上越数学教育研究, 第 15 号, 上越教育大学数学教室, 2000 年, pp. 59-68.

数学学習における学習者の活動と表現に関する考察

── action とその protocol を視点として ──

上越教育大学大学院修士課程 2 年
内　山　一　敏

1　はじめに

筆者を含めて多くの数学教師は、普段の授業において、結果のみを教え込むのではなく、過程を重視した指導を行うように心がけている。しかし、振り返ってみると、過程そのものが授業の中で評価されることは、ほとんどなかったのではないかと考える。事実、教室の中では、教師の「どんな～か」という問いかけに対してほとんど思考することなく、授業のまとめの暗記、あるいはアルゴリズムやストラテジーの習熟のみに力を入れる生徒を見かけることがあった。市川(1997)は、このような学習観について「結果主義、暗記主義、物量主義(p.98)」ということを指摘している。しかし、これは、生徒がこれまでに経験してきた授業に対しての生徒自身の評価とも考えることができる。

また、数学学習における過程に関して、根本(1996)は次のように述べている；

> 「自分がどのような数学的な見方や考え方をしているのか、あるいは、していたのかは、既習の経験（直前の活動も含む）が問われることに他ならない。自分の行為を観察し、見直す場が指導の中で必要なのである。
>
> 大切なのは、「自分でしたことをよく観察し、観察したことについて振り返って考える」ということである。もちろん「自分でしたこと」というのは結果だけではない、どのような思考のプロセスを経てその結論に達したのか、そのプロセスに含まれる様々な事柄を振り返るということである。」(p.78)

根本(1996)においては、学習者が自らの行為を振り返ることが強調されている。しかし、目に見えない「行為」を、学習者が振り返ることには、困難が伴う。したがって、そのためには、学習者が自らの行為を知覚可能なものに変換すること、すなわち行為を表現することが重要である。ここで、学習における行為とは、中学生では、多くの場合、学習者の思考や活動にあたると考える。

学習者が思考や活動を振り返る機会としての授業を成立させるためには、筆者は次のことが必要であると考える。すなわち、生徒が念頭に持った数学的な内容に関するイメージを出発点として、自分自身の思考を整理し、さらにそれを反省することによって知識を構成するために、自らの思考や活動を表現することができるようにすることである。そして、そのようにすることによって、解決途上あるいは未完成な考え、さらにはつまずいている点などを出し合って、お互いに練りあげることができる、つまりは授業の活性化にもつながりうるものであると考える。

本稿では、実際の授業場面における学習者の活動の過程を見直し、そこで思考したことと表現したものの関わりについて知見を得ること、さらに、そこから指導への示唆を得ることを目的とする。

2　学習者の活動をとらえるための理論的視点

本研究では、学習者が何を概念として学ん

だかということだけではなく、どのような過程を経て学んだかということを重視する。そのような視点のもとで、学習者の活動をとらえるために、Dörfler の理論を手がかりとして用いることにする。

2.1 Dörfler の理論における活動のとらえ

活動に関して、Dörfler は、例えば、次のように述べている；

> 「知識とは、学習者による自分の活動、その構造的性質、そしてその結果に関するもので、実際的あるいは心的な action（操作）とその反省の（認知的）所産である。」（Dörfler, 1989, p.212）

> 「ある概念を表しているシェマは、認知的には一般化の過程の、静的で完成された所産からだけではなく、（圧縮された形式における）その構成の過程からもなると私は考えている。」（Dörfler, 1991a, p.70）

これらから、Dörfler は、数学における概念形成についての過程や、知識を活動から構成すること、さらには、どのような過程を経て、それによってどのような概念を形成していくかということに着目していることがわかる。

2.2 理論的一般化の過程と記号的記述

また、Dörfler(1991a)は、理論的一般化の過程について、図 1 のようなモデルを示している。このモデルは、概念の一般化に限らず、問題解決過程においても用いられるものである[註1)]。この過程においては、概念とは「ただあるもの」ではなく、活動によって関係が確立され、さらに思考の対象としての存在性をもつようになるというように、「変化していくもの」としてとらえられている。

さらに Dörfler(1991a)は、この理論的一般化の過程における、記号的記述の役割の重要性に着目している(例えば Dörfler, 1991a, p.72)。ここでは、不変性が記号によって、記述され、固定されるのみならず、理論的一般化の過程における概念形成の上で、有用な道具（一種の探求スクリーン）として機能していることを述べている。さらに、記号的記述は、活動の中において、活動の対象そのものとなり、さらには意義と意味を獲得して、思考の新しい対象として発達することを示している。

