

数学的問題解決における図と情報の生成

布川 和彦

1. はじめに

算数・数学の問題解決における図の役割については、以下のように言われることが多い (Van Essen & Hamaker, 1990)。(1) 解決者の作業記憶を解放し考えるための余地を作る、(2) 問題をより具体的に示す、(3) 情報が再組織され関連する情報を効率的に探せるようになる (Larkin & Simon, 1987)、(4) 文で書かれたときには明確でなかった特徴が視覚的にはっきりする。(4) の一つのタイプとして、問題中の要素の間の関係、いわゆる問題の構造が明確になることに言及される場合も多い (例えば、Gutstein & Romberg, 1995)。

ところで、問題解決については、その過程を詳細に分析する研究が近年見られる (例えば、藤田, 1999; Lawson & Chinappan, 1994)。図の利用についても、図的表現自体の効果を考えるだけに留まらず、図をいかたり利用する過程に目を向けた研究も見える。本稿では、まず、近年の研究の検討から、図をかく過程が着目されて来ていることを述べる。次に、図の役割と図をかく過程とを結びつけて考えた Nunokawa (1994b) の知見を視点としながら、2 つの解決過程を分析し、図をかくことと情報の生成との関係について考察する。

2. 図をかく過程と情報の生成

問題解決における図の研究では、一つの流れとして、問題の構造を表しやすいと考えら

れる図を提示したときの効果を調べるものがある (例えば、山本, 1995)。しかし、こうした図が役立つためには、図が解決者にとって意味をなすものである必要がある。このことの延長上に、解決者自らが図をかく、という考え方が出てくる。Gutstein & Romberg (1995) は、加法減法の指導での図に関する研究をまとめる中で、上記のような点に触れ、また、図の指導により効果が見られた先行研究では、子どもが自分の図を作りだしていたことを指摘している (p. 290)。彼らは、図が問題の構造を明らかにすることをあげるとともに、図をかく過程への着目をも促し、図をかくことは問題の分析に留まらず、知識の再構成などが生ずる創造的なものであり、図をかく過程から大きな有用性が得られるとしている (p. 290)。しかし、こうした過程については調べるべきことも多く、そうした研究が必要であると述べている (p. 288 および p. 295)。

図をかくことは算数・数学の問題解決における方略として広く提唱されてきたが、方略が解決の中で実際にどのように使われるのかを調べることは、解決過程の詳細な分析を要求すると考えられる。Bodner & Goldin (1991) は、長方形の周の長さに関する文章題で、図をもとに式を立てるという解決の中で、多くの下位過程 (例. 文字を割り当てる) が観察されることを述べ、図をかくことが方略として指導される際に、これらの下位過程にも注

意を払う必要を指摘している。 Nunokawa (1994a) は、中等学校レベルの平面図形の問題の解決過程を分析し、完成した状態では似たような図でも、それが描かれたときのかき方が違うこと、そして、それぞれのかき方がその時点での理解の状態を反映したものであることを見出している。 Lopez-Real & Veloo (1993) は、5～6年生に文章題を解いてもらい、解けなかった生徒に対してインタビューを行っている。その中で図をかくようアドバイスをすることで、図が有効に働くかを調べている。考察の中で彼らは、図をかくという行為そのものが、抽象的存在としての数よりも、数が表しているものの方に生徒の注意を焦点化したこと、そしてその意味において、図が「問題を自分の言葉で表現すること」の一つの形態であると述べている(p. 175)。また1例だけではあるが、彼らは、図を修正した事例について触れている。すなわちこの生徒は、最初に自分でかいた図をみて、それが問題の構造を正しく表していないことに気づき、改めて図をかくことで正答に至っている。ここに、取り敢えず図をかいてみることで情報を得て、その得た情報に基づいて図を修正していく、という流れを見ることができる。 Gibson (1998) は、証明問題を考える大学生の解決過程を調べ、特にそこでの図の役割を考察している。彼は、言葉による定義などよりも図の方が学生の思考や理解に密接に対応していること、および心的負荷を軽減することに触れるとともに、図が変えうるものであることに着目している：「アイデアを探す中で、学生は図に何かを加えたり、引き去ったり、あるいは描き直したりした。図を変えることで、学生が問題場面の中の考えられうるシナリオを探究し、結果として、アイデアを生み出すことが可能となった」(p. 296)。ここでは、単に図が問題の構造を示しやすいといったことだけでなく、解決の中で図を変えていく行為自体に目が向けられている。

