問題状況に依存した学習過程に関する考察

－借金返済の問題に迫る二つのアプローチから－

吉 川　保
上越教育大学大学院修士課程１年

1．はじめに

数学の理解を支えているものにその数学的構造の正しさを確信できるかどうかが大きな比重をしめている。教育現場では従来それらの正しさの確信が、その構造に論理的矛盾がなく筋道が通っていることや、その構造が現実場面にきちんと反映していることによってもたらされると考えられてきた。

小学校低学年では子どもに密接した現実場面から算数を探求させるとともに、その正しさの確信も現実場面に多く支えられている。やがて、学年が上がり小中高と子どもの認識能力が高まるにつれて数学の抽象度が上がっていくと数学の探究が現実場面から次第に離れていき、高等学校では抽象的で形式的な議論からそれが始まってしまう。そのため正しさの確信は次第に現実場面よりも論理的な整合性に裏付けられることが多くなっていく。

また一方で数学は積み重ねの教科といわれているように今まで習ってきた数学的な構造物を組み合わせてより高次の概念を形成していく。この特徴ゆえに、それらの仕組みを教えるときには全体を部分部分に細かく分け、一つ一つの関係性を合理的に説明することで生徒が理解するであろうと期待するのだが、大抵の場合しまいになにをやっているのかわからなくなる。部分部分をつなぎあわせている鎖が形式的な議論による場合、その鎖の数が多くなるほど全体像に実感が湧きにくくなるのではないだろうか。高等学校で学ぶ数学に豊かな意味を持たせるためにはこのような形式的な議論から始めるアプローチに加えて現実場面そのものから始めて、そこから数学的な構造を探求していくアプローチにも着目すべきであろう。

そこで本稿では「借金返済の問題」を題材に従来の等比数列の和の応用問題として解決していく過程と借金返済という現実場面からそこに埋め込まれている数学的な構造を見いだしていく過程を概観し、両者を比較しながらその特徴を考察する。

2．等比数列の応用問題としての解決過程

2．1教科書にみる指導過程

等比数列の和の応用問題として発展的に扱われる「借金返済の問題」を教科書（永尾ほか, 1993）から引用した。

「発展　等比数列と複利計算

毎期の初めに一定の金額 a 円を積み立てるとき、1期の利率をrとして、1期ごとの複利法で計算すると、第n期末の積立金の元利合計S円は、次のようにして求められる。

第1回の積立金a円の第1期末の元利合計は $a(1+r)$ 円、第2期末の元利合計は、複利法で計算すると $a(1+r)^2$ 円、…となり、第n期の元利合計は $a(1+r)^n$ 円となる。同様に、第2回、第3回、…、第n回の積立金の第n期末の元利合計は、それぞれ

$$a(1+r)^{n-1},\quad a(1+r)^{n-2},\ \cdots\cdots,\quad a(1+r)$$

よって

$$S=a(1+r)\{1+(1+r)+(1+r)^2+\cdots\cdots+(1+r)^{n-1}\}$$

$$=\frac{a(1+r)\{(1+r)^n-1\}}{(1+r)-1}$$

$$=\frac{a(1+r)\{(1+r)^n-1\}}{r}$$

また、例えば、ある年の初めに50万円を借り、年利6%、1年ごとの複利で、10年間で返済するものとし、毎年末にa円ずつ支払うとする。このとき、支払い金額a円は次のようにして求められる。

ただし、$(1.06)^{10}=1.79085$ として計算する。

50万円をそのまま預けたときの元利合計とa円を支払うたびに、それを積み立てたと考えたときの元利合計が一致するように、aの値を定めればよいから

$$500000(1+0.06)^{10}=\frac{a\{(1+0.06)^{10}-1\}}{0.06}$$

よって

$$a=\frac{500000\times0.06\times1.79085}{1.79085-1}=67933.8\cdots\cdots$$

したがって、この場合の毎年の支払い金額はほぼ67934円である。」（p.71）

以上のように複利計算を等比数列の和としてとらえ「支払うたびにそれを積み立てる」というように借金を積み立てに見直している。筆者はこの見方をある借金返済の場面に応用した。

2．2「ナニワ金融道」にみる借金返済場面

「ナニワ金融道」の漫画に大変興味深い場面があった。金融業者が使う金利のマジックを描いたものである。貸付実績を伸ばすために新入社員の灰原は新規開拓の営業に励んでいた。ある依頼者が借金を申し込む場面で漫画に登場する凄腕の営業マンである桑田