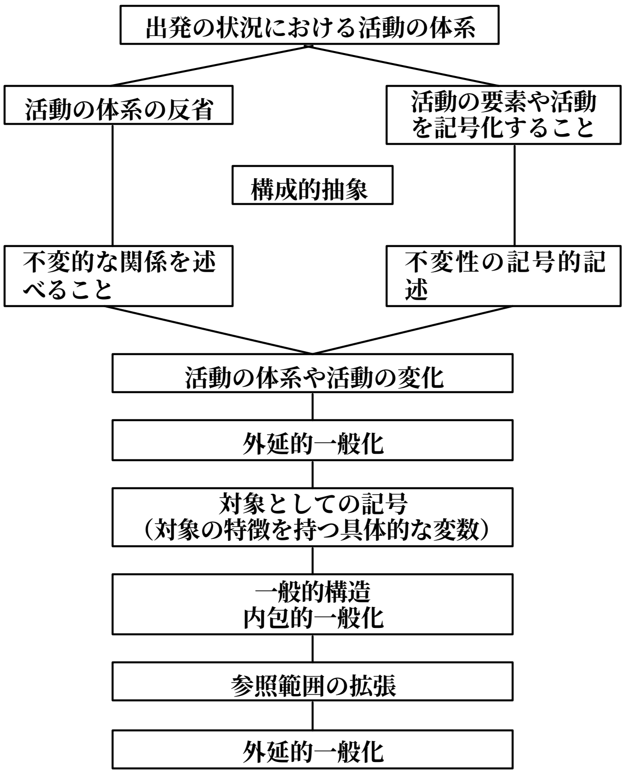

図 1：理論的一般化の過程(Dörfler, 1991a, p.74)

2.3 action とその protocol

学習者としての生徒が、活動をもとに何を表現し、その表現したものをどのように変容させていったかを解釈するための方法として、“ action の protocol ”の概念を用いる。Dörfler の述べる action は、実際的な活動および心的な活動の両方をあわせて考えるものであり、学習者の「行為」に近い意味を持っている。また、protocol に関して、Dörfler は次のように述べている；

> 「ある型の action に関連づけることのできる数学的構造は、action が実行された対象に用いられた変換、あるいはそれらの対象の間の

action によって引き起こされた関連から成っている。action の protocol、すなわち概念の認知的再構成は、これらの変換および/あるいは関連を再構成することを反映するかあるいは可能にするであろう。…（中略）…protocol は、action の（数学的に）重要な特色を記録あるいは表現しており、それらを複製することを可能にしている。」（Dörfler, 1989, p.215）

「protocol は絵や記号やさらに言語的記号のような知覚可能で操作可能な対象についての構造的な体系を生み出す。これらの対象とそれらの空間的/時間的展開を通じて、実行された action の適切で特徴的な段階、部分、中間の段階、結果などが言及され（図的に）記述される。学習者自身が自分自身の action の protocol を生み出すということは重要である。」（Dörfler, 1991b, p.28）

これらをもとに protocol の定義を次のように文章化する。すなわち、protocol とは、学習者が行った action における適切な段階等の重要な特色を、学習者自身が表現したもののことである。したがって、学習者自身が自らの action に対する protocol を表現することが重要となる。さらに、protocol をもとにして、そこからもとの action（protocol を導く過程の段階）へと戻ることが可能であること、そして、その action を分析するのに有用であることが示されている(例えば Dörfler, 1989, p.215)。また、protocol の使用について、Dörfler(1989)は、次のように述べている；

「最も重要なのは、働きかける対象として確立された protocol を使う action である。」（p.216）

すなわち、protocol とは、単なる学習過程の記録や分析の道具として用いられるだけのものではなく、次の action を決定するための、いわば能動的な役割を持ったものである。さらに、Dörfler は、protocol は action の影響を受けており、action の区切りとして生成されるものであり、それらの protocol が数学的な概念を構成するものであることを述べている。さらに、Dörfler は、action の protocol を教授的な意味の概念として用いている(これらについては Dörfler, 1991b, p.28 を参照)。

これまでに述べてきたことの具体例を簡単に提示する。ここでは、学習場面として、多角形の内角の和を想定する。生徒は、六角形の内角の和を求めるよう指示されたとき、既習事項を生かせるように六角形の図に補助線を書き入れるなどの action を行う。その結果、図 2 のような protocol を得る。そして、さら

