上越数学教育研究, 第 15 号, 上越教育大学数学教室, 2000 年, pp. 113-120.

「関数の考え」が生きる事象についての考察

上越教育大学大学院修士課程１年
林　　弘

１　はじめに

中学校で数学を指導していると、数学を得意としている生徒からも、「関数は難しい。」「関数は何をやろうしているのかよくわからない。」という声が聞こえてくる。特に、生徒が苦手としているのは、２つの変数を対応させてみることと、２つの変数の関係を式に表現することである。この実態を改善すべく、いろいろ工夫してみるが、なかなかうまく指導できない。

このような筆者の実践を振り返ってみると、中島(1981)が、「中学校などでは、「関数」を理解させることに重点がおかれ、$y = x^2$ とかいうきまった関数について、x に種々の値を与えたとき、y がどんな値をとるか、グラフではどんな形かという考察が中心になる。(p.179)」と指摘しているように、中学校の授業では、関数がどのような形の式になるのか、グラフの特徴は何なのか、x の値が決まったとき、y はどんな値になるのか、という関数の特徴や、関数的な表現、処理のしかたが強調されているようだ。中学校指導書数学編(1989)によると、関数の授業の目的は、自然現象や社会現象を考察したり、理解したりするために、事象の中にある依存関係や因果関係に着目し、それらの諸関係を客観的でかつ簡潔な形で把握し表現する考え方を養うことであるが、一般的な指導では、事象の中の関係を客観的に簡潔な形で表現する側面のみが強調されすぎていると感じられる。その結果、「関数はよくわからない」という生徒の声が生まれてくるのではないか。

中島(1981)は「関数の考え」について次のように述べている；

> 「関数の考え」は、人間の本質的な働きとしても重要な意味を持っている。すなわち、「関数の考え」の本質は、「一つのもの」を「ほかのもの」と関係づけてみようとすることにあるわけで、これは、われわれ人間が、ものを「考える」ということ、ものが「わかる」ということの本質でもある。（p.181）

このように、「関数の考え」は人間が考えることの本質である。生徒たちが「関数の考え」を使って、事象を考察することができるような教材を考え、その教材を使って授業を構成していくことは、生徒たちの苦手意識を克服させる一つの方法であると考える。

２　関数の考え

小倉金之助は、「函数の観念こそ、数学教育の核心である。」と述べた。その背景には、現象の世界を数学的に考察する能力を発達させるために、空間直観の能力の強化と関数的思考の習慣の養成を強調した、Klein の考えがあると考えられる。そして、中島健三は、「関数の考えが、数学的な創造の上でどのような意味をもち、また、活用されるべきものであるか、明らかにしたい。」とその著書で述べている。このように、数学教育改良運動のころから、「関数の考え」を数学教育の中

で重要な位置に置くべきであるという流れがある。

2.1 小倉金之助の「科学的精神」と「函数観念」

小倉(1973)は、自らの数学教育論の立場について次のように述べている；

> われわれが数学教育について研究する場合には、人間の生活に真によく発展せしめるための問題としてこれを考えることを要する。（中略）人は伝習的知識としての数学を学ぶのではない、「人」として生きんがための数学を学ぶのである。（p.102-102）

つまり、小倉は知識としての数学ではなく、人が生きていく上で必要な数学を子どもたちが学んでいけるような数学教育を研究しようとしていることがわかる。

また、小倉(1973)は、人間として生活を創造するためには、生物学上の事実、理化学の現象、天文学地震学等の事柄など、科学から学ぶべきものがいろいろあるが、その最も根本的なことは、科学的見方、科学的考え方、科学的精神を学ぶところにあるとし、科学的精神について次のように述べている；

> ここに二つまたは多くの現象があるとき、経験的事実を基礎としてその原因を穿鑿し、それらの現象の間に因果の関係ありや否やを求め、もし関係ありとせばいかように関係ありや、その間の方法を発見せんとする努力、精神、これがすなわち科学的精神である。（p.111）（傍点原著者）