青木雄二, 1991 年, p.58

は返済方法を巧妙に使いわけて消費者に返済額を提示している。彼は月々減っていく元金に関係なく利息をとる方式、つまり当初の借入元金に対する利息計算をし、その利息合計を返済回数で割って均等に月々の利息を計算する方式（アドオン方式）で電話の相手に融資を勧めている。この方式は一般に家電製品などで耐久消費財のクレジットやローンで広く使われるもので、消費者ローンでは普通は用いない。消費者金融業界が実際に用いる返済方式は元利均等返済方式がもっとも多く、これは月々減っていく元金に対して利息をとりながら毎回の返済額が均等になるように計算された定額返済方式である。

このように返済方式が変われば利息のとり方も変わってくるため、借入元金、返済回数を同じ条件にしたときにアドオン方式で金利を月2分として取れる利息は元利均等方式で月3分5厘のそれに相当する。元金に対して

青木雄二, 1991 年, p.59

月2分で貸すとはいえ、月々減っていく元金に関係なく利息をとるから実質は高い金利で貸すことになるというものだ。

今述べた種明かしは、しかしながら様々な試行錯誤を経てわかったことであり、この漫画の場面を見た当初から自明なことではなかった。漫画がかもし出す雰囲気から最初に受けた印象は消費者金融には気をつけないといけないし、そういうからくりをこれまで習ってきた高校数学を使ってうまく説明してみたいということであった。そのような動機がこの場面によって強く引き起された。

2．3数列の応用問題としての解決過程

教科書の指導過程に沿ってこの漫画の場面を考えていく。まず解法の特徴をみると、始めに等比数列の和の公式を利用して定額積み立ての元利合計の式を作りその後に借金問題を考えている。以下に示すように借金を

金融業者が使う金利のマジック。元金に対し月2分（2%）で貸すとはいえ月々減っていく元金に関係なく利息をとるから実質は高い金利で貸すことになる。（第一巻）

青木雄二, 1994 年, p.18

貯金としてみなすことが行われる。教科書(永尾ほか, 1993)から引用すると

「**50万円をそのまま預けたときの元利合計とa円を支払うたびに、それを積み立てたと考えたときの元利合計が一致する**」(p.71)

とある。借金についての知識が不十分なのか、この考え方がどうして出てきたのか分からなかった。疑問を持ってしまうとこれをどのように借金場面に当てはめればよいのか確信が持てないため、まず毎月の積み立てによる複利計算のモデルを作ることから始めた。

2．3．1積み立てモデルの作成

図1は金利をrとしたときの元金と利子の関係と第 4 回目の積み立てをするときの状態で第 3 期末の元利金に利子がつく様子を表している。次に元利合計を数列の和として求める活動である。図3のように積み立てモデルを作り等差数列の和にならって同じ形を上からかぶせてみたがうまく長方形にならない。実際の等比数列の和の公式は等差数列の和と同じように導かれない。そこで実際に等比数列の和を求める過程を教科書から振り返り（図2）このモデルのどこに反映しているのかを探っていく。

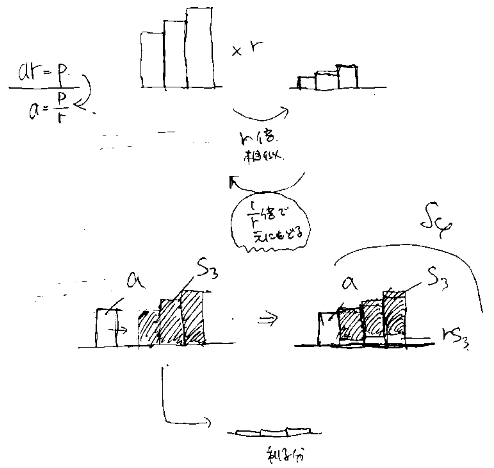


図1

図2が示すような計算結果（＊）が図3の積み立てモデル上でどのように表れているかを見ている。図3のモデル上で第5項から初項の30を差し引いた部分（＊）は第１項から第４項までの和に金利ｒを掛け合わせたものとなっているからこれをrで割れば元に戻ると考えている。図1で確かめた元金と利子の関係がこの考え方にヒントを与えている。

$$(1+r)S_4 = 30(1+r)+30(1+r)^2+30(1+r)^3+30(1+r)^4$$
$$S_4 = 30+30(1+r)+30(1+r)^2+30(1+r)^3$$
$$S_4(1+r-1) = 30(1+r)^4-30 \quad (*)$$