方略についての研究の流れ以外でも、解決過程を詳細に分析した研究が見られる。 Lawson & Chinnappan (1994) は、中等学校の生徒における成功的な解決者とそうでない者との解決過程を詳細に分析しているが、ここでは、図の修正・拡張も含め、情報を生成することが成功的な解決にとって重要なことのひとつとしてあげられている。図の修正は情報生成の一つの現れと考えられているが、図中の各要素がどのような順番でかかれたかにも注意が向けられている。寺尾(1998)は、図により解決が促進された調査問題についてその理由を考える中で、図の操作の容易性、必要な推論ステップ数の少なさ、使える操作の種類の少なさと言及している。こうした図を使う過程に目を向けるとともに、解決過程の詳細な分析の必要性を指摘している。解決の途中で、図をかきそれを利用する過程そのものに、注意が向けられてきていると言えよう。

さらに、Meira (1995) は、一次関数的な場面における解決過程の分析において、生徒が表を徐々に作り上げていくステップを詳細に考察している。そこでは、教師により作られた表象を学習者がどのように解釈するかということよりも、そうした表象を「学習者が実際にどのように作り出すのか」(p. 310)ということに焦点が当てられている。また、書かれたものが一つの「表象的ニッチ」(p. 294)を持ち、自らの思考過程に影響を与える面も考察している。この考えを図にも適用すれば、上で述べたような図を使う過程において、図をかくことと、それが解決に及ぼす影響との関係に次に注意を向けることが考えられよう。

Owens & Clements (1998) はイメージに関して、Meira (1995)と同様、解決者が理解をしそれを表象する行為と、そうした表象から新たな情報を得ることが、相互作用的に生ずることを示唆している。彼らは2～4年生の図形についての活動を考察しているが、生徒の選択的な注意が期待や意図により影響を受け、

また注意が今度は、イメージにおいて生ずる変化に影響を与えること、そしてこれらが問題場面における応答の仕方や解決の達成に影響を与えるとしている(p. 211)。

Nunokawa (1994b)は、図がどのように解決を支援しうのかを考える中で、図をかく過程のどのような側面が新たな情報の生成を引き起こすかという、両者のつながりを考察している。すなわち、ある時点で捉えていることを図に表したときに、いくつかの要素が自然に組み合わせられ、その結果として新しい要素が生まれることを指摘し、そうした傾向があることを、生徒により書かれた解決を量的に分析することで確かめている。一方で、そのように要素が生成されても、それによって問題場面についての理解がどのように変わるかは、要素に対してどのような意味を与えるかという、解決者側の能動的な活動に依存しているとも述べている。第三者から見ると同じ図をかいていても、そこで生まれた要素に対する意味づけにより、その後の解決が異なってくるのである。

実際、こうした形での情報の生成は、他の事例においても起こっていることである。例えば、菊池(1996)は基本的には、何種類かの図を補助的に与えたときの小学生の解決について調べているが、一方で、与えられた図に子どもがかき込みをすることで、新たな情報が生まれていることにも着目している。親ライオンの体重が子ライオンの3倍で、両者の体重の和が252kgのときに、それぞれの体重を求める問題で、親ライオンと子ライオンの絵がかかれた情景図を与えられたある子は、親ライオンの絵に3つの丸をかき、子ライオンに一つの丸をかきいれている。この結果として、問題文中になく、かつ解決に利用される「4」という要素が現れている(p. 337)。

すでにある要素を組み合わせ、そこから生じてくる新たな意味を解決者が読みとっていくという流れは、Roskos-Ewoldsen (1993)が発

見のモデルにおいて述べている、「発生的性質(emergent properties)」を探す、ということに対応するであろう(cf. Nunokawa, in press)。

しかし Nunokawa (1994b)では、そうした図をかく過程と情報の生成との様相について提案しているものの、実際の解決の分析においては書かれたものの量的分析に留まっている。そこで、以下では、2つの解決過程について、上で述べられてきた視点からの分析を行う。

3. 情報の生成の観点からの図をかく過程の分析

ここで取り上げる2つの解決過程は、問題場面の構造(Nunokawa, 1994c)の観点から解決過程を分析することを目的として、1人の被験者に9問の問題を解いてもらった調査からのものである。被験者は当時、大学院の研究生であり、この被験者が適度な困難性を持ち、かつあまり専門的な知識は要求されない、という状況を設定するために、クラムキン(1991)の問題を利用した。ここで選ばれた回では、それぞれ平面図形の問題と立体図形の問題が扱われ、多くの図がかかれた。