そして、人間の生活、人間の理想を真によく発展せしめるためには、科学的精神を高調させねばならないとし；

> 人生における科学的精神、いかにしてこれを修養しこれを開発すべきか。これ生活上最も重要な問題の一であってまた同時に科学教育の根本問題でなければならない。（p.112）（傍点原著者）

と述べている。

小倉は、科学教育の本務が、科学的精神の開発にあることを論じ、その結果「数学教育の意義は科学的精神の開発にある」と結論づけ、「数学教育の核心は函数観念の養成にある」と述べている。さらに、函数観念について、次のように述べている；

> 私はただ函数の観念が数学教育に必要であるというような、微温的なことを言うのではない。函数の観念こそ数学教育の核心である。函数の関係を徹底せしめてこそ、数学教育は初めて有意義であることを主張するのである。
>
> しかしながら私のいわゆる函数観念とは、決して函数の解析的表示のみを指すのではない。函数観念はわれわれの生活と共にあるのである、有名なる動物学者ハックスレーは「科学は整頓された常識である」というたが、この整頓された常識の基調をなすもの、否、常識の整頓するものこそ函数観念であると思う。(p.113)（傍点原著者）

小倉が述べようとしている「科学的精神」と「函数観念」とは、「二つ以上の事象があるとき、経験的事実を基にしてそれらの事象を関係づけ、その間にどんなきまりがあるのか調べていく過程を「函数観念」といい、この「函数観念」で事象を考察しようとすることを「科学的精神」という。」といえる。

また、小倉(1973)は函数の教授について、「1.関数の観念は日常生活と共にある。2.関数値の表は、ある間隔を有する変数の値に対する函数の値（またはその近似値）を知るためのものであり、グラフは、一目の下に函数値を知ると同時に、直感的にその変化の有様を明瞭にするものである。また、グラフを画かしめなければ、函数観念を教えたことにはならない。3.函数値の表は、十分その意味を理解した後では、できるだけ早くから使用させるがよい。4.函数の解析的形式が知れていない場合でも、そのグラフはわれわれに多くの事実を教えてくれる。(p.125-127)」と述べている。

ここまで、小倉の「函数観念」と「科学的精神」を概観した。次に、小倉の考えに大きな影響を及ぼした Klein の「関数観念」を概観する。

Klein は、数学を現実の世界を考察するた

めに必要なものであることを強調しているが、数学教育について、次のように述べている；

> 教科課程を今までよりも、生徒の精神の自然な発達過程に適応させること。つぎに、生徒が現にもっている観念に、あらゆるところで結びつけること。また生徒が現にもっている知識に、新しい知識を有機的に結合すること。さいごに知識のそれ自身における関連と、学校の他の教材との関連を、学年の進むに従ってますます自覚させていくこと、である。さらに、数学の形式陶冶の価値を完全に認めたうえで、一面的で実際に無意味な特殊知識をすべて棄て去って、その反対に、われわれを取り巻く現象の世界を数学的に考察する能力を、できるだけ発達させることも重要だろう。これらのことから、二つの特別な問題が発生する。すなわち、空間直観の能力を強化すること、および、関数的思考の習慣を養成すること、である。(p.127,128)

この引用文の「生徒が現にもっている観念に、あらゆるところで結びつけること。また生徒が現にもっている知識に、新しい知識を有機的に結合すること。」は、小倉の「科学的精神」の背景になっているところである。

また、Klein は、「関数関係のグラフ表現を、数学教育の中心的位置におくべきであり、したがって簡単な曲線を例として、関数の増加と減少、傾き、上昇と下降について、早くから教えるべきである。また、曲線で囲まれる面積を、正方形を数えて近似的に求める方法についても、述べられるべきである。(p.110)」と述べ、現象の世界を数学的に考察するためには、グラフ表現を重視すべきだとしている。

