さ v_1 で歩く場合とでは、歩道の外から見ている人には、どちらも v_1 と v_2 を合わせた速さで移動しているように見えるであろう。つまり $v_1＋v_2=v_2＋v_1$ となる[16]。ある時間に l_1 だけ水が出る水道管と、同じ時間に l_2 だけ水が出る水道管とを、一緒に使ってタンクに水を入れた場合、その時間あたりに入る水の量は l_1 と l_2 とを合わせたものになると考えられる。

このように、「＋」の解釈により上の P1 から P5 が成り立つようにできれば、長さと同様の議論を展開することができる。

２．自然数

自然数についてはペアノの公理などに基づき、数学的に構成する方法がある[17]。あるいはモノの集合の間に 1 対 1 対応を考えて、対応がつく集合に共通した性質を数と考える立場もある[18]。さらに順序を持った集合とその要素をスライドさせる写像とからなる実直線を考えた上で、ある性質を満たすような要素の部分集合として自然数を構成する試みも見られる[19]。

ここでは少し異なり、量に対する操作として数を構成してみる[20]。同じ長さの紙テープを順につなげていくイメージであるが[21]、つなげた結果できる長さの方ではなく、つなげる操作自体を数としてとらえるという考え方である。

N1 ある量 p∊P に対して、そのままにしておく操作を「1」と表す。

N2 量 p∊P に対して、p＋p を作る操作を 2 と表す。

N3 量 p∊P に対して、(p＋p)＋p を作る操作を 3 と表す。なお第 1 節の P3 により(p＋p)＋p=p＋(p＋p)であるから、これを「p＋p＋p」と書くことにする。

N*k* 同様に、3 の操作に続けて＋p をする操作を 4 と表し、その操作に続けてさらに＋p をする操作を 5 と表す。以下同様に続けて、６、７、…という一連の操作を構成する[22]。

16速度を 1 次元のベクトルとすれば、通常たし算をしている。
17第 0 節脚注 2 で触れた文献を参照。
18 例えば石橋 (2006, p. 13)、黒木 (2009, pp. 1-6)、野崎ほか(2001, p. 17)。
19足立(2011)の pp. 152-157。
20 量と数の関係については例えば小島(1980)を参照。こうした考え方の背景には、数によるスカラー倍と量どうしの和を考えたベクトル空間のイメージがあるようである。
21「順につなげる」の意味、また以下の議論がつなげ方に依らないことは、常識的な感覚に頼ることにしておく。
22 Nagumo (1977)p. 2 の定義を真似ると次のように書くことができる：$p\times(n+1)=p\times n+p$。ただし Nagumo (1977)や田村(1978, p. 1)では自然数は最初から与えられていて自然数倍を考えているように見える。またペアノの公理に基づく構成に関わる議論を参照にすると、このように再帰的に倍の操作を定義した場合、次行の「操作全体」なるものを考えられるかについての正当化が必要になるかもしれない。ここでは量に関わる経験をもとに、ある量を追加することはずっとできそうだという感覚に依拠しておく。ちなみに Kitcher (1984)は次のように述べている(p. 109): 「算術はその真であること(truth)を実際の人間の代理人(agent)による実際の操作に負っているのではなく、理想的な代理人によって遂行される理想的な操作に負っている。つまり算術は理想化する理論として解釈される。算術と人間の代理人による実際の操作の間の関係は、理想気体の法則と私たちの世界に存在する実際の気体との関係にあたる」。

以上で作られた操作全体をNと書くことにする。また p∊P に操作 n∊N を施すことを p✕n と書き、量 p の n 倍と呼ぶことにする。そして、各操作 n を自然数と呼び、N を自然数全体の集合と呼ぶことにする[23]。

また一般に、２つの量 p_0 と p(p_0, p∈P)について、ある自然数 n∊N があり、p=p_0✕n となっているとき、つまり p が p_0 の n 倍であるとき、p に対して数 n を対応させせることを「p_0 を単位とする測定」と呼ぶことにする。またこのとき、数 n を「p_0 を単位とする p の測定値」、あるいは「p_0 をもとにした p の割合」と呼ぶ[24]。

たとえば、P を長さの集合とし、量 p_0∈P をいわゆる 1 cm とする[25]。長さ p に対して「p_0 を単位とする p の測定値が数 n である」ことを私たちは通常 p=n cm と書いている[26]。同様に P を広さの集合として「1 cm^2 を単位とする p の測定値が数 n である」ことを p=n cm^2 と書き、P を重さの集合として「1 g を単位とする p の測定値が数 n である」ことを p=n g と書いている。

第 1 節で述べたように、Pとして多さの集まりの集合を考えてみる。ある●の集まり●●…●●の多さ p が、実は「●」の多さに操作 n∊N を施した結果と同じであったとする。すなわち、

p=(●●…●●の多さ)＝(●の多さ)✕n

であったとする。このとき「＋(●の多さ)」の操作を続けながら、(●●…●●の多さ)＝(●の多さ)✕n となる数 n を見出すことを「(●の多さ)を単位として p を数える」と呼ぶことにす

23 つまり「数は量の倍変換」(小島, 1980, p. 137)、「正の量のシステムの自己同型写像」としての数 (Nagumo, 1977, p. 1)、あるいは「数を量空間の変換とみなす」(田村, 1978, p. I)ことにする(ただしこれらの論考では自然数自体は前提にしていることが多く(小島, 1980, p. 138；Nagumo, 1977, p. 2；田村, 1978, p.1)、その前提の上で実数に対してこうした立場をとっているようにも見える)。また国際単位系(SI)国際文書では「数字は『単位』に対する『量の値』の比を表す」(p. 13)とされている。数学的には「変換」「写像」という用語の方が適当であろうが、本稿では人の活動のイメージを残すために「操作」という言い方を試みる。なお小島(1980)はこの立場を「量の抽象が数」とする立場と対立的にとらえているが、操作を対象化することが、抽象化の少なくとも１つのあり方だとしたら、２つの立場は対立的とは限らないのかもしれない。算数・数学の学習では操作などのプロセスを対象化、モノ化することはよく行われると考えられている (例えば 、Sfard (1991)の duality の議論や Gray & Tall (1994)の procept の議論を参照)。また上の方法では p を順にあわせることを n 倍としており、何ステップもの操作で自然数という 1 つのモノを既定しているが、ここには圧縮化(Sfard, 1991)やカプセル化($$$, ####)といった質的変化が関わっていると考えることもできよう。数が量の空間 P の取り方に依存しないのかという問題もあるが、それについてはとりあえずは小島(1977b, p. 56)を参照されたい。

24 小島(1980)は「数を二つの量の比（つまり“関係”）とみたり、“倍”という操作とみる」ことを擁護している(p. 141)。

25 田島(1978, p. 18)や小島(1980, p. 141)では、単位量そのものを m と書き、m は単なる単位の名前ではないとしている。こうした考えは「国際計量基本用語集」(JCGM, 2012)に沿うものである。そこでは「[測定]単位」は「条約によって定義され制定された実スカラー量」と、つまり一種の量として定義されている。これにしたがえば、1 cm=cm✕1=cm ということになろう。なお国際単位系(SI)国際文書では「量の値は一般に数字と単位の積として表される」(p. 13)としている。

26この時点では自然数だけを考えているので、当然、単位の n 倍とならない長さもある。できるだけ多くの長さに対して測定値を与えることができるよう、後で数を拡張することになる。

る[27]。

数える場面では、何が単位であるかが自明である場合も多いので、単に「p を数える」と言う場合が多い。このときは、p=n 個と書かれる。特に人を単位とする場合は p=n 人となる。ただし、●●のペアがいくつあるかを数えるといった場合には、何を単位とするかを明確にする必要が出てくる。このことを表すために p=n ペアや p=n 組と書かれる。p=n ダースと言う場合には、「(●の多さ)×12 を単位として数える」という意味が含まれている。

日常的には、モノの集まりについて、1 つずつ指さしながら「いち、にい、さん、・・・」と唱え、最後に唱えた数詞を答えることを「数える」と呼んでいるが、唱えながら●を置いていくと考えると、数えることと上の N1～Nk の操作とがつながってくる。

ここで述べたように、本稿では、「数える」ことを、ある種の量に対する「測定」と考える。

２つの自然数 $m, n\in$N について、任意の量 p∊P に対して p×m<p×n、p×m=p×n、 p×m> p×n となるとき、それぞれ $m<n$、$m=n$、$m>n$ であると言うことにする。つまり、自然数の大小はその操作としての効果に応じて決めるものとする。1 m を 2 倍したものより 5 倍したものの方が長く、3 m を 2 倍したものより 5 倍したものの方が長く、他の長さでも同様の結果になるということが、2<5 の意味であると考えるということになる。

なおここで、ある量 p∊P に対しては p×m<p×n となるが、別の量 q∊P に対しては q×m> q×n、あるいは q×m=q×n となる場合はないのかが問題になるかもしれない。ここではとりあえず、上の大小関係の定義と量の性質から、次のように考えておく。まず p×m<p×n であることから、p×n は次のようになっていると考えられる。

$$\mathrm{p}\times n=\underbrace{(\mathrm{p}+\mathrm{p}+\cdots+\mathrm{p})}_{m\,\text{回}}+\mathrm{p}+\cdots+\mathrm{p}$$

上の n 倍の作り方を考えると、q×n についてはこの式の p をすべて q に置き換えて、次のようになると考えられる。

$$\mathrm{q}\times n=\underbrace{(\mathrm{q}+\mathrm{q}+\cdots+\mathrm{q})}_{m\,\text{回}}+\mathrm{q}+\cdots+\mathrm{q}$$

右辺のカッコ内は q×m に等しいので、q×n=q×m＋(q＋・・・＋q)となり、q×m<q×n となる[28]。他の場合も同様となる。

本稿では自然数を前述のような操作として定義したが、それはここでの p と q の置き換えをしても変わらないある種の型、あるいはパターンに対応するとも言える。そうした型に着

27「数える」ことを数学的に考えるには、彌永(1972)の p. 111 の個数の定義とそれに至る議論を参照。大竹 (1995)では定理 2.9 (p. 9)により個数を保証している。

28 瀬山(1996)は「1 から出発して順に’を打つことで」自然数を構成した後、自然数 m, n の大小を次のように定義している：「$m'''\cdots'''=n$ となるとき、n は m より大きい」。構成の仕方は異なるが、大小の判断については類似の発想をしているように見える。

目することが、本稿での抽象化ということになる。

N4. [倍の操作の線形性][29] 任意の $p_1, p_2 \in P$ と $n \in N$ に対し、$(p_1+p_2)\times n = p_1\times n + p_2\times n$ がなりたつ。

（証明）　$(p_1+p_2)\times n = (p_1+p_2)+(p_1+p_2)+\cdot\cdot\cdot+(p_1+p_2)$

$= (p_1+p_1+\cdot\cdot\cdot+p_1)+(p_2+p_2+\cdot\cdot\cdot+p_2)$ (P2, P3 を用いる)[30]

$= p_1\times n + p_2\times n$　(証明終わり)

例えば、12 m の長さを 3 倍した長さと、12 m=10 m＋2m と考えて、10 m を 3 倍した長さと 2 m を 3 倍した長さを合わせた長さとが等しくなる、といったイメージに当たる。

N5. [倍の操作の単調増加性][31] ２つの量 $p, q \in P$ と任意の自然数 $n \in N$ に対して、$p<q$ ならば $p\times n<q\times n$ である。

（証明）$p<q$ なので、P5 により $p+p'=q$ となる量 $p' \in P$ が存在する。よって $q\times n=(p+p')\times n = p\times n + p'\times n$。これより $p\times n<q\times n$ となる。（証明終わり）

２つの量の大小は、何倍かしても変わらないと言える。

N5 から次の性質も導かれる。

N6. ２つの量 $p, q \in P$ と任意の自然数 $n \in N$ に対して、$p\times n=q\times n$ ならば $p=q$。

（証明）もしも $p<q$ であったと仮定すると、N5 より $p\times n<q\times n$ となり N6 の仮定に矛盾する。よって $p<q$ ではない。$q<p$ のときも同様に矛盾が生ずるので $q<p$ でもない。よって、P5 により $p=q$ でなければならない。（証明終わり）

N6 により何倍かして等しくなった２つの量は、もともと同じ量であると判断することができる。

【算数教育との関わり】

倍については小学校２年のかけ算の学習の中で、「3 cm の２つ分のことを 3 cm の２ばいといいます」といった形で導入される。本稿ではこの量の倍操作という側面を用いて自然数を定義している。1 年でよく用いられる「*n* こ」についても、「１個」と表される量を p としたとき、p の *n* 倍、つまり $p\times n$ と考えている。自然数をこのように定義した場合、後で見るよう

29田村(1978) p. 24 の定理４参照。

30この部分は厳密ではないかもしれないが、日常的な経験では納得できよう。なお田村(1978, p. 24)では $n=3$ の場合についてのみ具体的に示して証明に代えている。