図2

ここで複利計算を等比数列の和としてとらえることができたが、これはあくまで貯金のモデルであって、借金のモデルにはなっていない。このモデルをどのように借金に組み直していくのか手がかりをつかむため「ナニワ金融道」の問題場面にもどりヒントを探っていった。

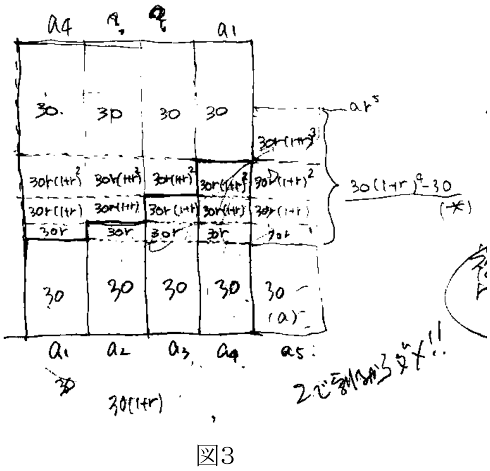


図3

2．3．2元金返済モデルの作成

漫画の場面で営業の桑田は新入社員の灰原に対して、「元金は減っていくんやで」とアドバイスする。それに対して灰原は「最後の10回目は30万に対して6万…」と応じる。この状況から筆者は元金が毎月30万ずつ減ると考え、図4の元金返済モデル作った。

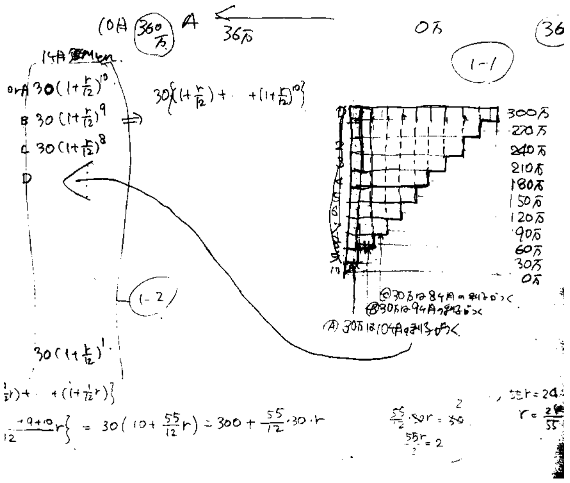


図4

帯グラフの1マスは30万円である。300万円の元金が返済回数が増えるごとに30万円ずつ減る様子が階段状に示されている。これを「積み立て」の見方で捉えなおすためにモデルを横から縦に見直してみた。すると、最後に返済する左端の30万円の1マスを下から上に見るとずっと返済されていない。つまり、左端で10回目に返済されるのを待っている30万円は結局、金融会社から10ヶ月間借りていることになる。

- 10回目に返済する30万円は10ヶ月間借りていることになる。…図4の記号　A
- 9回目に返済する30万円は9ヶ月間借りていることになる。…図4の記号　B
- 8回目に返済する30万円は8ヶ月間借りていることになる。…図4の記号　C

金融会社からみれば1ヶ月ごとの複利で30万円を10ヶ月間客に預けているわけだから複利計算が使える。漫画の会話で「10ヶ月で60万の金利が取れる」とあることからこの返済金を毎月貯金すると考えれば「毎月30万円ずつ積み立てると10ヶ月複利で360万円になる」と解釈できる。そして、そのような貯金の月利はいくらなのかを求めればよいと判断している。そこで教科書の計算式にそれぞれの変数を代入して式を作ると次のようになった。

$$\frac{30(1+r)\left\{(1+r)^{10}-1\right\}}{r}=360$$

（単位は万円）

r の値を直接求めるには対数の計算が必要だが桑田の言う3分5厘を r に代入した（r ＝0.035）ところ大体うまくいった。

2．4二つの間違い

実はこの計算式には二つの間違いが含まれている。一つはこの借金返済の場面では毎月の返済額が36万円であるのに、この計算式では返済額を毎月30万円としていることである。この間違いが起こったのは金融業者が客に300万を貸し、客から10ヶ月で総額360万円を返してもらう。漫画の中にも「10ヶ月で60万円の金利が取れる」とあることから300万円をそのまま預けたときの元利合計が360万円になると解釈したことによる。そして、支払い者の立場から30万円を支払うたびにそれを積み立てたと考えたときの元利合計がその金額になればよいと考えたからである。