以上から、Klein が主張しようとしたことの一部は、教科課程を今までよりも、生徒の自然な発達過程に適応させ、新しい知識と生徒が現に持っている知識を有機的に結びつけること、そして、われわれを取り巻く現象の世界を数学的に考察する能力を、できるだけ発達させるために、空間直観の能力を強化し、関数的思考の習慣を養成することの重要性、特に、関数関係のグラフ表現を数学教育の中心的位置におくことであるといえる。

このように、小倉や Klein は、日常の現象を考察するために、変数を見つけ、その間にある関係を見出していくことを重視している。つまり、関数の指導の目的にあった、事象の中にある依存関係や因果関係に着目することの側面を強調している。そして、この考えを受け継ぎ、より具体的に述べたのが、中島の「関数の考え」である。

2.2 中島健三の 関数の考え」

中島(1981)は「関数の考え」について、「数学的な創造活動の中で、どう活用されるべきかという立場(p.178)」で次のように述べている；

> 一つの量を調べようとするとき、それと関係の深い数量をとらえ、これらの数量との間に成り立つ関係を明らかにし、その関係を利用しようとする考えが、関数の考えの基本的な考えである。(p.179)

さらに、算数・数学教育において、「関数の考え」が重要な役割をもち、それを重視しようとするねらいについて、次の三つの観点をあげている；

> 「関数の考え」が重要な役割をもち、それを重視しようとするねらいとしては、次のように大まかに三つの観点をあげてみたい。
>
> a) 自然科学的な精神にもとづいて事象を考察する能力・態度の育成と、それにもとづいて概念や法則を創造的に導くことができるようにすること。
>
> b) 算数・数学の内容のもつ意味についての理解を深めることと、それにもとづいて統合的発展的な考察ができるようにすること。
>
> c) 関数の考えを用いて問題解決が有効にできること。(p.180)

ここから、中島は「関数の考え」を数学的な考え方の根幹の一つに位置づけていると考えられる。さらに、中島(1981)は「関数の考え」の基盤を次のように述べている；

> 「新しく考察の対象としている未確定の、または複

雑なことがら（これを y として）を、よくわかった、またはコントロールしやすいことがら（x）をもとにして、簡単に捉えることができないか。このために、何を（変数 x）として用いたらよいか。また、そのときに、対応のきまり（法則）f はどんなになるか」という考えに立つことが、「関数の考え」の基盤として考えられる。(p.181)

以上から、中島の「関数の考え」とは、「新しく調べようとする対象の中で、よくわからないことがらを簡単にとらえるために、よくわかっていることがらやわかりやすいことがらのどれと関係づければいいのか、そして、それはどんな関係になるのかを考えていく思考過程そのもののことである。」といえる。

2.3 筆者のとらえる 関数の考え」

筆者は、小倉や中島が述べたように、事象の仕組みを理解するためには、変数を見つけ、その間にある関係を見出していくことを重視していく必要があるという立場で、「関数の考え」を次のようにとらえ直す；

「事象の中の、よくわからない数量をとらえるために、それと関係あるよくわかっている数量やわかりやすい数量を見いだし、その間にどんな関係があるのか探求していく思考過程」

また、ここでいう「事象」とは、「変化しているもの」「変化している様子」ととらえている。

3 関数指導における先行研究

関数の指導についての研究は数多く報告されている。例えば、東京都中数研関数委員会(1986,1987)は、関数の指導計画・指導案の作成、実践を通して、中学校の関数指導全体のあり方を考察している。この研究では、小学校での理解度を調査し、つぎのような指導過程をとるように配慮している；

(a) 単元の導入段階では、多くの変量を取り出せる具体的な課題を提示する。その中の２変量の関係について調べる。

(b) ひととおりの指導を終えたところで、関数の考えを使って問題解決を図る時間を設定する。そこでは、表、グラフ、式などを有機的に使って、変化の様子や対応のしかたをとらえる能力をより一層伸ばすことをねらいとする。(p.26)