3.1 第2回の分析

第2回においては、以下のような問題が扱われた。

問題：凸五角形 ABCDE で次の性質を満たすものはすべて同じ面積を持つことを示しその面積を計算せよ。' 5つの三角形 ABC, BCD, CDE, DEA, EAB の面積がいずれも1' さらに、この性質を満たす無限個の合同でない五角形が存在することを示せ。(クラムキン, 1991, p. 4)

ここで取り上げた被験者はこの問題に対し90分間取り組んだ時点で、問題前半の途中でいきづまっており、インタビュアーが介入してセッションが終了された。彼の解決過程については Nunokawa(1994c)を参照されたい。

この解決過程において、前節の最後に述べた図をかく過程と情報の生成との関わり、す

なわち図をかくことで要素の新たな組み合わせが生じ、そこから新たな情報が生まれるという点で、少なくとも3つの箇所を取り上げることができる。これらはいずれも、被験者による解決の全体に直接関わる箇所でもある。

3.1.1 平行の関係を見出す箇所

第2回の解決では、与えられた条件を満たす五角形で各辺とそれに向かい合う対角線とが平行になるという情報が、全体を通して大きな影響を与えた。この平行という関係を解決者が見出したとき(解決開始後約22分)は、図1のような正五角形の図で考えていた(下図はかき直したもので、文字は筆者による)。

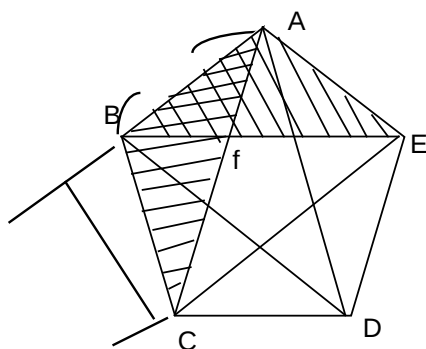


図1

ABC と ABE は条件からともに面積が1であり、しかも辺 AB を共有している。ここから、これらの高さは等しくなること、さらに AB と EC は平行となることを解決者が見出していった。図1をかく際には、まず五角形をかき、次に条件にある三角形を作るための対角線 BE, AC などを書くという順序であった。つまり、この図は問題文に示された場面をそのまま図に表すことにより描かれたものと言える。

事後のインタビューで解決者は、三角形によってできる「ダブリ」(図1の ABf のような部分)という要素に着目したことが、平行の関係を見出す契機になったと述べているが、この重複部分は、まさに、条件に与えられた三角形を1つの図のなかにかき入れていくことによって生じている。また、この重複を中

心として、底辺を共有する二つの三角形という新たな要素も生じている。図2は図1の直後にかかれたものである。この要素も、条件で与えられた面積1の三角形をかき入れていくことで、それらが合わさってできたものである。つまり、組み合わせされた以前の要素からの発生的性質と言えよう。

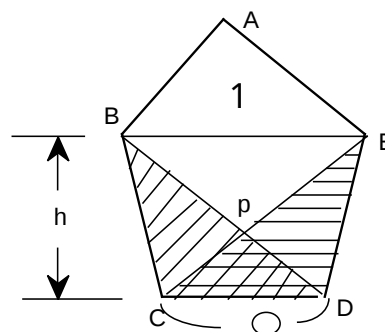


図2 (“h”と”1” 以外の文字は筆者による)

次の 3.1.2 および 3.1.3 で見るように、底辺を共有する二つの三角形という要素の存在、およびそこから導かれる辺と対角線との平行の関性は、問題の解決につながる重要な情報であるが、そうした情報が、図による要素の組み合わせから生じてきていることになる。

ただし、Nunokawa(1994b)でも示されていたように、図の上で新たな要素が生じていても、それが問題場面についての解決者の理解に反映されるかは、解決者に依存している。例えば、この問題に対する別の被験者による解決では、面積を求めるためには重なり部分は邪魔であると考え、重なりが生じないように場面を変えている(Nunokawa, 1997)。そのため、重なりを中心とした図2のような構造は構成されないこととなった。また、本稿で取り上げている被験者についても、三角形の重なりについては、解決の当初(開始後約2分)から気づいていたが、そこで生じていた「1辺を共有する二つの三角形」という要素が捉えられるのは後のことである。その前に、正五角形の場合に相似な三角形(例えば、図1の ABC と AfB)について相似比を計算しようとしていた。その中で $AB=1$ としたとき