二つ目の間違いはこの借金返済モデルから作られた計算式を見ると最終回の返済金は1ヶ月運用され、利子がついたあとで借金の返済にあてられている。実際には最終回の返済金を返すとその時点で残高がゼロになって終わる。これは借金で支払う金を積み立てていく考え方をしているために起こった。

借金と積み立てとの決定的な違いは初回支払金と最終回支払金に現れてくる。まず初回の支払い金だが、積み立ての場合、契約が始まると同時に初回の積立金が支払われるのに対して借金の場合、その契約が始まる時期と初回の返済時期は異なる。通常、一期あとから支払えばよいことになっている。教科書にも「ある年の初めに借り、毎年<u>末</u>に支払う」とアンダーラインを引いている。従って、借金の初回返済金を積み立てたとしても通常の積み立てよりも一期分だけ運用期間が短くなる。

次に最終回支払金だが、積み立ての場合、最終回の積立金が支払われたあと、その期末まで積立金を寝かせて、利子をつけるのに対して借金の場合、最終回の返済をしたらそれで借入残高がゼロになって終わる。通常の積み立てと違って最終回返済金を積み立てて利子をつけることはできない。

このことを等比数列の和で説明すると、

積み立ての元利合計 S は

$$S=a(1+r)^{n}+\cdots\cdots+a(1+r)$$

借金返済総額 S' は

$$S' = a(1+r)^{n-1} + \cdots\cdots + a$$

よって教科書の積立金の元利合計を求める式と借金の支払い金を積み立てたと考えた元利合計を求める式は違ってくる。

教科書の積立金の元利合計を求める式 （a は毎期の積立金、r は金利、n は積み立て期間数）

$$\frac{a(1+r)\{(1+r)^n - 1\}}{r}$$

教科書の借金の支払い金額を求める式 （a は毎期の返済額、r は金利、n は返済回数）

$$\frac{a\{(1+r)^n - 1\}}{r}$$

これらはそのときにすぐに自明になったわけではなかった。積み立てのモデルを作る際に金利の付き方を図示したり、元金が減る様子をモデルに反映させたり、積み立てモデルに具体的な日付を入れて積立期間を詳細に考えてみたり、様々な活動から徐々にこれらの間違いに気づいていった。しかしながら、当初の疑問である借金返済を積み立てとして考えてよいかどうかの答えは見つけられなかった。そのこと自体は認めることにして返済額を36万円に訂正し金利を求めた。

「300万円をそのまま預けたときの元利合計と36万円を支払うたびに、それを積み立てたと考えたときの元利合計が一致するように金利 r の値を定めればよい」

よって、

$$3000000(1+r)^{10} = \frac{360000\{(1+r)^{10} - 1\}}{r}$$

$$r = 0.0346015$$

幸いにもこの答えは桑田の発言「そや、だから平均したら3分5厘になるんや」を裏付けるものとなった。

３．問題状況に依存した学習過程

３．１文脈の役割

数学概念をいかに獲得させるかについての議論は多い。現実的な場面がその概念形成に大きな役割を果たすことに着目したのが Realistic Mathematics education（以下 RME）による学習教授原則である。なかでも文脈の機能について次のように指摘している。

（Lange Jzn.,J.de, 1987）

- 概念形成：あるコースの最初の様相においてそれらは生徒に数学に対し自然な形での動機づけを促す。
- モデル形成：それらは形式的な操作、手順、記述、規則を学習するためにしっかりとした理解力を提供する。そして、それらは考える支えとしての重要な機能を備えた他のモデルとともに振る舞う。
- 適用性：それらは真実性を根源として明らかにするとともに適用可能な領域をも明らかにする。
- 適用された状況における特有の能力の訓練

このような役割を担う文脈が埋め込まれた現実状況から数学の探求を始めるアプローチは実際にどのような効果を生むであろうか。

「ナニワ金融道」の借金返済場面にどのような文脈が埋め込まれているか、そこから数学的構造が見出せるのか、はたしてその構造は「教科書」の解答に示されたような関係式になるのか探求を試みた。