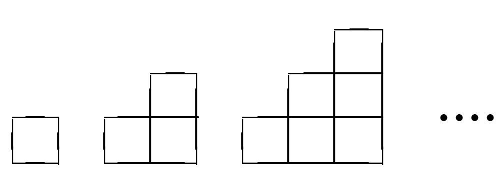
この研究は、生徒が関数と具体的な事象を関連してとらえる設定がなされ、２つの数量間の具体的な変化の様子や対応のしかたをとらえ、表、式、グラフと事象を結びつけていく活動を重視している。また、坂口(1997)、山本(1977)のように、２つの数量の依存関係を見つけることの必要性を述べている研究や、日向(1988)のように、事象から変量を取り出し、変数として認識していく過程の重要性を述べた研究はあるが、その中で扱われている問題でも、子どもたちが、事象の中から変数を見つけ、その関係を見いだしていくようなものは少ない。

東京都中数研関数委員会(1986)は、2 年生の第 1 時に「具体的な事象から変量を見出し、変化のようすや対応のしかたを、表、グラフ、式などを使って調べさせる。」というねらいで、次のような授業を考えている (p.29,30)；

課題

１辺の長さが 1cm の正方形の紙を、図のように、階段の形に何段か積んでいく。

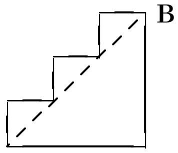
このとき、階段の数が増えていくと、それにともなって何がかわりますか。



①階段の数が増えるのにともなって変わる量をあげる。

・正方形の数　・階段の周囲の長さ
・階段の高さ　・階段の底辺の長さ

・内角の和　　・直角の数
・頂点の数　　・辺の数
・AからBまでの長さ
・AからBまでの長さ



このように、事象の中から変数を見つけていく問題の多くは、この問題のように独立変数が１つ決まっていて、そこから多くの従属変数を見つけてくタイプが多い。しかし、「関数の考え」を生かしていくためには、従属変数だけではなく、独立変数も子どもたちが見つけていく事象が必要だと考える。そこで、熊谷と桐山が、調査の中で用いた装置に着目する。

４　関数の考えが生きる事象

4.1 装置の問題

変数を見つけだす部分に焦点をあてた研究をみても、一つの独立変数から多くの従属変数を関係づけていく事象は多いが、ある従属変数を調べるための独立変数が多くある事象は少ない。しかも、このタイプの事象は変数の関係を見いだしていくのがとても難しい。このような事象の一つに、熊谷(1999)、桐山(1999a)が取り上げた装置がある。

この装置の良いところは、独立変数の取り方が複数あること、また、容易に繰り返すことができ、現象を連続的に再現できること、ブロックが連続的に動く様子がみえることがあげられる。そして、ブロックの動きが一次関数であり、ブロックの動きを図に示すという、素朴な解決方法が可能であること、また、繰り返しブロックを動かす操作の中で、比例定数（軸の太さ）がブロックの動きを制御していることに気づきやすいこともその特徴である。

熊谷(1999)は、この装置を使って小学校 6 年生対象の授業をするために、関数の予測性を意識的に経験させるとともに、独立変数の選択が強制的にならないように、「どちらがさきにトンネルから出てくるでしょう。」という問題を設定した。また、模擬授業の結果から、出発の基準を明確化するとともに、どちらが早いかという感覚を持たせるために、ウサギとカメの物語を想定した。さらに、解決場面での困難性を解消するために、独立変数と従属変数の取り方を意識的に作ることを大切にするため、ブロックの動きを図に示すという素朴な解決を利用することにした。

また、桐山(1999a)は、「関数の考え」を「よくわからない数量(y)について、よくわかった、またはコントロールしやすい数量(x)を見いだし、y を x がどのように規定しているか、探求していく過程」とし、「関数の考え」の過程を顕在化するために、中学生を対象にして、この装置で調査を実施した。