31 田村(1978) p. 24 定理３。

に、分数についても類似の仕方で定義ができる。

自然数についてはモノの集まりについて１対１対応による同値関係を入れ、その同値類として導入することもできるであろう。しかしその場合でも数は、同値な集合に共通する性質[32]、あるいは同値類のこととして定義することになる。量への操作とみるにしろ、同値類としてみるにしろ、「３こ」と「3」の関係を知るためにはかなり難しい推論が実際には含まれている。操作はその操作を施すモノ自体とは異なるが、同値類も同値関係で分類される前のモノの集まり自体とは異なるからである。

同時に、私たちも多くの子どもたちも、そうした難しさを意識することなく、比較的自由に数を利用し、数について語っている。どのようにしてこうしたことが可能になったのかを考えることは、数の学習を考える上で示唆を与えてくれそうである。またこれと関わり、量と数の関係についてどのような立場をとるかを意識し、それを学習のあり方に反映させることも必要であろう。

算数では犬やリンゴ、チューリップといった具体物の集まりにより数を導入すると同時に、おはじきやブロックの集まりも提示する。これらは具体物の集まりから多さの側面や、その多さを作り出す操作の側面だけを抽象しやすくするための表現と考えられる。その意味でおはじきやブロックを半具体物と呼ぶこともある。

本稿では数えることと測定とを基本的な同様の操作として考えている。離散量と連続量を区別し、数えることは離散量に、測定は連続量に関わることととらえる立場もあろう。しかし小学校低学年の測定の学習のように、単位の自然数倍のみを考える、あるいは測定値が自然数で表される場合のみを考えるという場面においては、測定は単位の個数を数えることとみなしても不自然ではないであろう。

N4～N6 という倍の操作に関わる基本的な性質は、P1～P5 という量についての自然な感覚に基づいていることがわかる。

３．自然数の加法

２つの自然数 $n, m \in \mathrm{N}$ に対して、その和を次のような操作として定義する：量 $\mathrm{p} \in \mathrm{P}$ に対して $\mathrm{p}\times(n+m)=(\mathrm{p}\times n)+(\mathrm{p}\times m)$。つまり和 $n+m$ は、それぞれの数を p に施した結果の量を、量として合わせた結果を作りだすような操作である[33]。

A1 [加法の交換法則] 任意の $n, m \in \mathrm{N}$ に対して、$n+m=m+n$ が成り立つ。

（証明）任意に量 $\mathrm{p} \in \mathrm{P}$ に対して、$\mathrm{p}\times(n+m)=(\mathrm{p}\times n)+(\mathrm{p}\times m)$ (加法の定義)

$=(\mathrm{p}\times m)+(\mathrm{p}\times n)$ (P2 より)

$=\mathrm{p}\times(m+n)$ (加法の定義)

つまり任意に量 $\mathrm{p} \in \mathrm{P}$ に対し $\mathrm{p}\times(n+m)=\mathrm{p}\times(m+n)$となるので $n+m=m+n$ 。（証明終わり）

32 石橋 (2006, p. 13)。竹内(1978b, p. 62)はこうした同値類による導入の問題点を指摘している。

33 個数の考えから加法を定義すると例えば大竹(1995, p. 11)や森(1976, p. 32 のようになろう。またペアノの公理に基づく場合の定義は例えば彌永(1978, pp. 73-77)や瀬山(1996, p. 30)に見ることができる。その正当化には数学的帰納法を用いている。なお足立(2013)は「最初に一般的な再帰性定理を証明し、その結果を加法、乗法などの定義に適用」(p. 115)するのが、現在では普通だとしている。

A2 [加法の結合法則] 任意の $l, m, n\in$N に対して、$(l+m)+n=l+(n+m)$ が成り立つ。

（証明）任意に量 p∊P に対して、$p\times((l+m)+n)=p\times((l+m)+(p\times n))$ (加法の定義)

$=((p\times l)+(p\times m))+(p\times n)$ (加法の定義)

$=(p\times l)+((p\times m)+(p\times n))$ (P3 より)

$=(p\times l)+(p\times(n+m))$ (加法の定義)

$=p\times(l+(n+m))$ (加法の定義)

つまり任意に量 p∊P に対し $p\times((l+m)+n)=p\times(l+(n+m))$ となるので $(l+m)+n=l+(n+m)$。

（証明終わり）

上の証明を見るとわかるように、自然数の加法の交換法則や結合法則は、量の交換法則(P2)や結合法則(P3)により成り立っている。P2 や P3 は量を規定するいわゆる公理であり、適当に置いた仮定にすぎない。しかし他方で、P2 や P3 は日常の量に関わる経験からなんとなく気づいていることでもある。いずれにしろ、本稿のような構成では、量についての公理が数のいろいろな性質を支えていると考えることができよう。

$n<m$ である２つの自然数 $m, n\in$N については、任意の量 p∊P に対して $p\times n<p\times m$ となるので、ある量 p' が存在して $p\times n+p'=p\times m$ となる。$p\times n$ と $p\times m$ の定義を想起すると、

$$(\underbrace{p+p+\cdot\cdot\cdot+p}_{n\text{個}})+p'=\underbrace{p+p+\cdot\cdot\cdot+p}_{m\text{個}}$$

となる。ここで P7 を用いると、両辺から p を１つ除いても等号は成り立つ。これを繰り返し適用すると、左辺は p'だけになり、右辺は p をいくつか合わさせた量となる。つまり、$p'=p+p+\cdot\cdot\cdot+p$ という形に書け、p から p'を作る操作も自然数になると考えられる。この操作を $m-n$ と書き、「m と n の差」と呼ぶ[34]。$p\times(n+(m-n))=p\times n+p\times(m-n)=p\times n+p'=p\times m$ であるから、$n+(m-n)=m$ となり、「m と n の差」k は $n+k=m$ となる自然数のことだとも言える。

先には P6 で上のような p'がただ一つ存在することを確かめたが、その p'を作る操作も p の自然数倍として表せると考えられた。そこで、その p'を作る操作として自然数の差を定義するということである。

A3 [加法の簡約法則] 任意の $l, m, n\in$N に対して、$m+l=n+l$ ならば $m=n$。

（証明）p∈P をとると、仮定により $p\times(m+l)=p\times(n+l)$。つまり、$p\times m+p\times l=p\times n+p\times l$ となる。ここで P7 を用いると、$p\times m=p\times n$。よって $m=n$ が成り立つ。（証明終わり）

この法則があると、「両辺から l を引く」といったことが自由にできる。

34 個数の考えに基づき減法を考えることは、例えば森(1976, pp. 32-33)を参照。

【算数教育との関わり】

前節で倍の操作を自然数として定義したので、自然数の和も操作の和として定義している。算数の教科書でも、実際には抽象的な数の和が定義されるというよりも、具体的なものの個数を用いて和を考えているが、このときの具体的なものの個数を１個の多さを何倍かした多さと考えるならば、教科書で行っていることも数を多さという量に施した上で、その結果の量の多さから和を規定していると見ることができる[35]。その意味で、具体的な量について和を考える経験は、数の和を理解する上で本質的に重要と考えられる。

同時に、本来であればPに属する任意の量に施した結果が加法の定義に必要となるが、任意の量についてこれを調べることは現実ではない。例えば２個と３個を足して５個になるとしても、つまり、(１個の多さ)×2＋(１個の多さ)×3＝(１個の多さ)×5であるとしても、7個の「多さ」についても同様のことが成り立つか、173個の「多さ」についても成り立つかなどが問題になるからである。算数では1個の「多さ」について調べた結果をもとに加法を規定していくが、学習が進んで例えば10個の「多さ」や100個の「多さ」、あるいはケーキ３分の１個の「多さ」でも同様のことが成り立つことは、自明として用いられている。加法について量をもとに定式化することは、逆にこうした自明なこととして学習で用いている事柄にも光を当てることになろう。

また量や数のところで述べたのと同様に、もとの量の集合P自体が抽象的な存在であり、リンゴ２個と自動車２台、チューリップ２本などに共通な「多さ」を扱っていること、さらには「多さ」からなるPと、「長さ」からなるPとを特に区別せずに加法を考えていることにも注意が必要であろう。算数でこうした抽象性に直接言及はできないが、どの量であっても、あるいは同種の量のどのような具体化であっても、同様のことが成り立ちそうだと感じてもらえるような経験を提供することが、抽象性を論ずることの代わりになると考えられる。

A1とA2で示されるように、本稿の立場では加法の交換法則と結合法則は、量について仮定した性質をもとに説明される。その量の仮定は本稿の構成としては公理として設定したものに過ぎないが、算数の学習では日常の経験に基づき子どもたちが認めてくれる性質と考えられる。この意味でも、量についての経験が、加法の学習の素地になっていると考えられる。

減法は、「小さい方の量に加えたときに大きい方の量になる量」を求めること、いわば２量の差として定義されている。これは、加法の逆演算として減法を定義することとも考えられる。数学的な数の構成では減法を別に定義するのではなく、このように加法の逆演算として定義することが普通である[36]が、それにより減法と加法は本来的に関係した操作として導入される。それにより量を「合わせる」という操作の他に、量を「取り去る」とか「減らす」という操作を新たに導入せずに済み、議論がシンプルになる。

こうした導入を対比させることで、算数の特徴も浮き彫りになる。算数では日常での「取

35 もちろん自然数の定義の仕方が変われば、和の規定の仕方も異なる。例えば元の個数がmの集合Ａと、元の個数がnの集合Ｂを$A \cap B = \phi$となるようにとり、$m+n$=($A \cup B$の元の個数)と規定する仕方もある (大竹, 1995)。

36 例えば彌永 (1978, p. 85)、志賀 (2000, p. 20)参照。

り去る」「減らす」という経験も利用し、それらに基づいて減法を新たな演算として導入する。減法を、加法の逆のような形ではなく、量についての経験に直結した形で導入するのである。この場合、加法との関係については、量の「合わせる」と「取り去る」の関係などをもとにして、改めて確認することが必要になる。

なお加法については１年生で増加の場面、合併の場面を用いて学習がされたり、減法については減少の場面、部分を求める場面、差を求める場面を用いて学習がされる。このように多様な場面を用いて加法、減法を学習することは、それが適用される場面を知りながら加法や減法を学習することになる。ただし、それにより一つの演算の導入に多様な場面が関わることにもなり、加法や減法が基本的にはどのような演算なのかを曖昧にする部分もある。適用可能な多様な場面を認めつつも、考え方の拠り所となる小学生なりの加法や減法の定義が何かも検討しておく必要はあろう。

４．自然数の乗法

量 p∊P に対して n 倍(n∈N)した量を p’としたとき、その量 p’をさらに m 倍(m∈N)したものを量 p”とする。すなわち、

$$(\mathrm{p}\times n)\times m=\mathrm{p}'\times m=\mathrm{p}''$$

ここで、量 p∈P に対して p”を作る操作は n 倍した結果に続けて m 倍をする操作となる。このように２つの操作を続けて行うことを２つの「操作の合成」と呼び、$n\times m$ と書くことにする[37]。そして自然数の乗法を、この倍の操作の合成として定義することにする。この書き方を用いると上の式は次のように書くことができる。

$$(\mathrm{p}\times n)\times m=\mathrm{p}\times(n\times m)$$

例えばＰとして●の多さの集まり全体をとり、量 p∊P として「●●」の多さをとったとする。このとき 2×3 という操作を施すと、

(●●の多さ)×(2×3)=(●●●●の多さ)×3=●●●●●●●●●●●●の多さ

最後の量が(●●の多さ)×6 に等しいことに注意すると、(●●の多さ)×(2×3)=(●●の多さ)×6 となる。同じことはどの量についても成り立つと考えられるので、そこから 2×3=6 と言える。

ここで２も 3 も倍の操作であり、2×3 はそうした操作の合成である。例えば上の●をりんご１個とした場合、(●の多さ)×2 はりんご２個の多さとなる。そして(●の多さ)×(2×3)=((●の多さ)×2)×3 はりんご２個の多さをさらに３倍することにあたる。つまり、このときの 3 は「２個の多さ」という量に対する３倍という操作を表しており、2 と 3 は同じ集合 P に対する操作となっている。つまり乗法は数と数の演算と考えている。

一方で、算数の指導においては、りんご２個が皿にのっていて、そうした皿が３皿あるという場面を考え、乗法を「１皿あたり２個の３皿分」と考える場合もある。この場合、2 と 3

37 Nagumo (1977, p. 8)の積の定義、田村(1978, p. 22)の積の定義を参照。

は異なるタイプの量（リンゴ１皿あたりの盛りの「よさ」と皿の「多さ」）での操作となる。この場合の解釈については、第５節で考えることとする。

M1. 任意の $n, m \in \mathrm{N}$ に対して、$n\times(m+1)=n\times m+n$ が成り立つ[38]。

（証明）任意の $\mathrm{p}\in\mathrm{P}$ に対し、$\mathrm{p}\times(n\times(m+1))=(\mathrm{p}\times n)\times(m+1)$。ここで $\mathrm{p}\times n\in\mathrm{P}$ であることに注意すると、第 3 節で述べた自然数の加法の定義より、

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{p}\times n)\times(m+1) &= (\mathrm{p}\times n)\times m+(\mathrm{p}\times n)\times 1\\
&= \mathrm{p}\times(n\times m)+\mathrm{p}\times n\\
&= \mathrm{p}\times(n\times m+n)
\end{aligned}
$$