３．２借金返済場面にある数学的構造の探求

３．２．１借金返済場面という文脈

積み立てモデルを作る過程で借金返済の仕組み自体がこの漫画の場面だけではよくわからないという印象をもった。そこでインターネットの検索で様々なことを調べてみた。ヤフーで「消費者金融」と検索するといろいろな企業名が出てくる。そのなかから一つの企業を選び、そこのホームページを見ると借金返済額をシミュレーションするページがあった。ここでは利用希望金額を指定の期間（月数）で返済するときの元利均等返済方式による、毎月の返済額を算出してくれる。入力する項目は利用希望額、返済月数、借入金利（年利）の３項目である。利用希望額として100万円、返済月数は10ヵ月そして借入金利（年利）は 25.55％、としてこれらの値を枠内に入力し実行ボタンを押すと返済計画表（表1）が現れる。

表1

回数	返済額	元金	利息	残高
1	112,080	90,789	21,291	909,211
2	112,080	92,722	19,358	816,489
3	112,080	94,696	17,384	721,793
4	112,080	96,712	15,368	625,081
5	112,080	98,771	13,309	526,310
6	112,080	100,874	11,206	425,436
7	112,080	103,022	9,058	322,414
8	112,080	105,216	6,864	217,198
9	112,080	107,456	4,624	109,742
10	112,078	109,742	2,336	0
累計	1,120,798	1,000,000	120,798	0

この返済計画表に現れる変数は回数、返済額、元金、利息、そして残高の 5 つである。

毎月の返済額を教科書の関係式から求めると次のようになる。

$$1000000(1+0.0213)^{10} = \frac{a\{(1+0.0213)^{10}-1\}}{0.0213}$$

$$a = 112085$$

（年利を 12 で割った値 0.0213 を月利とする）

この値は端数の調整をすれば表1の返済計画表の返済額と一致するようだ。ちょっと意外である。しかし、同時にこの返済表から教科書のとおりの関係式（数学的構造）が導かれるはずだという確信がうまれた。

3．2．2文脈に埋め込まれた数学的操作

借金の文脈にある返済計画表を元金残高を帯状にして、そのモデル（図 5）を書き、この表に上がっている4つの変数、返済額、元金、利息、残高の関係性を抜き出した。1 回目の利息は 100 万円につくはずであるので計算してみたところ表の値と一致する。モデルの下に書いてある計算「1 ヶ月目 21291 円」がそれである。次に 1 回目の残金(909,211 円)に月利(0.0213)をかけた値(19358)は返済表の2回目の利息の値と一致することがわかる。これから先月の借入残高に月利を掛けると今月の利息が決まるということが読み取れる。その様子を表すためモデルに横に伸びる矢印を引き、その先に利息を書き込んでいる。

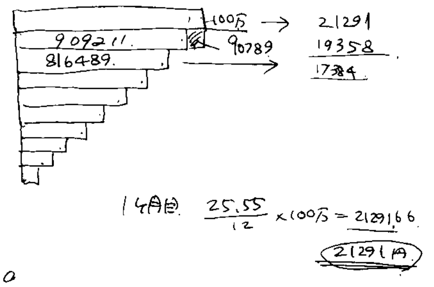


図 5

この他に表に埋め込まれた数学的操作を箇条書きした。

- 返済額は元金の返済分と利息分に振り分けられる。（返済額＝元金＋利息）
- 今月の残高は前の月の残高から今月の元金返済分を引いている。(今月の残高＝先月の残高－今月の元金返済分)
- 今月の利息＝先月の残高×月利　（月利＝年利÷12）

3．2．3表計算ソフトによる返済表の再現

返済計画表からわかった数学的操作を表計算ソフト（エクセル）のセルに埋め込み、エクセル上で再現した。同じ操作を繰り返しているためこのような表計算ソフトになじむ。（表2）

表2は各セル内に埋め込まれた数式が見えるように作成している。それぞれのセルについて、1回目の返済に関係するセル（セル番号B11～E11）に埋め込む数式は以下のようにして求めた。