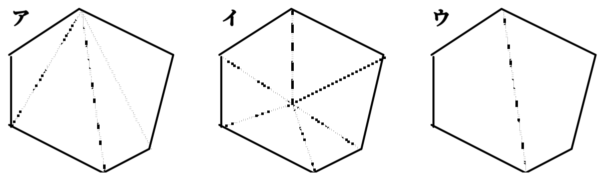

図 2：六角形の内角の和の protocol

に一般化という概念の拡張が行われたとする。このとき、生徒は図 2 を用いて一般の場合を考えるという action を行うことになる。つまり、自らの protocol が新たな思考の対象となっていくことになる。このとき、アやイの protocol は、一般化という次の適切な action につながっていくが、ウではそのようにはいかず、この protocol を再検討する必要が出てくる。このようにして適切な protocol から決定された action によって、文字や言葉をつかった式、あるいは頂点の数と内角の和の関係と関数としてとらえた表などのような新しい protocol が生まれ、一般化がなされていく。

筆者は、この action の protocol の概念を用いることにより、生徒の活動を、ひとつひとつの区切りによってとらえ、それらのつながりを心的な側面から理解できるものであるととらえた。そこで、筆者は、この概念を、生徒の活動をとらえるために、それを分析・考察するための枠組みとして用いることにする。

3　授業における事例とその分析・考察

1999 年の 5 月下旬から 6 月上旬にかけて、

新潟県の公立中学校 2 学年の 3 つの学級で、授業実践を行った。課題は、「カレンダーの中で並びあう 3 つの数の和をすばやく求めたい。どんなことがわかるだろうか」である。授業を記録したビデオ、生徒の学習プリント、抽出生徒へのインタビューを分析・考察のデータとした。ここでは、抽出生徒の事例の中から、早見と和島（いずれも仮名）のものを提示する。早見は、数学の学習には苦手意識を持ち始めているものの、じっくりと思考することを好む男子生徒である。また、和島は、自分なりの考えを進めていくことのできる女子生徒で、その数学的な発想の豊かさを教科担任も評価していた。

3.1 早見の事例

<u>事例 1</u>：第 2 時の授業で、教師（筆者）は、生徒たちの発言をとりあげながら提示したカレンダーをもとにして、縦に並びあう 3 つの数の和は真ん中の数の 3 倍になることを確認し、その理由を、文字を使って説明するところまで授業を進めた。その後、教師は、横や斜めの並びの場合も文字を使って説明をするように指示をした。このとき早見は、以下のような活動を行った。

これまでの学習でワークシートの表面がいっぱいになったので、早見は、カレンダーから数の部分だけを取り出したものをワークシートの裏面に記入した。次に、早見は、すでに解決済みである縦に並んだ数の性質をもう一度調べてみようと、例として 5，12，19 を枠で囲んだ。そのようにして囲んだ数に対して、6，7，8，9，10，11，12 というように、5 と 12 の間の日数を指さすようにしながら数え、さらに 13，14，15，16，17，18，19 と同様に数えて、どちらも日数の差が 7 日であることを確認した。次に、早見は斜めに並んだ数の場合を調べてみようと、自分の書いた数表の、4，12，20 を枠で囲んだ。そして、縦の並びの時と同様に 5，6，7，8，9，10，11，12、さらに 13，14，15，16，17，18，19，20 と指さすようにしながら数えて、どちらも差が 8 日であることを確認した。これらの、数表の中で見つけた等差の関係という性質を、早見は「日差（にっさ）」と名付け、縦・横・斜めの日差を数表の性質として記述した。そして、早見は真ん中の数 a だけでなく、公差をも b という文字を用いることにより、$(a+b)+a+(a-b)=3a$ と式で説明をした（図 3）。授業と同じ日の放課後に行った事後インタビューの中で、早見は、この式について次のように発話した；

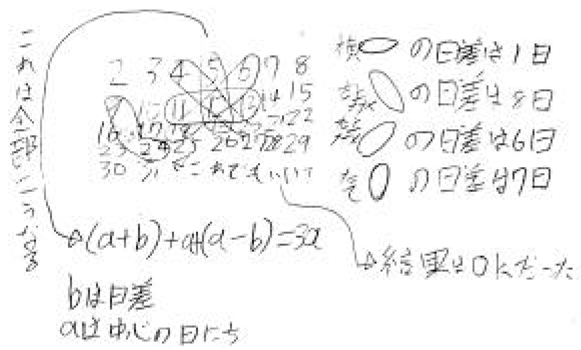

図 3：早見のワークシート①

（事後インタビューのプロトコル　S：早見　I：筆者）

I：うーん、式を変えてみようとしたよね。どんな式書いたか。ちょうど早見くんうまい具合に、きみ黒板の式写してねーからさ、うーんと、覚えてるかどうか、ちょっと試しに書いてみてくんないか？