よって任意の p に対して、$\mathrm{p}\times(n\times(m+1))=\mathrm{p}\times(n\times m+n)$ が成り立つので、

$n\times(m+1)=n\times m+n$ となる。(証明終わり)

M2. [乗法の結合法則] 任意の $l, m, n\in\mathrm{N}$ に対し $(l\times m)\times n=l\times(m\times n)$ が成り立つ。

（証明）任意の $\mathrm{p}\in\mathrm{P}$ に対し、$\mathrm{p}\times((l\times m)\times n)=(\mathrm{p}\times(l\times m))\times n=((\mathrm{p}\times l)\times m)\times n$

$\mathrm{p}\times(l\times(m\times n))=(\mathrm{p}\times l)\times(m\times n)=((\mathrm{p}\times l)\times m)\times n$

つまり、 任意の $\mathrm{p}\in\mathrm{P}$ に対し $\mathrm{p}\times((l\times m)\times n)=\mathrm{p}\times(l\times(m\times n))$ となる。

よって、$(l\times m)\times n=l\times(m\times n)$ (証明終わり)

M3. [分配法則][39] 任意の $l, m, n\in\mathrm{N}$ に対し $(l+m)\times n=l\times n+m\times n$ および $n\times(l+m)=n\times l+n\times m$ が成り立つ。

（証明）任意の $\mathrm{p}\in\mathrm{P}$ に対し、

$$
\begin{aligned}
\mathrm{p}\times((l+m)\times n) &= (\mathrm{p}\times(l+m))\times n\\
&= (\mathrm{p}\times l+\mathrm{p}\times m)\times n && \text{(加法の定義による)}\\
&= (\mathrm{p}\times l)\times n+(\mathrm{p}\times m)\times n && \text{(N4 による)}\\
&= \mathrm{p}\times(l\times n)+\mathrm{p}\times(m\times n) && \text{(乗法の定義による)}\\
&= \mathrm{p}\times(l\times n+m\times n) && \text{(加法の定義による)}
\end{aligned}
$$

つまり、任意の $\mathrm{p}\in\mathrm{P}$ に対し $\mathrm{p}\times((l+m)\times n)=\mathrm{p}\times(l\times n+m\times n)$ となる。

よって、$(l+m)\times n=l\times n+m\times n$。もう一つの等式についても同様。（証明終わり）

M4. [乗法の交換法則][40] $n, m\in\mathrm{N}$ に対し、$m\times n=n\times m$。

（証明）任意の $\mathrm{p}\in\mathrm{P}$ に対し $\mathrm{p}\times(m\times n)=(\mathrm{p}\times m)\times n$ は、次のようになっていると考えられる。

38高木(1949)では、この条件を満たす関数として乗法を定義している(p. 23)。瀬山(1996)の p. 40 にも同様の定義が見られる。

39田村(1978) p. 25 参照。

40足立(2011)はスライドの写像が可換であることを実直線の定義に含めている(ただし足立(2011)の場合は写像ではなく集合の要素の方を数としている)。

$$\underbrace{(\mathrm{p}\times m)+(\mathrm{p}\times m)+\cdot\cdot\cdot+(\mathrm{p}\times m)}_{n\text{個}}$$

$$=\underbrace{(\underbrace{\mathrm{p}+\mathrm{p}+\cdot\cdot\cdot+\mathrm{p}}_{m\text{個}})+(\underbrace{\mathrm{p}+\mathrm{p}+\cdot\cdot\cdot+\mathrm{p}}_{m\text{個}})+\cdot\cdot\cdot+(\underbrace{\mathrm{p}+\mathrm{p}+\cdot\cdot\cdot+\mathrm{p}}_{m\text{個}})}_{n\text{個}}$$

ここで、第１の（　）内の１番目のp、第２の（　）内の１番目のp、・・・と集めて合わせると、（　）は n 個あるので、pを n 個合わせた量になると考えられる。これをそれぞれの（　）の２番目、３番目、・・・、m 番目まで同じように行う[41]。その結果、次のようになると考えられる。

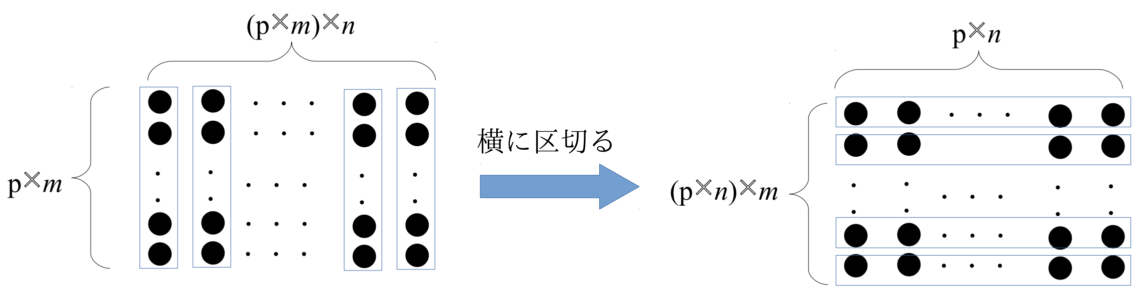
$$\underbrace{(\underbrace{\mathrm{p}+\mathrm{p}+\cdot\cdot\cdot+\mathrm{p}}_{n\text{個}})+(\underbrace{\mathrm{p}+\mathrm{p}+\cdot\cdot\cdot+\mathrm{p}}_{n\text{個}})+\cdot\cdot\cdot+(\underbrace{\mathrm{p}+\mathrm{p}+\cdot\cdot\cdot+\mathrm{p}}_{n\text{個}})}_{m\text{個}}$$

$$=\underbrace{(\mathrm{p}\times n)+(\mathrm{p}\times n)+\cdot\cdot\cdot+(\mathrm{p}\times n)}_{m\text{個}}=(\mathrm{p}\times n)\times m=\mathrm{p}\times(n\times m)$$

つまり、任意の $\mathrm{p}\in\mathrm{P}$ に対し $\mathrm{p}\times(m\times n)=\mathrm{p}\times(n\times m)$ が成り立つ。よって $m\times n=n\times m$

（証明終わり）

ここでの証明を図式化すれば次のようになろう。



これは算数の教科書でもよく用いられている図である（教科書では、図を90°回転させて説明していることが多い）。

M5. [乗法の簡約法則] 任意の $l, m, n\in\mathrm{N}$ に対して、$m\times l=n\times l$ ならば $m=n$。

（証明）任意の $\mathrm{p}\in\mathrm{P}$ に対し、仮定より $\mathrm{p}\times(m\times l)=\mathrm{p}\times(n\times l)$。M4により $\mathrm{p}\times(l\times m)=\mathrm{p}\times(l\times n)$。ここで $\mathrm{p}\times l$ を１つの量とみると、$(\mathrm{p}\times l)\times m=(\mathrm{p}\times l)\times n$。第２節の議論により、ここからどの

41この操作についてはP2とP3を繰り返し適用することで可能と考えられるが、N4の証明と同様の曖昧さもつきまとうかもしれない。

量 p∈P に対しても p×m=p×n と考えられる。よって、m=n。（証明終わり）

【算数教育との関わり】

本稿では倍操作の合成として自然数の乗法を定義している。この定義と算数でのかけ算の導入の仕方との関係については、単位量あたりの大きさが関わるので、次節で議論することとする。

この定義に基づいて乗法の諸性質を考えた場合、乗数が 1 増えたときの積、乗法の結合法則、加法と乗法との分配法則は、量の諸性質に依拠するというよりも、乗法の定義および加法の定義に基づいていることがわかる。これは加法の結合法則や交換法則が、量の性質に基づいていたこととは対照的である。

５．単位量あたりの大きさ

第４節で乗法を考えた際に、２つの解釈があることにふれた。1 つは 2×3 を操作の合成と考え、この場合は 2 も 3 も同じ種類の量に対する倍の操作と考えられる。もう 1 つの解釈では、2×3 を「１皿あたり２個の３皿分」などと考えるものであるが[42]、この場合は 2 と 3 は異なる種類の量への操作となる。したがって、2×3 をある量の集合に対する操作の合成とする上述の定義とは異なってくる[43]。本節では後者についても考えてみる[44]。

「１皿あたり２個の３皿分」と考える場合、皿の「多さ」に加えて、「１皿あたり２個」という 1 皿の盛りの「よさ」にあたる量も話題にしている。したがって、皿の「多さ」の全体と、盛りの「よさ」にあたる量の全体を区別しておく。さらに乗法の結果として得られるのは全部のリンゴの個数であるが、これを皿の「多さ」とは区別した場合には３種類の量が関わる語り方だと言える[45]。その上で、「１皿あたり」を話題にするときには、さらに次のようなことを前提にしている。

(a) 皿の枚数とリンゴの個数の間には関係があり、枚数が決まれば個数が決まる、また個数が決まれば枚数が決まると想定できる。

(b) そうした関係が確立できるために、どの皿にも同じ個数のリンゴがのっていると想定できる[46]。例えば、全部で皿は５枚、リンゴは 10 個あるとしても、ある皿には 1 個しかのっていないかもしれないし、別の皿には３個のっているかもしれない。しかしそうした個々の違いは考慮せずに全体を均し、どの皿にも同じ個数がのっていると想定する。

(c) 上の想定から、皿が 1 枚増えるとき、それにともなって増えるリンゴの個数はいつも同じであると想定できる。

42 例えば野崎ほか(2001, p. 30)参照。

43こちらの解釈を乗法の定義にすることもできようが、その場合は、今度は乗法を倍の操作と考えられることを、その定義をもとに説明する必要が出てくる。また乗法に出てくる数の意味と整合する形でもともとの数の規定をする必要も出てくる。

44この箇所は小島(1980)の pp. 142-143 における議論を参考にした。

45 皿の「多さ」もリンゴの「多さ」も同じ「多さ」と考えれば２種類の量となる。

46 遠山 (1978) は均等分布 (p. 130)と呼んでいる。また単位量あたりの大きさを学習する直前に平均を学習するのも、先に均すことで均質性を作り出す必要があるからだと考えられる。全体が均等分布でなければそのままでは乗法が使えず、均等分布ないくつかの部分に分けて、その結果を足し合わせるとか、積分を利用するといったことが必要となろう。

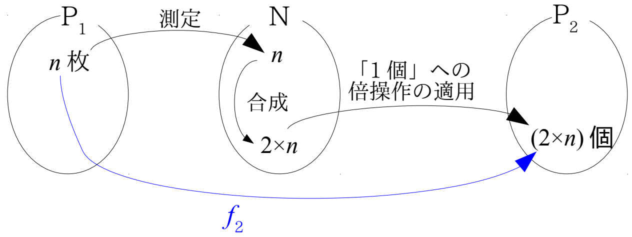
今、(a) の想定に基づき、「枚」を単位とする「多さ」の空間 P_1 から「個」を単位とする「多さ」の空間 P_2 への写像を考える。例えば「１皿あたり２個」のときに、皿の枚数に対してリンゴの個数を対応させる写像を $f_2 : P_1 \to P_2$ とする。$p \in P_1$ が $p=n$ 枚($n \in N$)と表され、それに対応する $q \in P_2$ が $q=m$ 個($m \in N$)と表されるとすると、$f_2(p)=q$、つまり $f_2(n$ 枚$)=m$ 個である。

この f_2 について、(b)と(c)の想定により、f_2(1 枚)= ２個、f_2(2 枚)=f_2(1 枚)＋２個＝２個＋２個＝４個、f_2(3 枚)=f_2(2 枚)＋２個＝４個＋２個＝６個、・・・となるはずであり、ここから、$f_2(n$ 枚)=(２個)$\times n$ でなければならない。さらに２個＝(１個)×2 と考えると、

$$f_2(n\text{ 枚})=(２\text{個})\times n=((１\text{個})\times 2)\times n=(１\text{個})\times(2\times n)=(2\times n)\text{個}$$

となる。

このように「１皿あたり２個」という場合では、まず皿の多さを表す n は N の要素となるので、$2\times n$ という操作の合成を行う。この合成によりできた$(2\times n)$という倍の操作を、リンゴ１個の「多さ」に対する操作と読み替えてこれに施し、$2\times n=m$、つまり n 枚に対して$(2\times n)$個を対応させている。



以上より、「１皿あたり２個」は上のような写像 f_2 を指定するものであり、皿の枚数をリンゴの個数に変換する写像を決定するものと言える。同様に「１皿あたり３個」は $f_3(n$ 枚)= $(3\times n)$個となる写像 f_3 を指定し、「１皿あたり 10 個」は $f_{10}(n$ 枚)= $(10\times n)$個となる写像 f_3 を指定する。

「１皿あたり m 個」から決まる写像 f_m では $f_m(n$ 枚$)=(m\times n)$個となることから、枚数から個数への変換ということも含めて、次のように書くこともできよう[47]：

$$f_m(n\text{ 枚})=m\text{ 個枚}^{-1}\ \overline{\times}\ n\text{ 枚}=(m\times n)\text{個。}$$