の AC や BE の長さを求めることが行われ、こうしたことが先の要素へ注意を向ける契機になったと考えられる(Nunokawa, 1996)。

以上のようにここで分析した箇所では、その時点での理解を図に表すと、要素の組み合わせにより新たな要素が生じ、それを解決者が場面に対する自らの理解に取り込む、という流れが生じていたと考えられる。

3.1.2 相似比に着目する箇所

解決の最後の段階(約 67 分以降)では、図 3 をかいた上で、 pCD の高さを文字 t 、 $CD=a$ とし、一般の五角形について面積を $(2/at)+1$ と求めている。

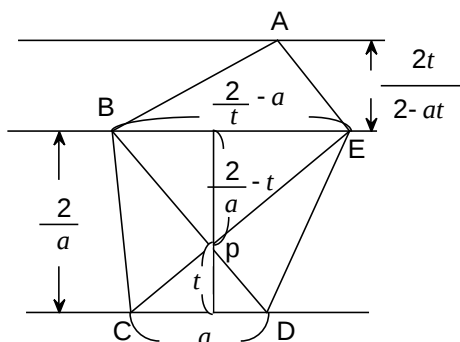


図 3 (頂点の文字は筆者による)

ここで pBE と pCD が相似であるという情報が重要であるが、このことは図 2 がかけられた時点(約 25 分後)に見出されている。図 2 は先に述べたように、隣り合う三角形が、辺を共有する面積の等しい三角形であることを見出し、それを表現することで得られた図である。その中で頂点を共有する相似な一組の三角形という要素が自然に生じている。

図 3 で pBE および pCD の高さを示す線は、相似の関係をより明確にしているが、この線が最初に現れたのは、図 2 がかけられた少し後(開始後約 32 分)である。このときは面積を計算するとして正五角形について図 2 と類似の図がえがかれ、そこにこの高さを表す線が加えられた。また図 3 の t にあたる部分を x と置き、求めようとしている¹。一方、図 2 の時点で相似に言及した際には、これを利用することは行われなかった。その間では、

平行の関係に注意を向け、「そういう平行が三角形になっている」「ぐーってずらすと平行」といった発話が見られる。これより、 BCD や ECD を平行線にそって変形することが考えられ、その中で、 pBE と pCD の相似比が変わることから、これらの三角形、あるいはその相似比を示す t の値などに注意が向けられたのではないかと考えられる。つまり、問題場面に対する理解が、高さを示す線の付加を促したことが考えられる。また、高さの線をかき入れた後は、「計算楽になる」(31 分 37 秒)として x を求めている。初期の活動では、正五角形の場合の $CD:BE$ が求められており、また図 2 をえがいた時点で図 2 の h が $2/a$ であることが見出されていた。こうした情報が、相似に着目することで次に得られる情報の見込みを与えていると考えられる。

三角形の相似についても、発生的性質として新たな要素が得られていたが、それに対する注意は、問題場面に対する他の理解や、新たな情報生成の見込みにより、影響を受けていたことになる。

3.1.3 平行四辺形に着目できない箇所

図 3 をかき面積を $(2/at)+1$ と求めた後、解決者は「あと a と t が何とか決まれば」(78 分 31 秒)と発話している。これは、四角形 $ABpE$ に着目することで解決できる。与えられた条件から各辺と向かい合う対角線が平行になるので、 $ABpE$ は平行四辺形となる。したがって、

ABE と pEB は合同であるから、 pEB の面積が 1 となり、これより at の値が求まる。

図 1 ~ 3 を見るとわかるように、この平行四辺形 $ABpE$ も、その時点での理解を図に表すことで自然に現れてきている。しかも解決の途中では、辺と対角線の平行関係に基づき、5 組の平行線で五角形を構成しようとする箇所もあり(Nunokawa, 1994c)、そこでも当該の平行四辺形が現れている。しかし、図のこの部分を平行四辺形として意味づけることは、解決の最後まで行われなかった。