表2

	A	B	C	D	E
1	返済表				
2					
3	借入金＝				
4	年利息＝	=B5*12			
5	月利息＝				
6	回数＝				
7	返済額＝				
8					
9	返済回数	毎回返済額	元金返済分	利息返済分	借入金残高
10	借入時	―	―	―	=B3
11	1	=B7	=B11-D11	=E10*B5	=E10-C11
12	2	=B7	=B12-D12	=E11*B5	=E11-C12
13	3	=B7	=B13-D13	=E12*B5	=E12-C13
14	4	=B7	=B14-D14	=E13*B5	=E13-C14
15	5	=B7	=B15-D15	=E14*B5	=E14-C15
16	6	=B7	=B16-D16	=E15*B5	=E15-C16
17	7	=B7	=B17-D17	=E16*B5	=E16-C17
18	8	=B7	=B18-D18	=E17*B5	=E17-C18
19	9	=B7	=B19-D19	=E18*B5	=E18-C19
20	10	=B7	=B20-D20	=E19*B5	=E19-C20
21	合計	=SUM(B11:B20)	=SUM(C11:C20)	=SUM(D11:D20)	―

セル番号　B11

（毎回返済額）　　＝B7

毎回の返済額（セル番号 B11）は「教科書」の公式から得られた値をいれる。（セル番号 B11～B20には B7の値がコピーされる）

セル番号　C11

（元金返済分）　＝B11－D11

元金返済分＝毎回返済額（B11）―利息返済分（D11）より、 ＝B11－D11

セル番号　D11

（利息返済分）　＝E10＊B5

今月の利息＝先月の残高×月利より、 1回目の利息（D11）＝0回目残高（借入金総額）（E10）＊月利（B5）

セル番号　E11

（借入金残高）　＝E10－C11

借入金残高＝先月の残高（E10）－今月の元金返済分（C11）

次にこのセル行をコピーで各行に貼り付けたあと、合計のセル行に和の式を埋め込んでいる。返済回数を増やす場合は行を挿入して先にコピーの元である行を貼り付けていけばできる。今回は 10 回で作成した。さて、100 万円返済の数値を代入していくと、確かに最終回の残金がゼ

ロになる。各セルの値も計画表の値と一致し、返済表が正しく再現されたという実感が沸く。この活動から借金を決める4つの変数、借入金、月利、返済回数、返済額がはっきりとした。返済回数を10回に固定しているが、借入金、毎月返済額そして月利の3つの変数に自由な値を代入して返済の様子を見ることもできる。

そこで、「ナニワ金融道」における借金の返済計画表を作成することにした。各セルに代入した値はまず、借入金（セル番号B3）に3000000、返済額（セル番号 B7）に３６００００、月利息（B5）の枠に値をいれると一気に計算し、各返済回数の借入金残高に数値がはいる。金利をいろいろと変えながら、借入残高がちょうどゼロになるように調整していくとセルの計算設定にもよるが月利を0.0346018とするとちょうど残高がゼロになった。（表3）

表3

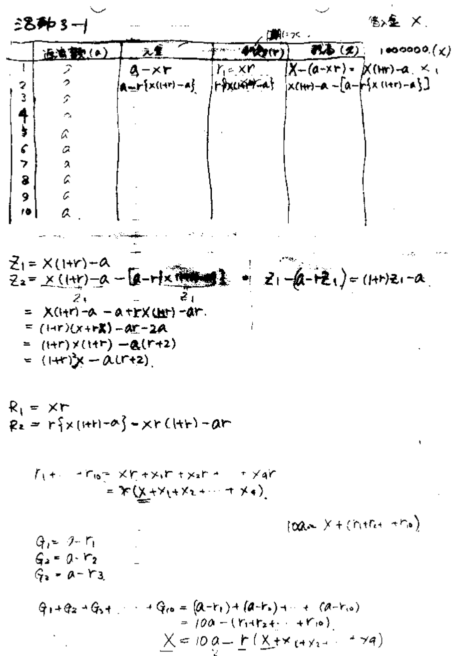
	A	B	C	D	E
1	返済表				
2					
3	借入金＝	3000000			
4	年利息＝	0.4152216	41.52216%		
5	月利息＝	0.0346018	3.46018%		
6	回数＝	10			
7	返済額＝	360000			
8					
9	返済回数	毎回返済額	元金返済分	利息返済分	借入金残高
10	借入時	―	―	―	3000000
11	1	360000	256195	103805	2743805
12	2	360000	265060	94940	2478745
13	3	360000	274231	85769	2204514
14	4	360000	283720	76280	1920794
15	5	360000	293538	66462	1627256
16	6	360000	303695	56305	1323561
17	7	360000	314203	45797	1009358
18	8	360000	325075	34925	684283
19	9	360000	336323	23677	347960
20	10	360000	347960	12040	0
21	合計	3600000	3000000	600000	-