この“乗法”は自然数どうしの乗法（倍の操作の合成×）とも、量に倍の操作を施す乗法(倍の操作×)とも異なるので、いずれとも異なる記号 $\overline{\times}$ で表している。

ここで現れる m 個枚$^{-1}$ は枚数を個数へ変換する仕方を示すものであるが、第１節の最後に述べた考えにしたがうと、一種の量とみなすことができる[48]。実際、「１皿あたり２個」と「１

47 ふつうは m 個／皿×n 皿=$(m\times n)$個と書かれる。個枚$^{-1}$ のような書き方は、小島(1977b)が速さの単位を m 秒$^{-1}$、密度の単位を g(cm^3)$^{-1}$ などとする書き方を借りている。なお小島(1977b)は秒$^{-1}$ や(cm^3)$^{-1}$ を、秒や cm^3 を単位にとったときの量の測度を与える量の空間から実数への線型写像としている。その意味で上図の測定に対応する。秒$^{-1}$ で時間の測定値を取り出し、その数を m に施すと考えると、m 秒$^{-1}$ は時間から距離への変換をやはり表現しているとも見ることができる。

48 Lodge (1888)は「具体的量の乗法と除法」という論文で、具体的量の積や商は「分子の具体的因子に比例し、分母のそれに反比例して変化するような量を表現しなければならない」とし、そうした表現を用いるのは、

皿あたり５個」の重ね合わせを「１皿あたり７個」と考える、つまり 2 個枚$^{-1}$と 5 個枚$^{-1}$の重ね合わせを 7 個枚$^{-1}$とするなどと考えていくと、P1 から P5 が成り立つ。

【算数教育との関わり】
「１皿あたり m 個」の「m 個」は、上述の(b)の想定とそれに基づく f_m の構成の仕方から、皿が１枚増えたときに増えるリンゴの個数である。つまり、m 個枚$^{-1}$は皿の増え方にともなうリンゴの個数の増え方の程度、一皿増えるときに個数が増える大きさを示す量とも考えられる。この意味で、m 個枚$^{-1}$のような量を算数教育では「単位量あたりの大きさ」と呼んでいる[49]。皿の上にリンゴが２個のっている状態を、単位量あたりの大きさとして考えていくときには、上述の(a)～(c)の想定が背後にあり、皿の枚数をリンゴの個数に対応させる写像が視野に入っているとするのが、本稿の捉え方である。

このとき、皿の枚数が増える／減るとリンゴ全部の個数はそれにともなって増える／減るが、「１皿あたり m 個」は変化しない[50]。その意味で、単位量あたりの大きさは「１皿あたり」という一部についての情報であっても状況全体の特徴を反映しうる量であり、今の状況自体の特性を示すものとも言える。また、上で見たように増え方の程度を表すものであり、いわば「盛りがよい／悪い」の指標ともいえる。こうしたことから、単位量あたりの大きさは、高学年になると、一方では込み具合のような状況の質的特性を示す量として用いられると同時に、他方では比例する２量の間の関係を特定し、比例定数としてその変化の程度を示すことにも用いられる。

ここまでに見てきた乗法に関わる議論を振り返ると、次の３つのタイプがあった[51]。

(i) ２つの自然数 $m, n \in \mathrm{N}$ に対する乗法 $m\times n$。

これは自然数の集合の内部の演算である。算数で言えば、単に数だけのかけ算を考えている状態であり、3×5=15 といった計算を行う場合はこれにあたる。

(ii) ２つの自然数 $m, n \in \mathrm{N}$ を順にある量 $\mathrm{p} \in \mathrm{P}$ に順に施す場合：$(\mathrm{p}\times m)\times n=\mathrm{p}\times(m\times n)$。

特に p として「１個の多さ」や「1 m の長さ」をとれば、$(\mathrm{p}\times m)\times n$ は m 個の n 倍とか m m の n 倍を考えていることになる。例えば、３個入りで 150 円のプリンを 15 個買うときの値

「複合的な量のそれと同じ種類の基準(standard)との比較のため」であるとしている。単位量あたりの大きさが通常、２量の商により表されるとすると、それはある種の量であり、、何らかの基準との比較のために用いられると考えることもできよう。

49渡辺(2010)はカントの直観の公理（すべての直観は外延的な大きさである）を量に関する数学的原則、知覚の予料（すべての現象において、感覚の対象となる実在的なものは、内包量つまり度をもつ）を質に関する数学的原則とし(p. 43)、例えば、ある時点 t のある場所(x, y, z)の波の高さの関数 $u(x, y, z, t)$を考えたとき、「変数 u は t と x, y, z で規定され舞台内部での現象を表す変数であり内包量とした」と述べている(pp. 43-44)。さらに内包量は連続量であり、「波動方程式にも示すように、微分可能な変数である」(p. 44)ともしている。

50 この部分の記述は、示量変数と示強変数の定義を参考にした。

51 (i)の乗法は(m, n)に $m\times n$ を対応させる直積集合 N×N から N への写像と、(ii)の乗法は量 $\mathrm{p}\times m \in \mathrm{P}$ に別の量$(\mathrm{p}\times m)\times n$ を対応させる P から P への写像と、(iii)の乗法は量 $u_1\times m \in \mathrm{P}_1$ に別種の量 $u_2\times(n\times m)\in \mathrm{P}_2$ を対応させる P_1 から P_2 への写像と見ることもできる。(i) については $f_m(n)=m\times n$ となる N から N への写像 f_m を考えてもよいであろう(瀬山, 1996, p. 42)。なお黒木(2009, p. 41)では(ii)を倍のかけ算、(iii)を量のかけ算と呼び、他に(長さ)×(長さ)＝(面積)のようなタイプを新しい概念を作り出す積として、積のかけ算と呼んでいる。

段を求める際に、「個数が5倍になるので、値段も5倍になる」といった推論をする場合、「個数が5倍になる」という部分では、このかけ算をしていると考えることができる。

(iii) ２つの異なる量の集合 P_1, P_2 に関わり、自然数 $m, n \in N$ がそれぞれの測定値にあたる場合：$f_n(u_1 \text{✕} m) = u_2 \text{✕} (n \times m) = (u_2 \text{✕} n) \text{✕} m$ (ここに u_1, u_2 は P_1, P_2 での測定の単位として選んだ量)；あるいは $\overline{n}\,\overline{\text{✕}}(u_1 \text{✕} m)$ (ここに $\overline{n}$ は $u_2 \text{✕} n$ を単位量あたりの大きさを表す量として読み替えたもの)。２つの量の間の変換を行う。「１パックあたり150円のプリン５パック分の値段」を考えるとき、これはパックの数を値段に変換する操作と考えられる。

(ii) $p \text{✕} (m \times n)$、(iii) $u_2 \text{✕} (n \times m)$のいずれも$(n \times m)$を含んでおり、実際の計算においては(i)の乗法の結果に依拠している。つまり、量に関わる操作において、その核となる部分では数の計算(操作の合成)が行われている。これは、(i)のような数の計算を量が関わる場面に適用するということにあたる。

これらのタイプを子どもたちが区別する必要はないが、教師や教科書の説明の中で、区別されずに使われた場合、乗法への意味づけが一貫しない可能性が出てくる。例えば、小学校２年での導入時の乗法の意味づけが、その後の学年でも維持されているのか、あるいは異なる意味づけが用いられる際にはそのことを明確に示しているのか、といったことが問題となる。

いずれにしても、(i)のような数の計算と、(ii)、(iii)のように量が関わる操作とがどのように関係しているのかを意識した上で扱っていく必要があろう。本稿ではこの点を明確にするために、あえてかけ算記号を「×」に統一せず、(i)、(ii)、(iii)で異なる記号を用いている。

いわゆるかけ算の順序の問題に関して言えば、(i)の自然数 N の演算としての乗法については、M4 で示したように交換法則が成り立つ。またその際に、$(p \text{✕} m) \text{✕} n = (p \text{✕} n) \text{✕} m$ であることに依拠していたが、これは(ii)での交換法則にあたる。確かに m 個の n 倍と n 個の m 倍とでは一概に同じとは言えないが、同時にそこで示した図のように、それが縦 m 個、横 n 列に並べた配置を縦に区切って見るか横に区切って見るかの違いだけと考えれば、同様の状況とみなすことができる[52]。このみなしが可能となるのは、m も n も倍の操作という同種のものだからと考えられる。

これらに対し、(iii)では事情が少し違う。異なる種類の間の変換であり、２つの数値の役割が全く異なるので、２つの数を入れ替えたものを同じかけ算とはみなしにくい。かけられる数とかける数の順序を重視する場合は、(iii)のタイプの乗法を問題にしていると考えられる。

６．自然数の除法

自然数の除法は乗法をもとに次のように定義される。２つの自然数 $m, n \in N$ について、$p \in P$

---

52 これに関わっては遠山 (1978, pp. 116-120) も参照。

である任意の量 p に対しある自然数 $k\in N$ が存在して、$\mathrm{p}\text{✕}(n\times k)=(\mathrm{p}\text{✕}n)\text{✕}k=\mathrm{p}\text{✕}m$ となったとする。つまり $n\times k=m$。このとき k を $m\div n$ と書き、「m を n で割ったときの商」と呼ぶ。また $m\div n$ を求める操作を除法と呼ぶ。ただし、自然数の範囲では $n<m$ であったとしても除法ができるとは限らない。

【算数教育との関わり】

減法と同様、数学的に数を構成する議論では、除法は乗法の逆として定義される。ここでは除数である n と合成したときに被除数 m になる数 k を求める操作として定義している。しかし除法を小学校３年で初めて学ぶときに、九九で商を求めることも学ぶが、これはまさに $n\times k=m$ となる k を求めているのであり、乗法の逆として除法を考えている。また除法を用いて答えを求める場合でも、まず□や x を用いて数量関係を乗法で表現することも多いが、むしろこうした乗法で表現した上で□や x の値を求める方が、ここでの除法の定義にそったものとも言える。

前節で見たように、数の乗法は第４節で定義した通りだとしても、算数に現れる乗法には数と量との関わりから、次の３つのタイプがあった。

(i) ２つの自然数 $m, n\in \mathrm{N}$ に対する乗法 $m\times n$。

(ii) ２つの自然数 $m, n\in \mathrm{N}$ を順にある量 $\mathrm{p}\in \mathrm{P}$ に順に施す場合：$(\mathrm{p}\text{✕}m)\text{✕}n=\mathrm{p}\text{✕}(m\times n)$。

(iii) ２つの異なる量の集合 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$ に関わり、自然数 $m, n\in \mathrm{N}$ がそれぞれの測定値にあたる場合：$f_n(u_1\text{✕}m)=u_2\text{✕}(n\times m)=(u_2\text{✕}n)\text{✕}m$；あるいは $\bar{n}\,\widetilde{\text{✕}}(u_1\text{✕}m)$。

自然数としての乗法が(i)であったことに対応し、自然数としての除法も $n\times k=m$ となる k を求めることと考えられる。つまり、n 倍の操作と合成したときに m 倍の操作になるような操作 k を求めることである。ただし算数では量をともなう場面でわり算が扱われることも多いので、乗法の３つのタイプに応じて、除法もニュアンスの異なる現れ方をする。さらに量が関わる(ii)と(iii)では被乗数と乗数の意味を区別するのにともない、乗法の被乗数を求める除法と、乗数を求める除法とが区別されるので、さらにタイプが多様であるように見える。それだけに、数の除法と量の除法の関係をどう考え、どう扱うかを検討しておく必要があろう[53]。

(i) ２つの自然数 $m, n\in \mathrm{N}$ に対し、$n\times k=m$ となる、あるいは $k\times n=m$ となる k を求める除法。

これは自然数の集合の内部の演算である。算数で言えば、単に数だけのわり算を考えている状態であり、15÷3=5 といった計算を行う場合はこれにあたる。いずれも数も特に量としての意味はないので、この 5 が 3×5 の 5 なのか、5×3 の 5 なのかは問題にならない。

(ii)-1 ２つの自然数 $m, n\in \mathrm{N}$ と量 $\mathrm{p}\in \mathrm{P}$ に対し、$(\mathrm{p}\text{✕}n)\text{✕}k=\mathrm{p}\text{✕}m$ となる k を求める除法。

(ii)-2 ２つの自然数 $m, n\in \mathrm{N}$ と量 $\mathrm{p}\in \mathrm{P}$ に対し、$(\mathrm{p}\text{✕}k)\text{✕}n=\mathrm{p}\text{✕}m$ となる k を求める除法。

特に p として「１個の多さ」や「1 m の長さ」をとれば、(ii)-1 は n 個や n m を何倍したら

53 量のわり算については小島 (1977d, pp. 70-71)に整理されている。

m 個や m m になるかを求めるわり算となる。(ii)-2 は n 倍したときに m 個になるのは何個か、n 倍したときに m m になるのは何 m かを求めるわり算となる。

(iii)-1 ２つの量の集合 P_1, P_2 の単位が u_1, u_2、それらによる測定値がそれぞれ $n, m \in N$ のとき、

$f_k(u_1 \times n)=u_2 \times m$ あるいは $\overline{k}\,\widetilde{\times}(u_1 \times n)=u_2 \times m$ となる k を求める除法。