S：（(b＋7) と書いて）あ、逆だ（笑）

I：うん、いいよ。線引いてじゃあ消して。

S：あ、これ…

I：うん。

S：うん？これが逆かな？（左から順に（b＋7）＋b＋（b－7）＝3b と書く）

I：ふん。じゃあ最初のかっこの b＋7 って何？

S：えー、1 週間後。

I：1 週間後。うん、じゃあ真ん中の b は？

S：えーっと、中心になる数。

I：うん、中心になる数。真ん中の数。b－7 は？

S：えー、b から 1 週間前。

I：1 週間前。じゃ、例えば、…うーんと、例えばさ、…あのカレンダーがない…ちょっと…じゃ、例えば、ここをとったとするよ。（カレンダーの 12，19，26 を囲む）この b＋7 ってどれのこと？

S：b＋7 は 26…。（カレンダーの数字を指さす）
I：じゃ、b は？
S：えー、19…。（カレンダーの数字を指さす）
I：うん。b－7 は？
S：12。（カレンダーの数字を指さす）
I：12。それで真ん中の数の 3 倍、3b になるって説明になったのね。
S：はい。

このインタビューでは、縦に並びあう 3 つの数を例としてとりあげた。早見は、最初に(b＋7)と書いて「あ、逆だ」と発話した。これは action proof の考えである「大きい数から小さい数へと数を動かす」という活動の影響で、最初の（小さい）数にたすという思考と混乱した場面であったと考える。そのため、「うん？これが逆かな？」と、式を書きながら、自らの式の意味を確認している。そして、教師の発話に対して、＋ 7，－7 を 1 週間後あるいは 1 週間前、さらには b＋7，b，b－7 をカレンダーの 26，19，12 というように意味づけを行うことができている。

なお、実際に授業の中で発表した生徒の説明は、例えば(a－6)＋a＋(a＋6)＝3a のように公差は具体的な数値で表現されており、早見のような公差をも文字で表した説明については、教師は授業の中ではあつかっていない。

<u>事例 2</u>：事例 1 と同じ事後インタビューでは、早見に 1，2 時間目の授業での思考過程を聞いた後で、次のような課題を口頭で提示した。すなわち、図 4 のような 2 とびの数からなる数表でも、並びあう 3 つの数の和は真ん中の数の 3 倍になるだろうか、という課題である。この新たな課題に対して、早見は以下のような活動を行った。

			…			
-23	-21	-19	-17	-15	-13	-11
-9	-7	-5	-3	-1	1	3
5	7	9	11	13	15	17
19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45
47	49	51	53	55	57	59
61	63	65	67	69	71	73
			…			

図 4：2 とびの数表

早見は最初に、この数表とカレンダーとの違いについて、負の数があることと、偶数がないことを指摘した。このような表でも真ん中の数の 3 倍になるかという教師（筆者）の問いかけに対して、初めは「偶数がないから 3 倍にはならない」と答えた。そこで、実際にやってみようという教師の発話を受け、数表の中の 5，7，9 を枠で囲んでその和を求めて、真ん中の数の 3 倍になることを確認した。その後、自分から負の数ではどうかと考え、同じく－1，1，3 を枠で囲んで和を求めてみた。さらに縦や斜めの並びの数の場合を考え、自分で和を求めて確かめることによって、この数表でも真ん中の数の 3 倍になるということの確信を強めていっている；

（事後インタビューのプロトコル　S：早見　I：筆者）
S：（5，7，9 を囲んで）えーと、試してみて…21、あ、なりました。
I：なった？本当？そこだけでいい？
S：ただ、マイナスでは無理です。
I：マイナスでは無理です。じゃやってごらん。
S：ここで、（－1，1，3 を囲む）
I：また楽そうなとこ選んだな。いいよ。
S：－1 たす 1 で 0 で 3。
I：うん。
S：1 の 3 倍にはいちおうなったものの、
I：なるんじゃねーの？
S：縦でやってみる。
I：縦でやればならないか。…またマイナスねらったね。そこは無理か。
S：なりました。
I：なった？あれー？じゃあなるんじゃねーの？
S：斜めがある。
I：あ、斜め…
S：他にも何か///。やらなくても、もしかしてなるって決まってるかも知れない。まずこれで…なります。ではこれで…なりました。

そこで、教師は、－ 3，11，25 を例にして、早見の考えた日差を用いて、和が真ん中の数の 3 倍になる理由を説明するように促した。早見は最初、1 週間という言葉を用いて数の関係を調べようとしていたが、教師からすでにカレンダーではなくなっていることの指摘を受け、実際に日差を数えることにした。2