この値は「教科書」の関係式から求めた値($r = 0.0346015$)と同じ（計算機の誤差はあるが）と考えられる。この表ではある計算規則を繰り返し適用して数値が決まっていくのでそのきまりを数列という数学的手法を使って浮かび上がらせるころができる。

３．２．４返済回数を順序数とする数列の構成

返済計画表を作る過程から借金返済を決める変数が 4 つあることがわかった。それらは借入金額、毎回の返済額、金利そして返済回数である。この 4 つの変数は表に埋め込まれている数学的操作の下で元金返済額、利息返済額、借入金残高を構成する。このように構成された変数は返済表が明らかにしているように返済回数によって決められていく。しかも、この返済回数は順序数（1 回目、2 回目、3 回目、…）であるため、それによってコントロールされていく数の様子は数列として記述することが適している。以上の観点から借入金額を X、毎回の返済額を a、月利を r、そして返済回数（10回）を順序数とした元金の数列を{Gn}、利息の数列を{Rn}、そして残高の数列を{Zn}とした。（表4）

表4



それぞれの数列を個別にみて（表を縦に眺めていく）その一般項を予測してみるのだが、変数が多く計算も煩雑になって処理しきれずにやがてこの活動は暗礁に乗り上げてしまう。

そこでいったん返済表から離れて「借金」についての資料を調査した。そのなかで借金の方式は大きく3 種類があり、用途に応じて使い分けられていること、教科書の借金の返済方法と「ナニワ金融道」の借金の返済方法は同じく「元利均等返済方式」であることなどがわかった

３．２．５関係式へ視点を変えたきっかけ

借金返済の仕組みを調べていくうちに「知って得する生活数学」という本に出くわした。そこでは元利均等返済方式による返済額の計算方法が積み立てを媒介にする文脈でなく、借金返済の文脈から懇切丁寧に展開されていた。３．２．4と同じように数列を考えているが、それぞれの数列の一般項を単独で求めずに表に埋め込まれた操作で規定される数列間にある関係を等式で表し、それらを連立方程式を解く要領で処理していた。

この本によって返済表を縦に見る視点に加えて横から見る視点も加わったといってよいだろう。また、その視点はそれぞれの項（元金、利息、残高）が同じ序数（返済回数）でどのような関係式で結ばれるか、エクセルの計算式をもとにそれぞれの項を漸化式で捉え直す活動を促す。以下に示す表5のように各セル列に数列をならべ、

返済回数ごとに関係式を構成していく。

表5

返済表				
借入金＝	S			
年利息＝				
月利息＝	r			
回数＝	10			
返済額＝	a			
返済回数	毎回返済額	元金返済分	利息返済分	借入金残高
借入時	―	―	―	S
1	a	b_1	c_1	s_1
2	a	b_2	c_2	s_2
3	a	b_3	c_3	s_3
4	a	b_4	c_4	s_4
5	a	b_5	c_5	s_5
6	a	b_6	c_6	s_6
7	a	b_7	c_7	s_7
8	a	b_8	c_8	s_8
9	a	b_9	c_9	s_9
10	a	b_{10}	c_{10}	s_{10}
合計				―

返済第1回目

$b_1 = a - Sr$

$c_1 = Sr$

$s_1 = S - b_1 = S - (a - Sr) = S(1+r) - a$

返済第2回目

$b_2 = a - s_1 r = (1+r)(a - Sr)$

$c_2 = s_1 r = \{S(1+r) - a\}r = Sr(1+r) - ar$

$$s_2 = s_1 - b_2 = S(1+r) - a - (1+r)(a - Sr)$$
$$= S(1+r)^2 - a\{1 + (1+r)\}$$

以下同様にして 10 回目までを予測していく。特に、最終回で残高がゼロになることに注目すると、

$S_{10} = 0$ だから

$$s_{10} = S(1+r)^{10} - a\{1 + (1+r) + (1+r)^2 + \cdots\cdots + (1+r)^{10}\}$$
$$= 0$$