(iii)-2 ２つの量の集合 P_1, P_2 の単位が u_1, u_2、u_2 による測定値がそれぞれ $m, n \in N$ のとき、

$f_n(u_1 \times k)=u_2 \times m$ あるいは $\overline{n}\,\widetilde{\times}(u_1 \times k)=u_2 \times m$ となる k を求める除法。

ただし上の式で $\overline{k}$ と $\overline{n}$ は、$u_2 \times k$ と $u_2 \times n$ をそれぞれ単位量当たりの大きさとして読み替えたものを表している。例えば「２個」を「１皿あたり２個ずつ」と読み替える。

例えば、u_1 を「１皿の多さ」、u_2 を「１個の多さ」とし、n=5、m=15 の場合を考えると、(iii)-1 は、1 皿あたり何個なら 5 皿分で 15 個になるかを求めるわり算で、算数では等分除と呼ばれる。(iii)-2 は、１皿あたり５個となるように分けると何皿分で 15 個になるかを求めるわり算で、算数では包含除と呼ばれる。

量に着目したときには、(ii)-1～(iii)-2 は区別されうるが、同時に $(p \times n) \times k = p \times (n \times k)$ や $f_n(u_1 \times k)=u_2 \times (n \times k)$ などとなるので、結局は数の除法である $n \times k=m$ や $k \times n=m$ に帰着される。

算数ではわり算のきまりが学習され、÷小数や÷分数の計算の仕方を考える際に利用される。それは、被除数と除数に同じ数をかけても、それらを同じ数でわっても商は変わらないというきまりである。本稿では $n \times k=m$ となる k が $m \div n$ の商であった。したがって、被除数と除数に同じ数をかけることは、$n \times k=m$ で n が２倍、３倍、・・・になると m も２倍、３倍、・・・になるということを意味している。そしてわり算のきまりは、n と m が比例するときには $m \div n$ が一定になるという事実と同じことを意味している。

７．分数

ある量 $p \in P$ をとったときに、ある自然数 $n \in N$ とある量 $q \in P$ が存在して、$p=q \times n$ となったとしよう。このとき q を「p を n 等分した量」と呼び、p から q を作る操作を「n 等分」と呼び、n^{-1} と書くことにする[54]。すなわち $p \times n^{-1}=q$ である。

長さなどを考えている場合、基本的には任意の長さ p と自然数 n に対して「p を n 等分した長さ」が存在すると(日常の経験上)想定できそうである[55]。しかし第１節の量の考え方にしたがった場合、こうした q が存在しない量もある。たとえば、●の集まりの多さの集合を P において、(●●●●●●の多さ)を p、n=3 とすると、q として(●●の多さ)をとると、

(●●●●●●の多さ)＝(●●の多さ)×3

54田村(1978) pp. 28-30、外狩(1985) p. 50。

55日常では何億等分もする経験は普通しないであろうし、また物理的にはどこまでも分割できるとは考えられないのかもしれないので、あくまでも私たちの日常の経験からくる感覚としての想定である。

とすることができる。つまり(●●●●●●の多さ)$\times 3^{-1}$=(●●の多さ)と表すことができる。

しかし、p=(●●●●●の多さ)に対しては、３倍してこれと等しくなる多さはＰには存在しない。このように、任意の量 p と任意の自然数 n に対して、$p=q\times n$ となる量 q が必ずしも存在しない場合、つまり p と n のとり方によっては q が存在しないことがある場合、Ｐを離散量の集合と呼ぶことにする。以下で分数の議論をするときは、$p=q\times n$ となる量 q が存在している場合の話として、議論を進めることとする[56]。

m 等分 と n 等分 の積 $m^{-1}\times n^{-1}$、および m 倍と n 等分 の積 $m\times n^{-1}$ あるいは $n^{-1}\times m$ を、自然数の積と同様に次のように決めることにする。任意の量 p に対して、

$$p\times(m^{-1}\times n^{-1})=(p\times m^{-1})\times n^{-1}、p\times(m\times n^{-1})=(p\times m)\times n^{-1}、\ p\times(n^{-1}\times m)=(p\times n^{-1})\times m$$

等分の操作について、次の F1 を仮定しておく。

F1. 任意の自然数 $n\in\mathrm{N}$ について、$n\times n^{-1}=n^{-1}\times n=1$。

これは、n 倍の操作をした後 n 等分の操作をしても、n 等分の操作をした後 n 倍の操作をしても、もとの量に戻るということにあたる。

F2. [倍の操作と等分の操作の可換性][57] 自然数 $n, m\in\mathrm{N}$ に対し、$n\times m^{-1}=m^{-1}\times n$ が成り立つ。

（証明）任意の量 $p\in P$ に対し $p\times(m^{-1}\times n)=(p\times(m^{-1}\times n))\times(m\times m^{-1})=(((p\times m^{-1})\times n)\times m)\times m^{-1}$

$=((p\times m^{-1})\times(n\times m))\times m^{-1}=((p\times m^{-1})\times(m\times n))\times m^{-1}=(((p\times m^{-1})\times m)\times n)\times m^{-1}$

$=(((p\times(m^{-1}\times m))\times n)\times m^{-1}=(p\times n)\times m^{-1}=p\times(n\times m^{-1})$。つまり、任意の量 p に対して

$p\times(n\times m^{-1})=p\times(m^{-1}\times n)$が成り立つ。これより $n\times m^{-1}=m^{-1}\times n$。(証明終わり)

証明の途中を見ると、倍の操作と等分割の操作が可換であることは、次のことに支えられている：(a) $m\times m^{-1}=1$ であること、(b) 倍の操作について交換法則が成り立つこと。

F1 により $n\times m^{-1}$ という操作と $m^{-1}\times n$ という操作は同じ操作とみなせる。そこで、以下ではこの操作を $\frac{n}{m}$ と書き、こうした操作を「分数」と呼ぶことにする[58]。分数全体の集合を Q^+と書くことにする[59]。

なお、m=1 のときは、$n\times m^{-1}$ という操作も $m^{-1}\times n$ という操作も n という操作と同じとみなすことができる。そこで、$n=n\times 1^{-1}=1^{-1}\times n$ とみなせば自然数も分数と考えられる。すなわち

---

56 田村(1978) p. 28 公理 III。

57 Nagumo (1977) p. 4、田村 (1978) p. 29 定理 1 (iii)。

58 脚注 23 と同じ捉え方である。つまり自然数と分数を同じ土俵で定義できたと考えられる。なお、ペアノの公理などにより自然数を構成する立場では、自然数の組(n, m)についてある同値関係を入れ、それによる同値類として分数が導入される 。例えば瀬山(1996, pp. 61-62)参照。

59 Q は負の数も含め有理数全体を表すために用いられる。本稿では算数で扱う正の部分だけを考えているので、+を付して Q^+と書いている。

$n \in Q^+$。

また、n=1 のとき $n \times m^{-1} = m^{-1} \times n$ は m 等分する操作になる。この操作は分数と $\frac{1}{m}$ なるが、これを「単位分数」と呼ぶ。

２つの分数の大きさについては、自然数の場合(第２節)と同様、その操作としての効果に応じて決めるものとする。すなわち、２つの分数 $r_1, r_2 \in Q^+$について、任意の量 p∈P に対して p✕r_1<p✕r_2、p✕r_1=p✕r_2、p✕r_1>p✕r_2 となるとき、それぞれ $r_1 < r_2$、$r_1 = r_2$、$r_1 > r_2$ であると言うことにする。

特に $r_1 = r_2$ となる場合について、分数の特徴を調べておく[60]。今、２つの分数 $r_1 = \frac{n_1}{m_1}$ 、$r_2 = \frac{n_2}{m_2}$ が $r_1 = r_2$ となっているとする。すなわち、任意の量 p∈P に対して、

$$p \times \frac{n_1}{m_1} = p \times \frac{n_2}{m_2}$$

となっているものとする。これを倍の操作、等分の操作で書き直すと、

$$(p \times n_1) \times m_1^{-1} = (p \times n_2) \times m_2^{-1}$$

この両辺の量をさらに$(m_1 \times m_2)$倍すると、$(m_1 \times m_2)$倍と$(m_2 \times m_1)$倍は等しいことに注意して、

$$(p \times n_1) \times m_1^{-1} \times (m_1 \times m_2) = (p \times n_2) \times m_2^{-1} \times (m_2 \times m_1)$$

$$(p \times n_1) \times m_2 = (p \times n_2) \times m_1$$

$$p \times (n_1 \times m_2) = p \times (n_2 \times m_1)$$

これが任意の p について成り立っているので、$n_1 \times m_2 = n_2 \times m_1$ であることがわかる。

逆に $n_1 \times m_2 = n_2 \times m_1$ である場合には、上の計算を逆にたどって 1 番目の式に至り、そこで両辺を$(m_1 \times m_2)$等分することで、$(p \times n_1) \times m_1^{-1} = (p \times n_2) \times m_2^{-1}$ を得る。

以上より次の F3 も、倍変換の交換法則により支えられていることがわかる。

F3.[等しい大きさの分数である条件] ２つの分数 $r_1 = \frac{n_1}{m_1}$ 、$r_2 = \frac{n_2}{m_2}$ が $r_1 = r_2$ となる必要十分条件は、$n_1 \times m_2 = n_2 \times m_1$ である。

F4.[等しい大きさの分数] 自然数 $k, m, n \in N$ に対し、 $\frac{n}{m} = \frac{n \times k}{m \times k}$ 。

（証明１） ２つの分数 $\frac{n}{m}$ と $\frac{n \times k}{m \times k}$ において、$n \times (m \times k) = m \times (n \times k)$なので F3 によりこれらの分数は等しい。

（証明２）任意の量 p∈P に対して$(p \times n) \times m^{-1} = ((p \times n) \times (k \times k^{-1})) \times m^{-1} = (((p \times n) \times k) \times k^{-1}) \times m^{-1}$

$= (p \times (n \times k)) \times (k^{-1} \times m^{-1}) = (p \times (n \times k)) \times (k \times m)^{-1}$。これより $\frac{n}{m} = \frac{n \times k}{m \times k}$ 。（証明終わり）

60 田村(1978) pp. 33-35。

F4 は算数で学習する等しい大きさの分数の内容であり、また約分の根拠を与える性質もである。証明 1 は、これらの内容の背景に F3 のような条件があることを示す。なお証明 2 では最後の部分で $m^{-1}\times n^{-1}=(m\times n)^{-1}$ であることを用いている。これが成り立つことを確認しておく。

F5. 自然数 $n, m\in\mathrm{N}$ に対し、$m^{-1}\times n^{-1}=(m\times n)^{-1}$ が成り立つ[61]。

（証明） 任意の量 p∈P に対して q=p✕$(m^{-1}\times n^{-1})$=(p✕m^{-1})✕n^{-1} とおく。今 q を $(m\times n)$倍すると、

q✕$(m\times n)$=((p✕m^{-1})✕n^{-1})✕$(m\times n)$

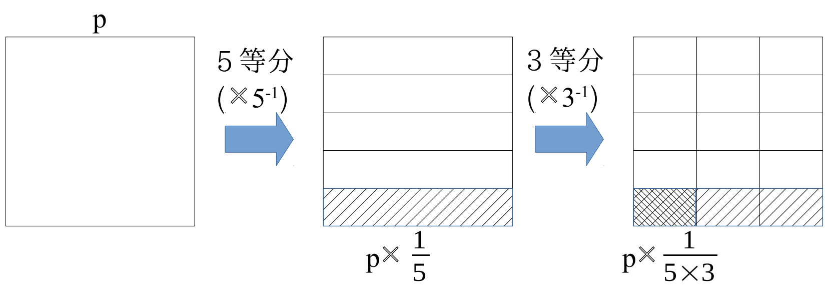
=((p✕m^{-1})✕n^{-1})✕$(n\times m)$ (M5 による)

=((p✕m^{-1})✕m (乗法の定義と $n^{-1}\times n=1$ より)

= p (乗法の定義と $m^{-1}\times m=1$ より)

つまり p=q✕$(m\times n)$であり、定義より q は「p を$(m\times n)$等分した量」とわかるので、q=p✕$(m\times n)^{-1}$ とも書くことができる。よって p✕$(m^{-1}\times n^{-1})$=p✕$(m\times n)^{-1}$。これが任意の量 p に対して成り立つので、$m^{-1}\times n^{-1}=(m\times n)^{-1}$。（証明終わり）

これはある量を m 等分割してできた量をさらに n 等分割してできる量は、$(m\times n)$等分割してできる量に等しいということになる。算数ではしばしば下のような図で表現されることがらである。



【算数教育との関わり】

この分数の定義は、「m 等分した後で n 倍する」ということであり、「m 等分したうちの n 個をとる」という算数の言い方に対応している。また量 p を$(n\times m^{-1})$倍する という操作、つまり n 倍の操作と m 等分の操作の合成を分数と呼ぶことは、n 倍の操作を自然数と呼んだことと同様の定義となっている。分数を自然数と同様に定義できることで、分数と自然数を似たものとしてとらえやすくなる。