とびの数であるが、間にある数を念頭で挿入しながら、1，2，3…と指さす動作をしながら数え、どちらも日差が 14 で同じであることを確認した。

次に、教師は、真ん中の数を a として、文字を使って説明するよう促した。それに対して、早見は、日差を文字（b）にするのか具体的な数（14）にするのか迷っていたが、教師の指示により 14 を用いて文字を使った説明の式を記述した。その際、最初に a と書き、その左側に（a－14)、次に a の右側に（a＋14）と記述し、（a－14）＋a＋（a＋14）＝3a という式を完成させて、同時に「打ち消し合って…」とつぶやいていた。

3.2 早見の事例に関する分析・考察

事例 1 では、早見の活動は日数の差をひとつずつ数えるという action に戻っている。しかし、この action は、試行錯誤的になされたものではなく、等差であるという事実を確認するための、いわば目的を持った action である。ここで数えた前後の日数の差として「7」という protocol を得て、早見は次の action を決定している。すなわち、斜めの数の並びにおいて日数の差を数え、等しいことを確認するという action である。この action をもとにして、同様に「8」という protocol を得た後で、その protocol を評価することによって、早見は数表（カレンダー）の性質を思考の対象とすることができている。その結果として、早見は真ん中の数を基準として大きい数から小さい数へ数を動かすと、真ん中の数と等しい数が 2 つできる関係をもつ数としてとらえていたものが、日数の差を用いて、真ん中の数からの加減によってつくられている関係へと理解のしかたが変わってきている。ここで、早見は日数の差を数えるという action から得た理解を、「日差」という protocol で表現している。これまでの活動で、早見は真ん中の数に対しては不特定性[註2)]を、日差に対しては特定性を、自らの思考の中にそれぞれつくりあげていき、そうすることによって、この数表が真ん中の数と公差(日差)から構成されているということを確認している。そして、真ん中の数を不特定性を表す文字 a で、さらには日差を特定性を表す文字 b で表現することによって、「(a＋b)＋a＋(a－b)＝3a」という文字式による説明に至っている。このように、ひとつの式の中に特定性と不特定性という異なる性質を持つ文字を用いることができたのは、真ん中の数を決めて、そこから日数の差を数えていくという早見の action によるものと考える。この事例では、早見は、自らの protocol をもとにして次の action を適切に決定していっている。

事例 2 では、早見の「偶数がないから 3 倍にはならない」という発話から、早見にはカレンダーで用いた「日差」という protocol が、実は等差の関係を表すものであり、それが新しい数表の中においても用いることができるものであるとはとらえられていないと考える。したがって、早見は、この「日差」という protocol を用いた action をすることができていない。そこで、教師の発話をうけ、カレンダーの中と同じことがこの 2 とびの数表の中で起こっているのか確認するための action、すなわち、本当に 3 つの数の和が真ん中の数の 3 倍になっているのかを確認する action に戻っている。さらに計算の結果についても、暗算のため記述されていないが、計算した結果をつぶやくことにより念頭的な形での protocol を残している。事後インタビューのプロトコルに示したように、早見は自分から、負の数を含んだとき、縦の並びのとき、斜めの並びのときというように数表の性質を確認している。これらの action とその protocol を評価することにより再び法則性が意識され、「もしかしてなるって決まってるかも知れない」という発話に至っていると考える。

そこで、教師は、早見のつくり出した「日

差」を用いて理由を説明することを促した。それに対して早見は、（教師の介入はあったものの）カレンダーのときと同様に日数の差を数えるという、先につくった protocol をもとにした action に戻って、考えを進めている。この action によって新たに得られた protocol が、特定性を持つ「日差」の「14」である。カレンダーと同じ action を行い、同様な結果を得たことによって、早見の「日差」の概念が再構成され、それがカレンダーに限って用いられるものではなく、等差の数表であれば用いることができるものとして意味づけがなされている。

次に、教師の発話に促され、早見は、文字を使った説明をしようとしている。すなわち、カレンダーのときの protocol を、再構成しようとしている。ここでの早見は、念頭的に action を行い、不特定性を持つ真ん中の数を a で表し、直前に得られた protocol の「14」を使って前後の数を a の式で表してる。これらの action の protocol として、早見は(a－14)＋a＋(a＋14)＝3a と記述している。その際に、早見は a→(a＋14)→(a－14)という順に記述をし、「打ち消しあって…」とつぶやいている。ここでは、早見が記述した式においては、式そのものだけでなく、a－14，a，a＋14 といったひとつひとつの式、あるいは記述した順序や同時につぶやいた言葉からも早見の活動の過程を読みとることができる。これらの結果から、早見は真ん中の数を基準にすること、