これには、図に現れた要素を、自らの問題場面の構造に取り込む際の解決者の意味づけ (Nunokawa, 1994b) が、下位目表からの影響を受けたことが考えられる (布川, 1996)。今の解決では全体にわたり、図 3 にあるような 3 本の水平な直線について、それらの「平行なラインの中」(40 分 45 秒) を考え、四角形 BCDE である「台形に注目」(58 分 56 秒) し、「台形の面積」(75 分 28 秒) を計算することを基本的な目標と設定している。そのため、その平行線で区切られる ABE は「ぼうし」として独立に考えられ、この三角形と、BE をはさんで存在する pBE とを組み合わせ、平行四辺形と意味づけることが難しかったのだと思われる。Owens & Clements (1998) がイメージに関して述べていた、選択的注意が期待や意図により影響を受け、その注意がイメージにおいて生ずる変化に影響を与えるということが、図の利用においても生じていたことになる。

3.2 第 9 回の分析

第 9 回では、以下のような問題が扱われた。

問題：与えられた 4 面体の内接球面が、その 4 面体の 4 つの面すべてにそれぞれの重心で接しているとする。このとき、その 4 面体は正 4 面体であることを証明せよ。(クラムキン, 1991, p. 15)

被験者は開始後約 35 分に一度「出来た」として解答をまとめるが、その途中で暗黙に仮定していた事柄に気づき、解決を再開した。結局、約 98 分の時点で行き詰まったような状態であったので、インタビュアーの介入により解決が中止された。第 9 回の解決過程については布川(1996)を参照されたい。

3.2.1 中線の相等を見出す箇所

解決の最初には、四面体の各面の接点のあたりと、内接球の中心とを結ぶような線分をかいていたが、各面が二等辺三角形であることを示すという目標のもとに図 4 をかいた。図 4 をかく前に解決者が考えていたのは、各

面の中線が底辺と直交することを示すという下位目標であり、これに関わり、図 4 の ABC

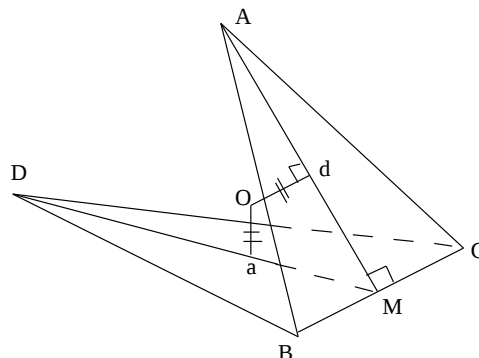


図 4 (文字は解決者による後の図に従っている) の中線 AM と DBC の中線 DM、内接球の半径 od , oa が同一平面内にあるかどうかを気にしていた。この直後に、図 5 のような図をかき $aM=dM$ を導き、そこから $AM=DM$ を見出している。この中線の相等関係は、次項でも述べるように、第 9 回の問題の解決につながりうる情報である。

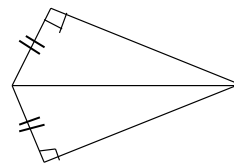


図 5

図 5 のようなたこ形は、問題文に与えられた内接球の半径と、下位目標に関連する面の中線とからなる。つまり、その時点での理解を表したのから生じてきた、新たな要素と考えられる。実は、これらの半径や中線は最初期の四面体の図にもかかれていた。図 4 のように二面が取り出されたことが、たこ形の認識を促したことが考えられるが、二面を取り出すことは、それ以前の探究から二面の関係が重要な要素として考えられたからである。さらに、 od と oa が同一平面上にあることを考えているが、たこ形はその平面内の図形である。つまり、問題場面についての理解が、新たな要素の認識を促したと考えられる。

外側のたこ形が、図により要素が組み合わされることで生じてきたものである一方、共

有される斜辺にあたるたこ形の対角線は、図5をかく時点で加えられたものである。ただし、図5をかく時点では球の半径にあたる2線分をかいた後、次に対角線にあたる線分を引いており、図5をかく前に、対角線を引くことは思いついていたと考えられる。また図5をかく前に「こういうふうにやった方がいいか」としてかき始めていることから、図5をかく前に、図5からどのような新たな情報が得られるのか見通しをもった上で、対角線にあたる線分をかき入れていると考えることができる。

3.2.2 中線の相等と正三角形との関わりを見出す箇所

その後解決者は、図4のAMとDMの相等にあたる関係が、四面体全体でどのように存在するかを調べることを行っている。これは、開始後約35分に一度解答をまとめた²ことをはさみ、2度行われている。いずれにおいても、隣り合う三角形で、図4のAMとDMにあたる中線の長さが等しくなることを、四面体の展開図にかき入れていくことで、図6の