同時に、自然数のときと同様の難しさも明らかになる。すなわち、(2/3) m や(2/3) L と単位

61田村(1978) p. 29 定理 1 (ii)。

のつかない 2/3 との関係をどう考えるかという難しさである。本稿では後者は量に対する操作であり、前者はその操作を 1 m や 1 L という量に施した結果であるとして区別する立場に立っている。

さらに本稿の定義の場合、分数は倍の操作と等分の操作の合成であり、分数がもともと 2 つの要素の合成であり、それを 1 つの要素としてみなしているという難しさも浮き彫りになる。

算数では分数について、「分割分数」「操作分数」といった言い方がされることがあるが、後者は本稿のように考えた分数の操作の側面を、前者は合成をする前の個々の操作を強調したものと考えられる。また「割合分数」という場合には、$q=p\times\frac{n}{m}$ であるときに、2 つの量 p と q の関係に焦点を当てて分数をとらえたものと言える。これは本稿第 2 節で、$q=p\times n$ のとき数 n を「p をもとにした q の割合」と呼んでいたことの拡張となっている。

さらに算数では分数に長さの単位 m や液量の単位 L がついた $\frac{1}{3}$ m、$\frac{3}{4}$ L などを「量分数」と称する場合があるが、これは分数という操作を量 p に施した結果に焦点を当てたとらえ方と考えられる。いろいろな種類の分数があるわけではなく、分数が用いられる場面、あるいは分数が表現できる異なる数学的アイデア[62]を指しているのである。

p として 1 m という長さを、$m=3$、$n=2$ とすると、$p\times(m^{-1}\times n)$は「1 m を 3 等分した後 2 倍した量」であり、$p\times(n\times m^{-1})$は「1 m を 2 倍した後 3 等分した量」となる。F1 で $n\times m^{-1}=m^{-1}\times n$ を示したので、この 2 つの量は等しいことがここから示されたことになる。つまり、「3 分の 1 メートルの 2 つ分の長さ」と「2 メートルを 3 等分した長さ」とが等しくなることを、F2 は保証している。逆に言えば、「3 分の 1 メートルの 2 つ分の長さ」と「2 メートルを 3 等分した長さ」が等しいかを考えることは、2 倍の操作と 3 等分の操作とが交換可能なのかを考えることになる。

８．分数の演算

分数の加法は、自然数の場合と同様に定義できる。すなわち 2 つの分数 $r_1=\frac{n_1}{m_1}$、$r_2=\frac{n_2}{m_2}$ に対し、和 r_1+r_2 を次のような操作として定める：量 $p\in P$ に対して $p\times(r_1+r_2)=p\times r_1+p\times r_2$。

ここで前節 F4 を用いると、$r_1=\frac{n_1}{m_1}=\frac{n_1\times m_2}{m_1\times m_2}$、$r_2=\frac{n_2}{m_2}=\frac{n_2\times m_1}{m_2\times m_1}$ なので、

$$p\times(r_1+r_2)=p\times r_1+p\times r_2=p\times\frac{n_1\times m_2}{m_1\times m_2}+p\times\frac{n_2\times m_1}{m_2\times m_1}$$

$$=p\times((n_1\times m_2)\times(m_1\times m_2)^{-1})+p\times((n_2\times m_1)\times(m_1\times m_2)^{-1}) \quad \text{（分数の定義による）}$$

$$=p\times((m_1\times m_2)^{-1}\times(n_1\times m_2))+p\times((m_1\times m_2)^{-1}\times(n_2\times m_1)) \quad \text{（F2 による）}$$

62 石橋 (2006, p. 53)参照。

$=(p\times(m_1\times m_2)^{-1})\times(n_1\times m_2)+(p\times(m_1\times m_2)^{-1})\times(n_2\times m_1)$（操作の合成の定義より）

$=(p\times(m_1\times m_2)^{-1})\times((n_1\times m_2)+(n_2\times m_1))$

（$p\times(m_1\times m_2)^{-1}$ を１つの量と見て自然数の和の定義より）

$=p\times((m_1\times m_2)^{-1}\times((n_1\times m_2)+(n_2\times m_1)))$　　（操作の合成の定義より）

つまり、任意の量 p に対して $r_1+r_2=(m_1\times m_2)^{-1}\times((n_1\times m_2)+(n_2\times m_1))$が成り立つ。以上より、分数の和について、次のことが言える。

$$\frac{n_1}{m_1}+\frac{n_2}{m_2}=\frac{n_1\times m_2+n_2\times m_1}{m_1\times m_2}$$

この式を求めた過程を見ると、$p\times(m_1\times m_2)^{-1}$ を１つの量と見ることが重要な役割を果たしていることがわかる。また最後の式からもわかるように、自然数の加法と乗法の交換法則を前提にすれば、分数の加法の交換法則も示すことができる。

加法が定義できたので、自然数のときと同様に、減法も定義することができる。

$r_1<r_2$ である２つの分数 $r_1, r_2\in Q^+$については、$r_1<r_2$ の定義により、任意の量 $p\in P$ に対して $p\times r_1<p\times r_2$ となるので、ある量 p' が存在して $p\times r_1+p'=p\times r_2$ となる。今、$p\times r'=p'$となる操作 r'をとると、

$$p\times(r_1+r')=p\times r_1+p\times r'=p\times r_1+p'=p\times r_2$$

つまり、$r_1+r'=r_2$となる。この r'を「r_2と r_1の差」と呼ぶ。またこのことを $r'=r_2-r_1$と書く。

このような r'は、$r_1<r_2$であればいつでも存在する。実際、$r_1=\frac{n_1}{m_1}$ 、$r_2=\frac{n_2}{m_2}$ とすると、先に見たように $r_1=\frac{n_1}{m_1}=\frac{n_1\times m_2}{m_1\times m_2}$ 、$r_2=\frac{n_2}{m_2}=\frac{n_2\times m_1}{m_2\times m_1}$ であったから、これを $p\times(r_1+r')=p\times r_2$に代入すると、

$$p\times\left(\frac{n_1\times m_2}{m_1\times m_2}+r'\right)=p\times\frac{n_2\times m_1}{m_2\times m_1}$$

そこで、$r'=\frac{n_2\times m_1-n_1\times m_2}{m_1\times m_2}$ と置くと、$r_1<r_2$より $n_1\times m_2<n_2\times m_1$ なので、$n_2\times m_1-n_1\times m_2$ も自然数となる。したがって、この r'が $p\times(r_1+r')=p\times r_2$を満たす r'であり、$r'=r_2-r_1$が存在することがわかる。

乗法は自然数と同様、各分数による操作の合成として定義される。量 $p\in P$ に対して r_1倍($r_1\in Q^+$)した量を p'としたとき、その量 p'をさらに r_2倍($r_2\in Q^+$)したものを量 p"とする。すなわち、

$$(p\times r_1)\times r_2=p'\times r_2=p''$$

ここで、量 $p\in P$ に対して p"を作る操作は r_1倍した結果に続けて r_2倍をする操作、つまり r_1

と r_2 の合成である。この合成された操作を $r_1 \times r_2$ と書き、「r_1 と r_2 の積」とする。この書き方を用いると上の式は次のように書くことができる。

$$(\mathrm{p} \times r_1) \times r_2 = \mathrm{p} \times (r_1 \times r_2)$$

今、 $r_1 = \frac{n_1}{m_1}$ 、$r_2 = \frac{n_2}{m_2}$ とすると、

$$\mathrm{p} \times (r_1 \times r_2) = (\mathrm{p} \times r_1) \times r_2 = (\mathrm{p} \times \frac{n_1}{m_1}) \times \frac{n_2}{m_2}$$

$$= (\mathrm{p} \times (n_1 \times m_1^{-1})) \times ((m_2 \times m_2^{-1}) \quad \text{（分数の定義による）}$$

$$= \mathrm{p} \times ((n_1 \times m_1^{-1}) \times (m_2 \times m_2^{-1})) \quad \text{（操作の合成の定義による）}$$

$$= \mathrm{p} \times (n_1 \times m_2 \times m_1^{-1} \times m_2^{-1}) \quad \text{（F2 による）}$$

$$= \mathrm{p} \times ((n_1 \times m_2) \times (m_1 \times m_2)^{-1}) \quad \text{（F5 による）}$$

つまり、任意の $\mathrm{p} \in \mathrm{P}$ に対して $r_1 \times r_2 = (n_1 \times m_2) \times (m_1 \times m_2)^{-1}$ が成り立つ。以上より、分数の積について次のことがいえる。

$$\frac{n_1}{m_1} \times \frac{n_2}{m_2} = \frac{n_1 \times n_2}{m_1 \times m_2}$$

この式からわかるように、自然数の乗法の交換法則を前提にすれば、分数の乗法についても交換法則を示すことができる。

最後に除法であるが、これも自然数のときと同様に、ある分数と合成したときに別の分数になるような操作を求めることとして定義できる。すなわち、２つの分数 $r_1, r_2 \in \mathrm{Q}^+$ について、 $\mathrm{p} \in \mathrm{P}$ である任意の量 p に対しある分数 $r' \in N$ が存在して、$\mathrm{p} \times (r_2 \times r') = (\mathrm{p} \times r_2) \times r' = \mathrm{p} \times r_1$ となったとする。つまり $r_2 \times r' = r_1$。このとき r' を $r_1 \div r_2$ と書き、「r_1 を r_2 で割ったときの商」と呼ぶ。また $r_1 \div r_2$ を求める操作を除法と呼ぶ。

今、 $r_1 = \frac{n_1}{m_1}$ 、$r_2 = \frac{n_2}{m_2}$ であったとし、これらを $\mathrm{p} \times (r_2 \times r') = \mathrm{p} \times r_1$ の左辺に代入すると、

$$\mathrm{p} \times (r_2 \times r') = \mathrm{p} \times (\frac{n_2}{m_2} \times r') = \mathrm{p} \times (n_2 \times m_2^{-1} \times r')$$

これが $\mathrm{p} \times r_1 = \mathrm{p} \times \frac{n_1}{m_1}$ と等しくなるためには、$r' = m_2 \times n_2^{-1} \times n_1 \times m_1^{-1}$ でなければならない[63]。つまり、

$$r' = m_2 \times n_2^{-1} \times n_1 \times m_1^{-1} = (n_1 \times m_1^{-1}) \times (m_2 \times n_2^{-1}) = \frac{n_1}{m_1} \times \frac{m_2}{n_2}$$

以上より、$r_1 \div r_2 = \frac{n_1}{m_1} \div \frac{n_2}{m_2} = \frac{n_1}{m_1} \times \frac{m_2}{n_2}$ となる。

任意の $r_1, r_2 \in \mathrm{Q}^+$ に対して、この商はいつでも存在しうる。自然数では２つの自然数に対して商となる自然数がいつも存在するとは限らなかったが、分数においてはいつでも除法を

63 要は、$r' = (r_2)^{-1} r_1$ とすれば、$r_2 \times r' = r_1$ となる。

して商を求めることができる。

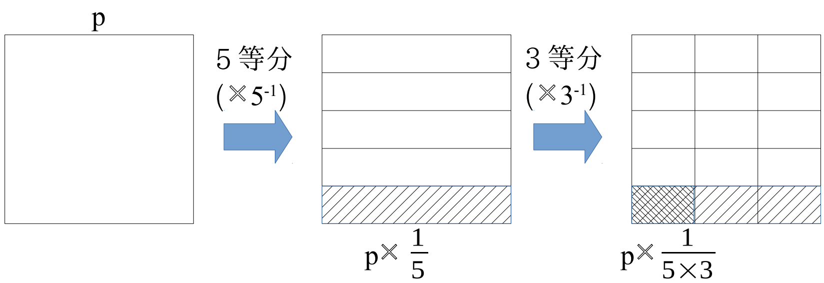
ここで $r_2=\frac{n_2}{m_2}$ に対して、$\frac{m_2}{n_2}$ を $\frac{n_2}{m_2}$ の逆数と呼ぶことにすると、上の結果は、分数で割るときはその逆数をかけると商が求まることを示している。なお、もとの分数とその逆数の積が 1 になること、つまり $\frac{n_2}{m_2}\times\frac{m_2}{n_2}=\frac{m_2}{n_2}\times\frac{n_2}{m_2}=1$ であることは、分数の乗法と F3(等しい大きさの分数である条件)から示される。

【算数教育との関わり】

分数の四則演算についても、数が量に対する操作という視点から定義をした場合、その考え方と自然数の四則演算に関わる性質を用いて、2 つの分数の和、差、積、商がどのようになるかを求めることができた。算数で言えば、どのように計算をしたらよいかを導くことができたことになる。

2 つの分数の和がどのようになるかを考える際に、p$\times(m_1\times m_2)^{-1}$ を 1 つの量と見ることが重要であった。これは分数の加法を計算する際に、通分をしてできる分数 $\frac{1}{m_1\times m_2}$ の重要性を改めて示すものである。