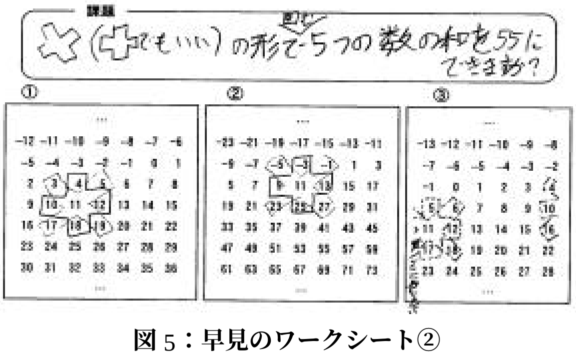

図 5：早見のワークシート②

および、前後の数が相殺の関係にあることを、この過程の中で理解していったと考える。この事例では早見は、カレンダーの性質としてつくった「日差」を、他の等差の数表でも用いられる性質へと拡張し、protocol の持っている意味を再構成している。

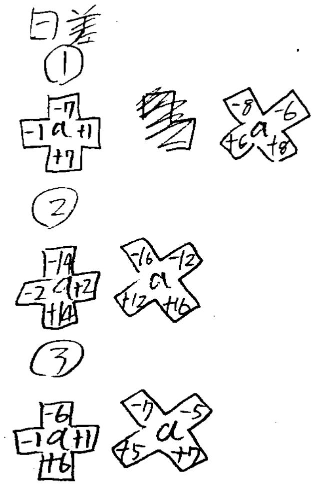

図 6：早見のワークシート③

さらに、早見は、このあとに提示した課題（図 5）を、図 6 のようにして、解決していた。この図では、不特定性を持つ真ん中の数が文字で表現され、特定性を持つ公差が具体的な正負の数で表現されている。このことからも、早見は、これまでの活動の中から、特定性と不特定性の概念をつくりあげていったことがわかる。

3.3 和島の事例

__事例 3__：教師（筆者）が、3 つの数の和をすばやく求める方法を見つけるように指示をし、自由に活動をさせていたとき、和島は、ワークシートの中のカレンダーで、3 つの数を枠で囲んで、それら 3 つの数の和をわきに記入しようとしていた。しかし、和島が最初に 3 つの数を囲んだ方法は、（2, 3, 4），（5, 6，7），（8，9，10）というように、数が重複しないようにして順に囲むというものであった。したがって、カレンダーの中では実際には並びあう数とはなっていないような(8，9，10)などの数の組も思考の対象とされていた。

並びあう 3 つの数の意味について、教師の説明を聞いてその意味を確認した後で、和島は活動を再開した。手にしていたペンをまた

鉛筆に持ち替えて、題意にあうようにして並びあう 3 つの数を縦、横に囲んで、それらの和を筆算で求めた。その間に、赤ペンを取りだし、斜めの並びの数（5, 11, 17）を囲み、それらの和を記入した。

6＋7＋8 を例にしてみると、このときに和島がした計算は、図 7 のようにワークシートに記されていた。このワークシートに記された筆算から、和島は 6＋7 を暗算で 13 と求め、その和にさらに 8 をたしていることがわかる。すなわち、このときの和島は、3 つの数を小さい方から順にたすという活動を行っている。

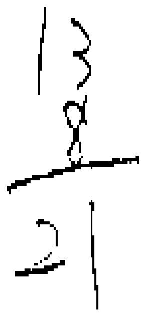

図 7：和島のワークシート①

<u>事例 4</u>：教師（筆者）は、横の数の並びの場合を例として文字を使った説明を生徒の発言を聞きながらまとめた後、縦や斜めの並びの場合について同様に説明をするように指示をした。このときも、和島は、授業の流れとは別に、自分の思考に沿った活動を以下のように進めていた。

最初に、和島は、ワークシートの裏面に、カレンダーとは別の数の並び方に拡張した数表を記述した。そして、この数表の中で、縦や斜めにいくつかの数の組を囲んでいた。

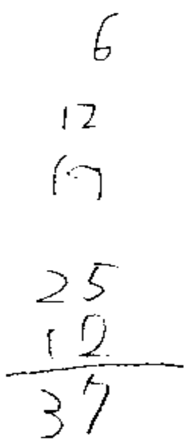

図 8：和島ワークシート②

さらに、それらの囲んだ数の組について、和を計算していた。

このとき、和島は、図 8 のような筆算を記していた。6＋12＋19 を例にしてみると、3 つの数 6, 12, 19 を縦に並べて書いた後、6 と 19 の和を先に求めて 25 と書き、その下に真ん中の数である 12 を書き加えて 3 つの数の和を求めている。すなわち、この計算過程では、和島は、ここまでの過程の中で気づいていた、「両はじをたすと真ん中の 2 倍」という性質を仮設としてそれを検証するようにして、両端の数を先にたしてから真ん中の数をたしている。（しかしながら、ここでは、自らが記述した数表での数字の並べ方が雑で、並びあう数を正しくとることができていないために、誤りとなっている。）