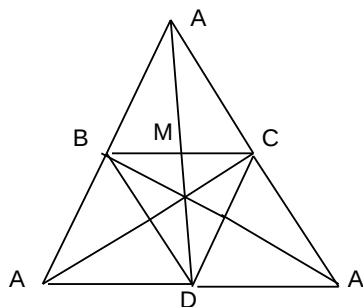


図6（記号は筆者による）

ような図がかかれた。しかも解決者は、図6の隣り合う三角形の中線（例えば図6のAMとDM）が一直線をなすと暗黙に仮定しており、そこから各面が合同であること、それが4つ集まって大きな三角形（図6のAA'A'）ができることなどを、導いている。

解答をまとめた後の試み（開始後約51分）では、中線をつないでできるとされている線分AD、A'C、A''Bが、いずれも重心を通る

ので一点で交わることに言及し、さらに、「ああーあ、あそうか、この長さ(A'C)とこの長さ(AD)おんなじだって言えれば終わりだ」(52分22秒)、あるいはそれらの線分が「全部おんなじだってことわかりや全体正三角形だ、で終わりだ」(55分04秒)と発話している。つまり、この時点での問題場面に対する理解を図の中に表していくことにより、一点で交わる3本の中線という新たな要素が生じ、これが、3本の中線が等しければ正三角形となる、という知識を想起させたと考えられる(3.2.3で述べるように、各面で3本の中線の長さが等しくなることは示すことができる)。

さらに、この新たな要素が認められる際に、中線の交点に対する「重心」という意味づけは、ADの次に2本目の線A'Cを引いた時点で起こっている。つまり、線を引くという行為の中で、2中線が交わることが浮き彫りにされたと言える。

3.2.3 頂点に集まる中線の組を見いだせない箇所

中線が等しければ正三角形であることに言及した直後には「うまくいかない」とするが、今度は図6のACとA''Cとが同一の辺であることに気づき、それに基づき中線の相等関係を調べることを再開している。例えば、BACの点Bを通る中線と、DA''Cの点Dを通る中線とは長さが等しくなる。こうした関係も図6の中にかき入れていくことで、図7のような図を得ている。

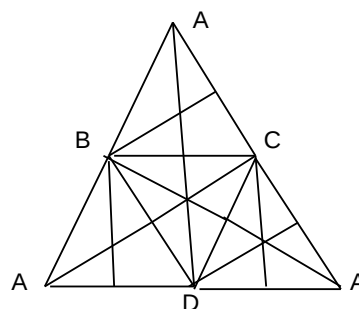


図7

この結果、点Bに集まる3本の中線という

新たな要素が生じている。これらの中線に対して、3.2.1 で見られたのと同様の議論をすることで、3 本の中線が等しい長さであることが示せる（布川、1996）。そして、3.2.2 で述べたことを用いて、各面が正三角形であることが導ける。中線の相等関係というその時点での問題場面に対する理解を図の中にかき込むことで、それまでの要素が組み合わさり、新たな要素が生じていたことになる。

しかし、本稿で取り上げている解決者は、このことを見いだせずに終わっている。これについて布川(1996)は、辺を共有する2つの三角形を中心に解決が進められているために、この関係を見いだせなかったと分析している。実際、図6をかいてから図7にいたるまでの間に、AD と A'C が等しくなるかを気にしながら、図8をかいている。

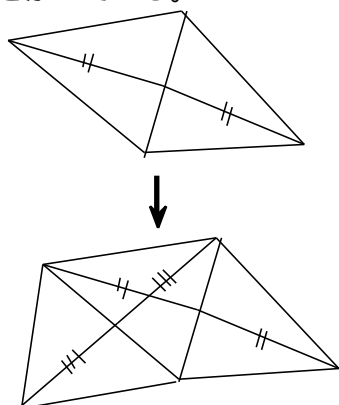


図8（上図に左下の三角形を加え下図に）

つまり、こうした部分に注意が向けられることで、1 頂点に集まる面（あるいはその中線）というまとまりが認められにくかったと考えることができる。

4．図をかくことと情報の生成

前節で取り上げた箇所では、問題の解決に直接関わりうる情報が生成されていたり、生成されうる可能性があった。そうした箇所において、第2節で述べたような図から情報が生成される仕組みが見られた。すなわち、その時点で問題場面について理解していたことを一つの図の中に表していくことで、要素の