その結果、小学生でも中学生でも同じような過程で、変数を見つけ、関係を見いだしているがわかってきた。

桐山(1999a)は、変数間の関係を構成していく水準を次のように記している；

1 前従属変数を構成する
　① 動きを現象から部分的に構成する
　② 動きを全体的に構成する
2 前独立変数で動きを捉える
3 独立変数と従属変数の関係を捉える(p.137)

特に、変数間の関係を構成し、それを関数関係へと発展させていくためには、従属変数としての意味を持つブロックの動きの変化を、生徒自身が構成していくことが重要であり、そのための準備として、ブロックの動きを再現する「動きの再現」が必要となる。つまり、この水準の中の「前従属変数の構成」が重要な意味を持つと述べている。

そして、「関数の考え」を実現していく教材について、桐山(1999b)は「生徒が変数の混沌とした状況の中から、従属変数と独立変数の関係を見出すことが可能な、特に、前従属変数を構成する場面での、動きを現象から部分的に構成したり、全体的に構成したりしていく活動が可能な教材・教具の開発が有効

であった」と述べている。

以上から、「関数の考え」が生きる事象の条件とは、たくさんの変数を持っていて、その関係づけが何通りも考えられること、また、変数間の関係を構成し、それを関数関係に発展させていくための「動きの再現」ができることがあげられる。

4.2 漏斗の問題

1943 年に発行された文部省検定教科書「数学 中学校用 1 第 1 類」「1.図表ト式」第 4 節「§ 4 公式ノ作リ方」の漏斗の問題(p.16)を参考にして、漏斗を事象として取り上げてみる。

検定教科書では、具体的な数値を計算で求め、扇形の中心角と漏斗の底面の半径がどんな関係になるのか考察し、式に表している。そして、作図によって漏斗の深さを測り、その値を図表で表し、中心角と漏斗の容積の関係を考察している。しかし、この問題では、着目する数量を意図的に指定して、問題解決を図っている。

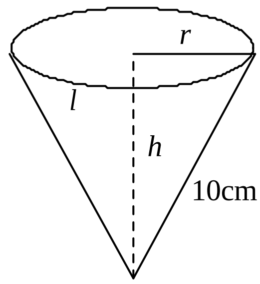
ここでは、漏斗が「関数の考え」が生きる事象としての可能性を持っているのかを探るために、漏斗が持つ変数を明らかにし、その変数をどのように見つけていくことができるのか考えてみる。また、たくさんある変数の中で、容積を調べようとするとき、どの変数と関係づけると、どんな関数になるのか明らかにする。

まず、漏斗が持つ変数を見つけるために、母線の長さが 10cm の漏斗を見比べてみると、漏斗は、口の広さ(底面の面積)、口(底面)の半径、深さ、頂点と円の中心を通る切り口の面積、回転させる直角三角形の面積、容積などの変数を持っていることがわかる。

ところが、漏斗を見比べているだけでは、これらの変数を制御している中心角に気づくことは難しく、筆者が中心角を意識したのは、漏斗の展開図を想起したときである。

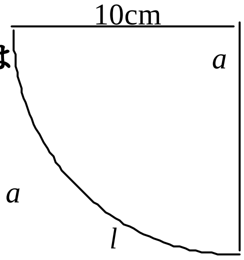
中心角が、漏斗の持つすべての変数を制御していることは、次のように、式を変形してみるとよくわかる。

右の図のように、
口の半径を r、
深さを h とする。
このとき、
容積を求める式は、



$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

であるが、r は口の周の長さ l によって、変化する。
また、h は「三平方の定理」によって、r の式で表される。
口の周は、漏斗の展開図であるおうぎ形の弧と重なる。
おうぎ形の弧の長さ l は半径と中心角によって次のように決まる。
半径は 10cm、中心角を a とすると、弧の長さは