3.4 和島の事例に関する分析・考察

事例 3 では、並びあう 3 つの数という意味を確認した後で、和島は並びあう 3 つの数を選んで実際に和を求めるという action からこの学習活動を始めている。ここでの action に対して和島はワークシートに記されている数を囲んでいる枠とそのわきに記入された和、あるいはその筆算の結果を protocol として記している。ところが、ワークシートに書かれた筆算は、その多くが図 7 にあったような、小さい方の 2 数の和と最大の数との和で計算していることがわかる。ワークシートを見ると、そのような計算は他にもいくつか記されていた。このことは、和島の行った action が、関係を見つけようとするよりは、和を求めようということだけを意識していたものであったと考えられる。和島にとっては、この和を求めようという意識が、ひとつの protocol になっている。この protocol の中には、真ん中の数は表れてこない。したがって、真ん中の数と 3 つの数の和の関係について思考するという action は行われにくいものとなってしまっている。そのため、何ヶ所にもわたって

ねばり強く和を求めてはいるものの、この事例 3 で和島の行った action は、3 つの数の和の規則性を見つけようというものへと変わることなく、単に 3 つの数の和を求めるというもののままである。この事例では、和島は、action によって生じた protocol から、次の適切な action を決定することができずにいる。そのため、和島は 3 つの数を別の視点から見直し、action を変容させていくことになる。

事例 4 では、和島は、3 つの数の和を求めるという action を行っている。しかし、これは、もとの action に戻っているわけではない。事例 3 では、和島は 3 つの数を小さい方から順にたしているが、この事例 4 では、両端の数から先にたして最後に真ん中の数をたしている。ここでは、和島は両端の数をたしてそれが真ん中の数の 2 倍になっているかを（実際には必要ないのであるが）確認し、その後で真ん中の数をたしている。つまり、ここでなされている action は、自らが仮設として構成した protocol を検証しながらなされているものであり、事例 3 と同様に和を求めるものであっても、action 自体は大きく変容していることがわかる。この事例では、和島は、action の変容をもとに protocol を再構成していっている。

4　まとめと今後の課題

学習者の活動の過程を分析・考察した結果、次の知見が得られた(図 9)。

① 思考が進まなかったときに protocol の評価が action へと戻るきっかけとなる

② action に戻ることによって、自らの protocol の持つ概念を変容させている

これらのことについて、事例をもとに、以下に述べる。

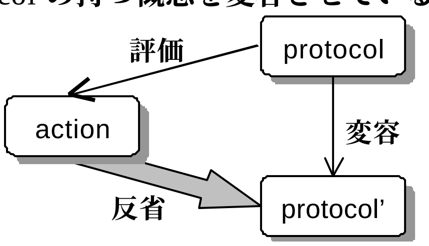

図 9：学習者の活動の過程

最初に早見の事例について述べる。2 とびの数表を示されたときに、早見はカレンダーのときの「日差」という protocol を有効に生かすことができずにいた。そこで、教師の発話を受け、カレンダーのときの protocol を評価し、そのときと同様な action を行っている。この action から、カレンダーと同じ関係を反省し、カレンダーの中だけの関係であった「日差」という protocol を、等差の数表の関係を表す protocol へと変容させている。

次に和島の事例について述べる。和島は、並びあう 3 つの数の適切な関係を見つけることができずに、和を求めるという action を繰り返している。しかし、繰り返すうちに、次第に法則性が意識されるようになり、それを検証しよう protocol を変容させている。このようなときに教師が適切な指導を与えることができていれば、和島は学習をさらに進めることができたものと考えられる。例えば、和島の protocol の中にあった、「両端の数をたすと真ん中の数の 2 倍になる」という事実も、等差の関係があるからこそ成り立つ性質である。和島は、それを仮設として活動をすすめており、この性質そのものが思考の対象とはなっていない。したがって、教師が、和島に自らの記したこの protocol を評価させ、その性質が成り立つ理由を考えさせるような指導を行っていれば、和島の思考も等差の関係へと向かい、さらに学習を進めさせることができたと考える。

先の 2.3 で述べたとおり、Dörfler(1991b)においては、action の protocol は教授的な意味の概念として示されている。本稿では、それを学習者の活動と表現を読みとるための視点として用いてきた。それによって、学習者の思考の過程と授業における活動の過程が整合しているかどうかを見ることができた。さらには、学習者個人に固有な活動に対して、そこからどのように指導をしていくことが有