組み合わせを通して、新たな要素が現れてくるということである。一方では、この要素から問題場面についての情報を得ることで、図のかき方が変わるという流れも見える。図1で辺を共有し面積が等しい二つの三角形という要素に気づき、二つの三角形の高さが等しいという情報を得た後、それを明確に表現するような図2へとかき方がかわっている。図4でたこ形という要素に気づくことでそれを明確に表現する図5がかかれ、そこで2本の中線の長さが等しいという情報が得られると、今度は長さの等しい中線を調べやすいように、四面体の展開図のような図へと移行する。その結果として、図6のようになり、重心で交わる3本の中線という要素が現れてくることになる。ここに、問題場面に対する理解と図をかく活動との相互作用を見ることができる。

しかし、3.1.3 や 3.2.3 で取り上げた箇所では、図の上に必要な要素が現れていても、それが解決者の問題場面に対する理解には反映されなかった。これらの事例では、必要な図の要素の組み合わせが、解決者の意図や期待に添わないことが指摘された。解決者により必要な情報が生成された 3.1.1 や 3.2.1、3.2.2 の事例でも、実際は、新たな組み合わせが図に生じてからそれが認められるまでに間があった。例えば 3.1.1 の場合、一般の五角形について図1に相当する図は、解決当初からかかれており、三角形の交わりの部分への着目も行われていた。しかし図2のような要素の組み合わせり方がなされ、新たな情報が生成されるのは、図1がかかれる開始後 22 分過ぎである³。こうしたことから、図中の新たな要素に着目することは、図に対する解決者の向き合い方であると言える。

こうした着目を支える要因として、本稿の分析から、少なくとも次の3点が示唆される。

第一には、いわゆる構えの問題である。上で述べたように、図の中に見るものはそのときの意図や希望に依存し、それにあわないも

のは捉えられにくい。図の中に新たな要素を見て、情報の生成につなげるには、それまでの意図を離れることが必要となる場合がある。3.1.1 の事例では直前に「やっぱり幾何的にやるのかなあ」(それまでは相似比の計算を行っていた)、3.2.2 の事例では「ちょっと違う方法を考えよう」といった、方針の転換を示唆する発話があったことは、構えをはずすことの大切さを示すように思われる。

第二には、当該の要素のもつ発展性である。

3.1.1、3.2.1、3.2.2 の事例では、新たな要素が捉えられた直後に、それをもとにしてすぐに新たな情報が生成されている。ここから、情報の生成につながる可能性があるからこそ、そうしたまとまりが注目される、という流れも考えられる。いずれにしろ、情報生成と図中の要素に気づくこととは、複雑に関連していると言えよう。上のような流れのためには、適当な知識を持っていることが要求される。一辺の長ささと面積が等しい二つの三角形から高さが等しいことを導いたり、そこからさらに平行に関する情報を導くだけの知識がなければ、辺を共有する三角形という要素に注意が向けられなかったかもしれない。図5の要素に注意が向けられた際には、直角三角形の合同条件が関与したであろう。

第三に、第二の点とも関わるが、問題場面についての情報やその探究が考えられる。3.1.1 の事例では、以前の探究の中で目的は異なるものの、組み合わせられるべき要素が取り上げられていた。3.1.2 の事例では平行線内での等積変形のイメージを持っていたことや、正五角形の辺と対角線の比がすでに計算されていたことが、相似な三角形に注意を向け、三角形の高さの線を加えることに影響を与えたと思われる。3.2.1 の事例では、組み合わせられるべき要素が同一平面にあるかが以前の探究で検討されていた。図中に適当な要素の組み合わせが生じてから、その中に新たな要素が認められるまでに、こうした場面の探究が行わ

れていたことは、注意してよいであろう。

5. おわりに

前節での考察をまとめると次のようになる。図が新たな要素の組み合わせを生じ、それが解決に役立つという側面は、実際の解決過程にも見られる。しかし、それを活用するには、下位目標にとらわれずに図を見る必要があると同時に、しかし何の期待もなく見るというのではなく、問題場面に対する他の情報や、情報生成の可能性を支える知識を背景に持ちながら見る必要がある。したがって、図の有効な利用を考えるには、新たな要素を生じうる組み合わせに注意を払うとともに、図の中に適当な要素を見るために必要な知識や、問題場面についての他の情報をも視野に入れて、考えていくことが大切と考えられる。