積がどのようになるかを考える際には、F2 と F5 という分数に関わる性質を利用した。つまり、$n_1, \frac{1}{m_1}, n_2, \frac{1}{m_2}$ の順序を入れ替えてもよいという性質、またその結果として $\frac{1}{m_1}\times\frac{1}{m_2}$ から生じた $\frac{1}{m_1\times m_2}$ が積でも重要な働きをしている、ということである。これは F5 に関わる説明でも示した次のような図が、算数の学習でも用いられていることに呼応している。



またこのような図を用いて $\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}$ を説明する場合、4, $\frac{1}{5}$, 2, $\frac{1}{3}$ を適宜、交換しながら説明をしており、上で $\frac{n_1}{m_1}\times\frac{n_2}{m_2}=\frac{n_1\times n_2}{m_1\times m_2}$ を導いたときと類似の推論が、実は図の上で行われている。式の形で説明をしてみることで、図の上で感覚的に行われていた推論を明示化することができる。

除法 $r_1\div r_2$ については、1 あたりの大きさを求めるという考えから商を求める場合も多い

が、「１あたがいくつなら r_2 分が r_1 となるか」を考えているという意味では、$r'\times r_2=r_1$ となるを求めていることになる。また面積図などを用いて商を求めるときにも、上の説明に現れた $m_2\times n_2^{-1}\times n_1\times m_1^{-1}$ にあたる操作である $(n_1\times m_1^{-1})\times n_2^{-1}\times m_2$ を、面積図や場面の意味をもとにして行う考え方が扱われることがある。さらに除法のきまり $r_1\div r_2=(r_1\times r_2^{-1})\div(r_2\times r_2^{-1})$ を用いる考えも扱われることがあるが、第６節の最後に述べたように、これは $r'\times r_2=r_1$ において r_1 と r_2 が比例するとき r' が一定であることを前提にしている。つまり、上の説明に出てきた式変形や比例に基づく推論を、場面の意味や図の上の操作に基づいて行っている。逆に言えば、場面や図の背後には、そうした推論が隠されていることになる。

９．自然数の除法と分数

２つの自然数 $m, n\in\mathrm{N}$ について、その商 $k=m\div n$ を考える。すなわち p である任意の量 $\mathrm{p}\in\mathrm{P}$ に対して $\mathrm{p}\times(n\times k)=\mathrm{p}\times m$ となる数 k を考える。上でも述べたようにこうした k を自然数の中でさがす場合は、必ずしもみつかるとは限らない。しかし分数までさがす範囲を広げると、２つの自然数に対していつでもこうした k を見出すことができる。実際、$k=\frac{m}{n}$ ととると、

$$\mathrm{p}\times(n\times k)=\mathrm{p}\times(n\times\frac{m}{n})=(\mathrm{p}\times n)\times(m\times n^{-1})=(\mathrm{p}\times n)\times(n^{-1}\times m)=((\mathrm{p}\times n)\times n^{-1})\times m=\mathrm{p}\times m$$

となり $\mathrm{p}\times(n\times k)=\mathrm{p}\times m$ を満たすので、この $k=\frac{m}{n}$ が商 $m\div n$ になることがわかる。

また上で見たように、$m\div n=\frac{m}{n}=m\times\frac{1}{n}=m\times n^{-1}$ なので、n による除法は n の逆数 $\frac{1}{n}$ をかけること(つまり $\frac{1}{n}$ と合成した操作を作ること)、あるいは n 等分との合成した操作を作ることに等しい。

【算数教育との関わり】

$k=\frac{m}{n}$ が商 $m\div n$ になることを示す式を振り返ると、そこで重要だったのは $m\times n^{-1}=n^{-1}\times m$ の関係であった。つまり、倍の操作と等分の操作が交換可能だという性質である。実はこのことは、算数の教科書でも重要な役割を果たしている。

算数では小学校５年で $2\div3=\frac{2}{3}$ となることを学習するが、その際、例えば２Ｌの牛乳を３等分したときの量を図などを用いて考える。このとき２Ｌの牛乳を３等分したときの量は、１Ｌを２倍してできる量を３等分するので、$(1\,\mathrm{L}\times2)\times3^{-1}$ となる。一方で、教科書では 2/3 L は 1/3 L が２つ分の大きさであり、その 1/3 L は１Ｌを３等分してできる量とされることが

ある。これを同様に表すと、2/3 L=(1 L×3^{-1})×2 となる。この両者が等しいので、

$$(1\ \mathrm{L}\times 2)\times 3^{-1}=(1\ \mathrm{L}\times 3^{-1})\times 2$$

つまり、2 倍の操作と 3 等分の操作とが交換可能であるということが、この関係を支えていることがわかる。

こうした商が分数により表せること、あるいは n による除法は n の逆数 $\frac{1}{n}$ をかけることだという考え方は、中学校３年の無理数の学習や高校での複素数の学習において、その除法を考える場面で重要な役割を果たしている。また中学校１年の文字式の学習で、四則計算を文字式で表す際にも、除法は分数で表されることにもつながる学習内容である。

１０．割合と比

第２節では、２つの量 $p_0, p\in P$ と自然数 $n\in N$ について $p=p_0\times n$ となっているとき、「p は p_0 の n 倍である」、「p_0 を単位とする p の測定値は n である」と言うとともに、n を「p_0 をもとにした p の割合」とも呼ぶとした。また第７節では $p=p_0\times\frac{n}{m}$ であるとき、２量 p_0, p の関係に焦点を当てて分数をとらえたものを「割合分数」と呼ぶとした。自然数にならうと、分数 $r=\frac{n}{m}$ を「p_0 をもとにした p の割合」と呼ぶことができよう。

ここで p_0, p とは異なる２量 $q_0, q\in P$ があって、やはり $q=q_0\times\frac{n}{m}$ となっているとする。このとき、「$p:p_0=q:q_0$」と書いて、「$p:p_0$」を「p と p_0 の比」と呼び、「$p:p_0=q:q_0$」であることを「２つの比は等しい」と言う。また、$p=p_0\times\frac{n}{m}$ であることを「$p:p_0=n:m$」とも書く[64]。さらに $\frac{n}{m}$ を「$p:p_0$ の比の値」とも呼ぶ[65]。比を用いると、割合が分数になる２量についても、その関係を自然数だけを用いて表すことができる。

今、２つの量 $p_1, p_2\in P$ が P の単位としてとられた量 u_0 の自然数倍である場合を考えてみる。すなわち、自然数 n_1 , $n_2\in N$ があり、$p_1=u_0\times n_1$、$p_2=u_0\times n_2$ となっているとする。このとき、$p_1=u_0\times n_1=u_0\times(n_2\times\frac{n_1}{n_2})=(u_0\times n_2)\times\frac{n_1}{n_2}=p_2\times\frac{n_1}{n_2}$ であるから、$p_1:p_2=n_1:n_2$ となる。つまり、p_1 と p_2 の測定値が自然数の場合、それらを並べることで２量の比を表すことができる。

---

64 田村(1978)は「$p:p_0=n/m$」と示した上で、「この式の右辺を‘自然数の比’ $n:m$ で表す習慣がある」(p. 41) としている。ただしここでの等号の解釈には、少し注意が必要であろう。
65 田村(1978)は n/m 自体を「p の p_0 に対する比」と呼び、それを「$p:p_0$ で表す」としている(p. 40)。

比に関わる２つの性質について、本稿の立場から示しておく。第一に、２組の量 p_1 と p_2、および p_3 と p_4 について、$p_1=p_2×\frac{n_1}{n_2}$、$p_3=p_4×\frac{n_3}{n_4}$ (ただし $n_1, n_2, n_3, n_4 \in N$)であるとする。このとき $p_1 : p_2=p_3 : p_4$ で、かつある自然数 $k \in N$ に対し $p_3=p_1×k$ となっているならば、$p_4=p_2×k$ が成り立つ。逆にある自然数 $k \in N$ に対し $p_3=p_1×k$ かつ $p_4=p_2×k$ となっているならば、$p_1 : p_2=p_3 : p_4$ が成り立つ。

（証明）今 $p_1 : p_2=p_3 : p_4$ であるとすると、$\frac{n_1}{n_2}=\frac{n_3}{n_4}$。ここで $p_3=p_1×k$ であったから、$p_4×\frac{n_3}{n_4}$

$=p_3=p_1×k=(p_2×\frac{n_1}{n_2})×k=p_2×(\frac{n_1}{n_2}×k)=p_2×(k×\frac{n_1}{n_2})=p_2×(k×\frac{n_3}{n_4})$ となる。つまり、

$$p_4×\frac{n_3}{n_4}=(p_2×k)×\frac{n_3}{n_4}$$

となる。よって $p_4=p_2×k$。

逆に、$p_3=p_1×k$ かつ $p_4=p_2×k$ とすると、$p_3=p_1×k=(p_2×\frac{n_1}{n_2})×k=p_2×(\frac{n_1}{n_2}×k)=p_2×(k×\frac{n_1}{n_2})$

$=(p_2×k)×\frac{n_1}{n_2}=p_4×\frac{n_1}{n_2}$、つまり $p_3=p_4×\frac{n_1}{n_2}$ となる。

よって、$p_1 : p_2=p_3 : p_4$。（証明終わり）

この第一の性質は、右のような図式でしばしば表される。

$$\overset{\times k}{\frown}\qquad\qquad$$
$$p_1 : p_2 = p_3 : p_4$$
$$\qquad\qquad\underset{\times k}{\smile}$$

なお、この第一の性質は、各量の測定値、すなわち数についても成立する。実際、P の単位として量 u_0 をとり、それによる p_1, p_2, p_3, p_4 の測定値が、例えば $n_1, n_2, n_3, n_4 \in N$ であったとする。このときある自然数 $k \in N$ に対し $n_1:n_2=n_3:n_4$ で $n_3=n_1×k$ であったとすると、$\frac{n_3}{n_4}=\frac{n_1×k}{n_4}$ となるので、$\frac{n_1}{n_2}=\frac{n_3}{n_4}$ であることと $n_4=n_2×k$ となることが同じになる。測定値や k が分数の場合も同様。

第二の性質として、$p_1=u_0×n_1$、$p_2=u_0×n_2$、$p_3=u_0×n_3$、$p_4=u_0×n_4$ のとき、$p_1 : p_2=p_3 : p_4$ ならば $n_1×n_4=n_2×n_3$。逆に $n_1×n_4=n_2×n_3$ となっているならば、$p_1 : p_2=p_3 : p_4$ が成り立つ。

（証明）$p_1 : p_2 = p_3 : p_4$ でならば上に示した第一の性質よりある $k \in N$ に対し $n_3 = n_1 \times k$、$n_4 = n_2 \times k$ となる。よって $n_1 \times n_4 = n_1 \times (n_2 \times k) = n_2 \times (n_1 \times k) = n_2 \times n_3$ となる。

逆に $n_1 \times n_4 = n_2 \times n_3$ となっているとすると、等しい大きさの分数である条件 F3.より、

$\frac{n_1}{n_2} = \frac{n_3}{n_4}$ が言えるので、$p_1 : p_2 = p_3 : p_4$ が成り立つ。（証明終わり）

この第二の性質は右のように図式化することができる。いわゆる外項の積と内項の積が等しいということである。

$$\begin{tikzcd} p_1 \arrow[rrrrrr, bend left, "n_1 \times n_4"] & : & p_2 \arrow[rr, bend right, "n_2 \times n_3"'] & = & p_3 & : & p_4 \end{tikzcd}$$

ただし、量と量のかけ算を考えないとすれば、測定値どうしのかけ算として考えることになる。この点は、量を何倍かすることによっても考えることができた第一の性質とは少し異なっている。

【算数教育との関わり】

本稿では２つの量 $p_0, p \in P$ と分数 $r \in Q^+$ について $p = p_0 ※ r$ となっていること、p が p_0 の r 倍であること、p_0 をもとにした p の割合が r であること、さらに $p : p_0$ の比の値が r であることを同じことであると考えている。その上で、P の単位 u_0 を適当にとり、それに対する p_0, p の測定値がそれぞれ自然数 $m, n \in N$ となる場合には、「$p : p_0 = n : m$」とも書くことで、分数倍である関係を、２つの自然数を並べて表現することができるとした。ようするに、「p は p_0 の $\frac{n}{m}$ 倍である」ことを「$p : p_0$ は $n : m$ である」と自然数だけで表現できる。

比についての２つの性質のうち、第一の方は算数でよく用いられる。これにより、２組の比のうち、わからない１つの量を求めることになる。第二の方は中学校数学でよく用いられる。中学校では１次方程式の応用の一つとして、求める量を x として第二の性質から x の方程式を作る。算数と中学校数学では比の利用の仕方にこうした違いがあるが、２つの性質の証明からわかるように、いずれも分数が等しい条件に支えられている。また第一の性質は量の倍としても記述できたが、第二の性質については、量と量の乗法(例えば 80 mL と 120 mL を量としてかけ算すること)を特にしていないことから、量自体としては記述できず、その測定値により数のかけ算として性質を記述することになる。