効であるかを考えることができた。より多くの学習場面でこの知見を生かせるよう、今後の授業実践で、この視点の有効性を考えていきたい。

謝辞　本研究の授業実践にあたって、当該校の橋本幸昭校長、矢内克浩教諭、大久保忍教諭をはじめ多くの先生方の多大なる協力をいただきました。この場をかりて厚くお礼申し上げます。

〈註および引用・参考文献〉

註1）Dörfler(1991a, p.77)では、問題解決場面においても、理論的一般化のモデルが適用可能であることが述べられている。

註2）変数概念に関して、「不特定性」と「特定性」という2面性を、藤井(1992)は次のように例示している；

> 「たとえば、「1本80円の花何本かに、50円のリボンをつけて買う」（K社）という状況が設定され、その代金を表す式が「花の本数3, 4, 5, …のかわりに文字nを使う」として80×n＋50（円）と立式されたとき、文字nは3とか4とかのある特定の数だけを表しているわけではない。それは不特定の数（花の本数）を表している。変数概念のこの側面を本稿では「不特定性」と呼んでいる。
>
> 一方、花の本数を表す文字nは、ある状況下では特定の数として決定することができる。売ることのできる花の総数を50本とすると、1から50までの自然数の中で特定の数が選ばれ、その本数の花が買われることになる。変数概念のこの側面が「特定性」である。」（p.24）

この2面性に関して、藤井(1992)は、「これらはいずれも文字の機能として重要な役割を担い、文脈・場面に応じて使い分けられている(p.20)」こと、そして「問題なのは文字の種々の意味を不的確な文脈・場面で活性化すること(p.20)」であると指摘している。

Dörfler, W. (1989). Protocols of actions as a cognitive tool for knowledge construction. *Proceedings of the 13th PME Conference 1*, 212-219.

Dörfler, W. (1991a). Forms and means of generalization in mathematics. In A. J. Bishop, *et al.* (Eds.), *Mathematical Knowledge : Its Growth Through Teaching* (pp.61-85). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Dörfler, W. (1991b). Meaning: Image schemata and protocols. *Proceedings of the 15th PME Conference 1*, 17-32.

藤井斉亮. (1992). 児童・生徒の文字の理解とミスコンセプションに関するインタビュー調査. 日本数学教育学会 数学教育学論究, *58*, 3-27.

藤井斉亮. (1999). 「数字の式」から「文字の式」に至る指導ー擬変数についてー. 杉山吉茂先生ご退官記念論文集編集委員会(編著), 新しい算数・数学教育の実践をめざして(pp.153-162), 東洋館出版社.

市川伸一. (1997). 認知カウンセリングと学校数学. 日本数学教育学会(編), 日本の算数数学教育 1997 学校数学の授業構成を問い直す(pp.94-103). 産業図書.

稲生耕一. (1999). おはじきで説明したことを文字で説明してみると？. 礒田正美, 原田耕平(編著), 生徒の考えを生かす問題解決授業の創造ー意味と手続きによる問いの発生と納得への解明ー(pp.81-87). 明治図書.

正木孝昌. (1994). 活動する力を育てる算数授業. 明治図書.

三輪辰郎. (1996). 文字式の指導序説. 筑波数学教育研究, *15*, 1-14.

中島健三. (1981). 算数・数学教育と数学的な考え方ーその進展のための考察. 金子書房.

根本博. (1996). 新学力観に立つ中学校数学科の授業改善ー考える心を育てる. 明治図書.

岡崎正和. (1994). 均衡化理論に基づく数学的理解の成長に関する研究ーW.Dörfler の一般化の理論を中心としてー. 日本数学教育学会 第27回数学教育論文発表会論文集, 107-112.

Semadeni, Z. (1984). Action proof in primary mathematics teaching and teacher training. *For the Learning of Mathematics*, *4*(1), 32-34.

杉山吉茂. (1990). 「式をよむ」ことについて. 学芸大数学教育研究, *2*, 17-25.

内山一敏. (1999a). 数学学習における action と protocol に関する考察ー文字式の指導を事例としてー. 上越数学教育研究, *14*, 119-128.

内山一敏. (1999b). 活動を重視した数学授業に関する考察ーaction の protocol を視点としてー. 日本数学教育学会 第32回論文発表会論文集, 385-390.

内山一敏. (2000). 活動を重視した数学学習に関する考察ーaction とその protocol を視点としてー. 上越教育大学大学院学校教育研究科修士論文(未公刊).