註および引用・参考文献

1. 実際は、正五角形の場合は、この x の値がわからなくても面積は計算できる。
2. 途中の解答は、異なる方針によっている。つまり、 oa と od で張られる平面が BC と直交する、という考えである。ここでは、 AM が oa と od で張られる平面に含まれるという暗黙の仮定が用いられている。
3. 確かに、正五角形でない図では、5つの三角形の面積が互いに等しいという条件が、適切に反映されていなかったという点は考慮すべきであろう。正三角形の図ではこの条件が図に反映され、結果として辺と対角線が平行だという関係が見やすい。しかし図1以前にも正五角形はかかれていながら、そこでは ABC と AfB などの相似関係に注意が向けられており、図2のような構造への言及はなかった。

Bodner, B. L. & Goldin, G. A. (1991). Drawing a diagram: Observing a partially-developed heuristic process in college students. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp.

- 160-167). Assisi, Italy.
- 藤田尚徳. (1999). 数学的問題解決における生徒の情報の生成を促す指導に関する基礎的研究. 上越数学教育研究, 14, 85-98.
- Gibson, D. (1998). Students' use of diagrams to develop proofs in an introductory analysis course. In A. H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education. III* (pp. 284-307). Providence, RI: American Mathematical Society.
- Gutstein, E. & Romberg, T. A. (1995). Teaching children to add and subtract. *Journal of Mathematical Behavior*, 14, 283-324.
- 菊池光司. (1996). 算数の問題解決における図的表現の働きに関する研究. 日本数学教育学会誌, 78 (12), 334-339.
- クラムキン, M. S. (1991). 数学オリンピック問題集: アメリカ編 (国際数学オリンピック日本委員会訳). 東京図書.
- Larkin, J. & Simon, H. (1987). Why a diagram is (sometimes) worth ten thousand words. *Cognitive Science*, 11, 65-99.
- Lawson, M. J. & Chinnappan, M. (1994). Generative activity during geometry problem solving: Comparison of the performance high-achieving and low-achieving students. *Cognition and Instruction*, 12 (1), 61-93.
- Lopez-Real, F. & Veloo, P. K. (1993). Children's use of diagrams as a problem-solving strategy. In I. Hirabayashi et al. (Eds.), *Proceedings of the 17th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 169-176). Tsukuba, Japan.
- Meira, L. (1995). The microevolution of mathematical representations in children's activity. *Cognition and Instruction*, 13 (2), 269-313.
- Nunokawa, K. (1994a). Improving diagrams gradually. *For the Learning of Mathematics*, 14 (1), 34-38.
- Nunokawa, K. (1994b). Naturally generated elements and giving them senses: A usage of diagrams in problem solving. In J. P. Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th Conference of the International Groups for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 376-383). Lisbon, Portugal.
- Nunokawa, K. (1994c). Solver's structures of a problem situation and their global restructuring. *Journal of Mathematical Behavior*, 13 (3), 275-297.
- Nunokawa, K. (1996). A continuity of solver's structures: Earlier activities facilitating the generation of basic ideas. *Tsukuba Journal of Educational Study in Mathematics*, 15, 113-122.
- 布川和彦. (1996). 問題場面の構造の構成に対する下位目標からの制約. 上越数学教育研究, 11, 21-30.
- Nunokawa, K. (1997). Giving new senses to the existing elements: A characteristic of the solution accompanied by global restructuring. *Journal of Mathematical Behavior*, 16 (4), 365-378.
- Nunokawa, K. (in press). Heuristic strategies and probing problem situations. J. Carrillo & L. C. Contreras (Eds.), *Problem-solving in the beginning of the 21st century*. Huelva: Hergué.
- Owens, K. D. & Clements, M. A. (Ken). (1998). Representations in spatial problem solving in the classroom. *Journal of Mathematical Behavior*, 17 (2), 197-218.
- Roskos-Ewoldsen, B. (1993). Discovering emergent properties of images. In B. Roskos-Ewoldsen, M. J. Intos-Peterson, & R. E. Anderson (Eds.), *Imagery, creativity, and discovery: A cognitive perspective* (pp. 187-221). Amsterdam: North-Holland.
- 寺尾 敦. (1998). 統計教育におけるベクトル図の有効性について. 図学研究, 32 (2), 27-35.
- Van Essen, G. & Hamaker, C. (1990). Using self-generated drawings to solve arithmetic word problems. *Journal of Educational Research*, 83 (6), 301-312.
- 山本正明. (1995). 問題解決における数直線や線分図等の図の効果. 日本数学教育学会誌, 77 (8), 116-123.