$$l = 2\pi \times 10 \times \frac{a}{360}$$

になり、
口の周の長さが $l = 2\pi r$ より、
口の半径は、

$$r = \frac{1}{36}a$$

また、三平方の定理より、
深さは、

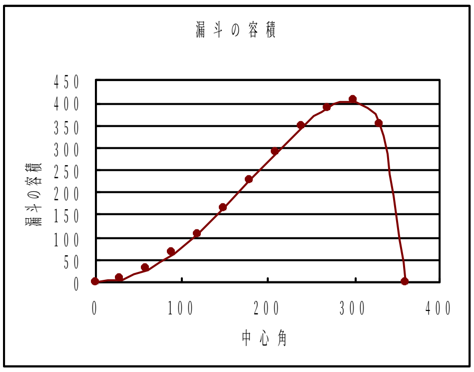
$$h = \frac{1}{36}\sqrt{360^2 - a^2}$$

となり、容積は、

$$V = \frac{1}{3 \cdot 36^2}\pi a^2 \sqrt{360^2 - a^2}$$

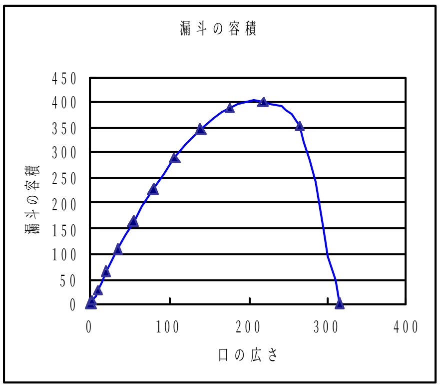
このように、口の半径、深さ、容積は、おうぎ形の中心角の式に表すことができ、中心角によって制御されていることがわかる。

また、グラフで容積と中心角の関係を表すと次のようになる。



次に、実際に容積を調べていくとき、どの変数と関係づけていくのか考えてみる。

まず、一番最初に目に付くのが、口の広さである。口の広さが大きくなると、容積はだんだん大きくなるが、途中からだんだん小さくなる。口の広さが最大になるのは、314cm^{2}だから、口の広さが 157cm^2 のとき、容積が最大になると予想できる。ところが、実際の変化はその予想と異なり、口の広さと容積の関係は次のようなグラフになる。



このように口の広さと容積の関係をグラフで表現するためには、この関数の特徴を知らない子どもの立場からすると、模型から数値を測定してグラフをかくことになる。

次に、円錐が回転体であると考えて、回転する直角三角形と容積を関係づけ、直角三角形の面積が最大になるとき、容積も最大になると予想できるが、実際は直角三角形の面積が最大のとき、容積は最大にはならない。

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ，$r^2 = 100 - h^2$ より、

$V = \frac{1}{3}\pi h(100 - h^2)$

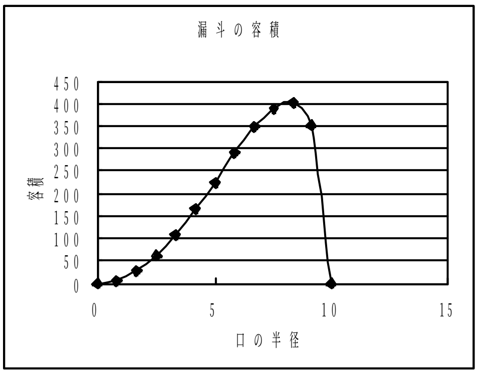
$V' = \frac{\pi}{3}(100 - 3h^2)$ より、

$h = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ のとき、容積は最大になる。

このとき、直角三角形の面積は約 23.6cm^2 であるが、$r = 6$，$h = 8$ のとき、面積は 24cm^2 になり、容積が最大の時、直角三角形の面積は最大ではないことがわかる。

また、口の半径と容積を関係づけて考えることもできる。この場合、$r = 5$cm のときや、$r = h$ のとき、容積が最大になると予想できる。しかし、実際には、$r = \frac{10\sqrt{6}}{3}$ のとき、容積は最大になる。