比についても、量の比も考えるのか[66]、それとも量を測定したときの数の比だけを考えるのかで、違いが出てくる部分もある。

１１．ゼロの導入

ここまでの議論では十進位取り記数法に触れてこなかったこともあり、ゼロを導入せず

66 量の比を考えた場合、比の値は無次元量ということになろう(国際単位系(SI)国際文書 p. 31 参照)。

にきた。数を数学的に構成する議論でも、しばしばゼロは自然数を構成し、それらの演算も考えた後で、最初の拡張として行われることがある[67]。

本稿の立場ではまず、次のような量o(オー)を想定する：任意の量$p \in P$に対して、$p+o=o+p=p$。また$o+o=o$とする。このような量oをゼロ量と呼んでおく[68]。また量の集合Pにゼロ量oを加えたもの、つまり$P \cup \{o\}$をPを拡張したという意味で$\overline{P}$と書くことにする。

$p_1+p_3=p_2$となるときp_3を「p_2とp_1の差」と呼んだので、このことをそのまま$\overline{P}$に拡張して解釈すれば、oは「pとpの差」だと考えることができる。またある量p_3が存在して$p_1+p_3=p_2$となる場合は$p_1<p_2$であったが、これを$\overline{P}$に拡張した場合には、$p \in P$に対して$o+p=p$と定めたので、任意の量pに対して$o<p$と考えなければならない。

今、Pを拡張した$\overline{P}$においても、量について仮定したP1～P5が成り立つかを確認してみる。まず$p+o=p$、$o+o=o$なので２量の和はまた$\overline{P}$の要素になる(P1に相当)。$p+o=o+p$はoを導入するときに仮定したのでP2に相当する仮定も成り立つ。$(p_1+o)+p_2=p_1+p_2=p_1+(o+p_2)$、つまり$(p_1+o)+p_2=p_1+(o+p_2)$が成り立ち、oが他の位置にきたときも同様に示せるので、P3に相当する仮定も成り立つ。

P4の$p_1+p_2 \neq p_1$については、$p_2=o$のときは成り立たない。そこで$\overline{P}$に拡張する際には、「p_1とp_2が$\overline{P}$の要素で、かつ$p_2 \neq o$ならば$p_1+p_2 \neq p_1$」と修正する必要がある。P5についてはp_1かp_2がoであることは差し支えないが、p_3がoだとすると$p_1 \neq p_2$でなくても$p_1+p_3=p_2$と$p_1=p_2+p_3$がともに成り立ってしまう。そうなるとP5をもとに量の大小を決めにくくなる。そこで、次のように修正しておく：「p_1とp_2がPの要素で$p_1 \neq p_2$であるならば、oでないある量p_3が存在して、$p_1+p_3=p_2$か$p_1=p_2+p_3$が成り立つ」。

こうして拡張した$\overline{P}$に対して、分数$r \in Q^+$という操作を施すことを考える。oでない量pについては$p \in P$であるから、前に決めたように$p \times r$を考えればよい。$o \times r$については、次のように考えてみる。まずoの決め方から$p+o=p$であった。この両辺に分数rを施すと、左辺は$(p+o) \times r=p \times r+o \times r$であるから、$p \times r+o \times r=p \times r$となる。ここで$o \times r \neq o$とすると上で確認したP4を拡張した仮定に反する。よって$o \times r=o$でなければならない。つまりゼロ量にどのような分数を施してもゼロ量になる。

次に、任意の量$p \in \overline{P}$に対して施したときにゼロ量になるような操作を考える。これを０と書くことにする。すなわち、$p \times 0=o$である。この０が本稿の立場でいうところの数０になる[69]。この０について、次のような性質が成り立つ。

01. 任意の自然数$n \in N$や分数$r \in Q^+$に対して、$n+0=0+n=n$、$r+0=0+r=r$。

---

67 例えば彌永(1972)では、p. 62から自然数の議論を始め、加法と乗法の交換法則と結合法則、両者の分配法則なども示し、自然数の系Nを構成した後、p. 96でNの拡大として0を含む$\overline{N}$を構成し、これを「‘数範囲の拡大’の最も簡単な、しかし典型的な一つの場合」と呼んでいる。なお「自然数」の中に0を含めるか、含めないかについては例えば同書のp. 103を参照。

68 この名称は田村(1978)に習っている。ゼロ量に関する議論は同書のpp. 26-27を参照。

69 １対１対応による同値をもとに数を考えるとすれば、０は空集合{ }あるいはϕと同値な類となろう。

（証明）任意の量 p∈$\overline{\mathrm{P}}$ に対して p✕(n＋0)=p✕n＋p✕0=p✕n＋o=p✕n。よって n＋0=n。他も同様。

02. 任意の自然数 n∈N や分数 r∈Q^+に対して、n×0=0×n=0、r×0=0×r=0。

（証明）任意の量 p∈$\overline{\mathrm{P}}$ に対して p✕(n×0)=(p✕n)✕0。p✕n も 1 つの量なので 0 を施すと 0 になるので、p✕(n×0)=o=p✕0。よって n×0=0。他も同様。

【算数教育との関わり】

算数においては十進位取り記数法を指導する必要もあり、小学校 1 年の最初の方で 0 を学習する。その際に、モノが徐々に減って、最後になくなった状態を表現するために必要な数として 0 が導入されているようである。これはゼロ量を作る操作を 0 と呼んだり、他の構成の仕方で空集合の濃度を 0 と呼ぶことと整合している。

0 の導入により、何もない状態でも「0 個」とか「0 m」と表現することができるようになる。これは分数の導入により半端な量が表現できるようになるとか、負の数の導入により向きが異なる 2 つの量を同じ仕方で表現できるようになるといったのと同様の利点を持つ。逆に言えば、分数や負の数の導入と同じような難しさを、0 が抱えているとも推測できる。基本的には、「ものがあるから数を数えるという行為が意味をもつので、なにもないものを数えようとはしない」[70]のが普通であろう。あえて数 0 を導入することで、なにもないところに個数を見たり、長さを見たりすることで、「ある」ときと「ない」ときを統一的にとらえることができる。

こうした難しさは歴史的に数 0 がどのように使われるようになり、どのように受容されてきたかにも反映されている[71]。

---

70 瀬山(1996, p. 29)。
71 例えば.。また野崎ほか(2001, pp. 32-35)も参照。

引用・参考文献

足立恒雄. (2009). 数概念について. 数理解析研究所講究録, *1625*, 1-11. (http://repository.kulib.kyoto-u.ac.jp/dspace/handle/2433/140305)

足立恒雄. (2011). 数とは何か：そしてまた何であったか. 共立出版.

足立恒雄. (2013). フレーゲ・デデキント・ペアノを読む：現代における自然数論の成立. 日本評論社.

デデキント, R. (1961). 数について (河野伊三郎訳). 岩波書店. (原書は 1872 年および 1887 年)

藤井淳一. (1982). 量の数学的構造. 数学教育研究(大阪教育大学数学教室), *12*, 173-185.

藤井淳一. (1985). 量の数学的構造 II. 数学教育研究(大阪教育大学数学教室), *14*, 99-113.

銀林　浩. (1078, 2 月). 量の問題をめぐって・発生的立場からも考えよう. 数学セミナー, *195*, 27-31.

Gray, E. M. & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26* (2), 115-141.

石橋康徳. (2006). 算数学：学習材と理論. 日本評論社.

彌永昌吉. (1972). 数の体系(上). 岩波書店.

JCGM (2012). International vocabulary of metrology: Basic and general concepts and associated terms. http://www.bipm.org/en/publications/guides/vim.html.

河田敬義. (1968). 自然数論. 森北出版.

Kitcher, P. (1984). *The nature of mathematical knowledge*. New York: Oxford University Press.

小島寛之. (2008). 数学でつまずくのはなぜか. 講談社.

小島　順. (1977a, 8 月). “量の計算”を見直す：１ 教科書の中の量. 数学セミナー, *189*, 37-42.

小島　順. (1977b, 9 月). “量の計算”を見直す：２ 量の線型空間とその双対. 数学セミナー, *190*, 53-58.

小島　順. (1977c, 10 月). “量の計算”を見直す：３ 正比例と量の割算. 数学セミナー, *191*, 67-72.

小島　順. (1977d, 11 月). “量の計算”を見直す：４ 量のテンソル積. 数学セミナー, *192*, 56-61.

小島　順. (1977e, 12 月). “量の計算”を見直す：５ 量の分類. 数学セミナー, *193*, 52-58.

小島　順. (1978f, 1 月). “量の計算”を見直す：６ 空間の中の量. 数学セミナー, *194*, 68-74.

小島　順. (1980). 量の数学について. 斎藤正彦, 廣瀬健, 森毅 (編著), 数学と教育・シンポジウム数学１・数学セミナー増刊 (pp. 137-152). 日本評論社.

黒木哲徳. (2009). 入門 算数学(第２版). 日本評論社.

ランダウ, E. (2014). 数の体系：解析の基礎 (蟹江幸博訳). 丸善出版. (原書は 1951 年)

Lodge, A. (1888). The multiplication and division of concrete quantities. *Nature*, *38*, 281-283.

森 毅. (1976). 現代数学と数学教育. 裳華房.

Nagumo, M. (1977). Quantities and real numbers. *Osaka Journal of Mathematics*, *14*, 1-10. (https://projecteuclid.org/euclid.ojm/1200770204)

野崎昭弘, 何森仁, 伊藤潤一, 小沢健一. (2001). 数と計算の意味がわかる. ペレ出版.

布川和彦. (2013). 「数学：パターンの科学」の捉え方と学校数学の関係の検討. 上越教育大学研究紀要, *32*, 169-180. (http://www.juen.ac.jp/g_katei/nunokawa/kaita/BJUE32.pdf)

大竹公一郎. (1995). 数体系のシナリオ：自然数の公理から有理数まで. 群馬大学教育学部紀要. 自然科学編, *44*, 5-21. (https://gair.media.gunma-u.ac.jp/dspace/handle/10087/816)

大谷実, 中村雅恵. (2004). 比例の指導における数表・グラフ・式のシンボル化過程：教授実験における教師と児童の談話の質的分析. 日本数学教育学会誌, *86* (4), 3-13.

サイフェ, C. (2009). 異端の数ゼロ. 早川書房. (原書は 2000 年)

産業技術総合研究所計量標準総合センター. (2006). 国際単位系(SI)国際文書第 8 版日本語版. https://www.nmij.jp/library/units/si/R8/SI8J.pdf.

Schwartz, J. L. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades: Research agenda for mathematics education volume 2* (pp. 41-52). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

瀬山士郎. (1996). 数をつくる旅５日間. 遊星社.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22* (1), 1-36.

志賀浩二, 砂田利一. (1996). 高校生に贈る数学 III. 岩波書店.

正田　良. (2014). 濃さの向こうに広がる世界：小中連携をめざす算数・数学へのヒント. 学校図書.

Singer, J. A., Kohn, A. S., Resnick, L. B. (1997). Knowing about proportions in different contexts. In T. Nunes & P. Bryant (Eds), *Learning and teaching mathematics: An international perspective* (pp. 115-132). Sussex, UK: Psychology Press.

鈴木佑京. (2015). 可述算術の世界. (http://researchmap.jp/?action=cv_download_main&upload_id=79018).

高木貞治. (1949). 数の概念. 岩波書店.

高野道夫. (2007). 自然数論の新しい公理化試論. 数学教育研究 (新潟大学教育人間科学部数学教室), *42* (2), 15-28. (http://dspace.lib.niigata-u.ac.jp/dspace/handle/10191/13177)

竹内　啓. (1978a, 8 月). 量概念の意味と役割(1). 数学セミナー, *201*, 39-42.

竹内　啓. (1978b, 9 月). 量概念の意味と役割(2) 量の意味と条件. 数学セミナー, *202*, 61-65.

Tall, D. O. et al. (2001). Symbols and the bifurcation between procedural and conceptual thinking. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *1* (1), 81-104.

田村二郎. (1978). 量と数の理論. 日本評論社.

田村二郎. (1978a, 3 月). 量と数の理論：I. ユークリッド式量空間. 数学セミナー, *196*, 51-56.

田村二郎. (1978b, 4 月). 量と数の理論：II. 対称量空間. 数学セミナー, *197*, 58-62.
田村二郎. (1978c, 5 月). 量と数の理論：III. 量空間の連続性と実数. 数学セミナー, *198*, 68-73.
田村二郎. (1978d, 6 月). 量と数の理論：IV. 比例と量の乗除. 数学セミナー, *199*, 81-85.
外狩善男. (1985). 量と数：量空間の変換としての数について. イプシロン(愛知教育大学数学教室), 27, 46-55. (http://repository.aichi-edu.ac.jp/dspace/handle/10424/1068)
遠山啓. (1978). 遠山啓著作集数学教育論シリーズ５：量とはなにかＩ内包量・外延量. 太郎次郎社.
志賀浩二. (2000). はじめからの数学１：数について. 朝倉書店.
渡辺嘉二郎. (2010). カントがつかんだ、落ちるりんご：観測と理解. オーム社.
吉田甫. (1991). 子どもは数をどのように理解しているか：数えることから分数まで. 新曜社.
吉田甫, 多鹿秀継. (編著). (1995). 認知心理学からみた数の理解. 北大路書房.
吉田洋一. (1939). 零の発見. 岩波書店.