このときのグラフも、子どもたちは、模型から数値を測定してかくことになるが、口の半径と容積の関係は次のようなグラフになる。



このように、漏斗は変数が混沌としている事象であり、装置と同様に、ある従属変数を調べるための独立変数がたくさんある事象である。しかし、装置とは異なり、子どもたちが連続変形を想像すること、変数を見つけること、何がそれを制御しているのか見つけることが難しく、「動きの再現」ができないのではないかと予想される。

4.3 考察

漏斗はたくさんの変数を持ち、その関係づけが何通りも考えることができ、「関数の考え」が生きる事象としての可能性があるといえる。しかし、変数間の関係を構成し、それ

を関数関係に発展させていくための「動きの再現」ができるのか疑問が残る。ここでは、装置の場合と漏斗の場合を比較して、「動きの再現」の足がかりについて考察する。

装置の場合、その動きは一次関数であり、子どもたちが自ら装置を動かすことで、ブロックの動きが軸の太さによって制御されていることに気づきやすい。熊谷(1999)や桐山(1999a)は、この操作の段階が「動きの再現」への足がかりになると述べている。これに対して、漏斗の場合、変数間にある関数が簡単なものではなく、変数を制御している中心角を見つけることさえも容易ではない。筆者は、展開図を想起することで中心角の存在に気づいたが、子どもたちは展開図の想起だけでは「動きの再現」につながらないと考えられる。そこで、教材として取り上げるときには、例えば、「半径 10cm の円を使って、容積が一番大きくなる漏斗を作ろう。」というような操作を前提とするような提示が必要である。

5　まとめと今後の課題

本稿では、「関数の考え」が生きる授業の構成に向けて、「関数の考え」を明らかにし、「関数の考え」が生きる事象について、熊谷と桐山の研究の成果をもとにして考察した。漏斗のように、変数が多数あり、それが混沌としている事象は、「関数の考え」を生かしていける可能性があるものの、この事象では、変数を見つけ、その関係を見いだしていくことが難しいことが明らかになった。そして、このような事象において、子どもたちが変数を見つけ、その関係を見いだしていくためには、「動きに再現」につながるような教材提示の仕方を考える必要があることが明らかになった。

今後は、さらに「関数の考え」が生きる事象を開発すると共に、本稿で明らかになった問題を解決し、「関数の考え」が生きる事象を使った授業構成を考えていきたい。

引用・参考文献

中等学校教科書株式会社. (1943). 数学 中学校用 第一類 1. 中等学校教科書株式会社.

日向義正. (1988). 関数概念の形成に関する一考察：関数関係の把握と一次関数の式表現を中心として. 筑波数学教育研究, *7*, 103-110.

桐山眞一. (1999a). 中学生における関数の理解に関する研究：一次関数を事例として. 上越教育大学学校教育研究科修士論文(未公刊).

桐山眞一. (1999b). 中学生における関数の理解に関する研究：一次関数を事例として. 上越数学教育研究, *14*, 61-72.

Klein,F. (1972). 数学教育改革論(丸山哲朗訳). 明治図書.

古藤怜（編著）. (1982). 数学科における学習指導. 共立出版.

熊谷光一. (1999). 装置を用いた関数の考えの実現を目指した授業の構成に関する覚書き: リアリティの観点から. 上越数学教育研究, *14*, 1-10.

文部省. (1989). 中学校指導書数学編. 大阪書籍.

中島健三. (1981). 算数・数学教育と数学的な考え方. 金子書房.

小倉金之助. (1973). 数学教育の根本問題. 頸草書房.

坂口進亮. (1997). 算数のよさを追求する「数量関係」の指導に関する研究. 日本数学教育学会誌, *79*(8), 40-46.

東京都中数研関数委員会. (1986). 中学校での関数指導について（その１）. 日本数学教育学会誌, *68*(11), 23-30.

東京都中数研関数委員会. (1987). 中学校での関数指導について（その２）. 日本数学教育学会誌, *69*(1), 14-21.

山本正美. (1977). 二つの数量を関係づけてみようとする考えを育てる指導. 日本数学教育学会誌, *59*(8), 18-21.