$$\therefore \quad S(1+r)^{10} - a\frac{(1+r)^{10} - 1}{(1+r) - 1} = 0$$

$$S(1+r)^{10} = \frac{a\{(1+r)^{10} - 1\}}{r}$$

このようにして借金返済の文脈から借入金額 S 、毎回の返済額 a 、金利 r そして返済回数 (10) の関係式が導かれた。

4．考察：文脈とそれぞれの学習過程

4．1「積み立て」の文脈と学習過程

借金の返済を「積み立て」の文脈で考える場合、教科書（永尾ほか, 1993）では以下の考え方を前提に話が進んでいく。(　)は筆者

「（借入金を）そのまま預けたときの元利合計と、(毎回の返済額を）支払うたびに、それを積み立てたと考えたときの元利合計が一致するように、（毎回の返済額）を定めればよい」(p.71)

この問題では返済額を求めることが目的であり、この考え方自体を追求するのわけではないが、筆者は残念ながらこの考え方に実感をもつことができずにいたため、こだわりつづけ等比数列の和としての積み立てモデルを作り、結局間違いを二つ起こしてしまった。そこでこの考え方それ自体は自明のこととして、今度は問題から注意深く関係式に当てはまる変数を探し出し当てはめて計算した。

答えは出たものの、この関係式からは36万円を借金と同じ金利で10回積み立てた総額が約412万円になるということも導かれる。金融業者に返済される総額は360万円なのに、この412万円は何を意味するのかわからない。すくなくとも教科書の説明における文脈にはそのヒントは見受けられなかった。

そこで、数学の文脈ではなく金融という商習慣でどのように扱われているかを調べたところ、商業科の教科書（計算事務）には「複利終価」、「複利原価」、「年金」という考え方があり、この考え方が上の理解の鍵を握るようである。また、二つの間違いも「期首払い」と「期末払い」で説明されていた。

はじめに教科書から数学的関係を教えられ、それらを問題に適用する場合は、問題の文脈からいかにしてその公式、方略の構成要素に対応する変数を抽出するかに注意が注がれることになる。そして、単純な例題から応用問題になるにつれてその文脈は鍵となる変数を隠すように構成されていく。もし、解答者にとって与えられた公式、方略がよく理解できないものとなってしまったらどうであろうか。筆者は等比数列の和で必要になる変数である初項にあたる返済月額を元金返済分と取り違え、項数にあたる利子がかかってくる期間を１期多くとってしまう間違いを起こした。これは公式、方略に対する理解の度合いが低いため、文脈に惑わされてしまったためといえる。また極端な場合は変数を抽出する意欲さえ湧かなくなるかもしれない。

一方で問題には鍵となる事柄さえ埋め込んでおけばこと足りるのだが、その文脈が解答者に与える影響も無視できない。教科書のように一見無駄のない文脈で構成された問題ではあったが、筆者の場合は返済の支払いをその都度積み立てて借金を考えるということに疑問を抱き続け、公式を問題場面に応用することに支障をきたしている。

4．2「借金返済」の文脈と学習過程

借金返済場面から始めた学習過程の特徴は借金の返済表からそこに埋め込まれた数学的操作を探求するときに状況から引き起こされる自分なりの考え方から始めていることにある。先ほ

どの服の喩えを使えば、あらかじめ与えらたひとつの服に自分の体型を合わせるのではなく、その問題状況と自分の体に合う服を探し、それを着て活動を開始するといえるであろう。自分でなじみ深い方略であれば解決に向けての意欲はより湧いてくるにちがいない。また、文脈からの影響を受けているため、形式的な操作、手順、記述、規則を学習するとき、たとえば具体的操作と現実場面のつながりが常に意識されるためにその妥当性を現実場面が保証し、しっかりとした理解力が提供される。また、現実の結果と計算結果（答え）が一致する場合、その確かさも確信できる。そして、その問題状況特有の能力も訓練される。

このように適切な文脈のある現実場面そのものから数学的構造を探求する活動を通じて RME の指摘した文脈の役割が発揮される。そして、現実場面から考える活動を豊富にするにはその場面に適切な文脈を埋め込んでおくことが必要となるであろう。

5．洞察について

問題状況に依存した学習過程がどのようなものか筆者のそれを一例として提示した。なるべく高校生が考えるように、素朴に、それまで習ってきた数学（ここでは四則演算と数列の考え方、そして等比数列の和の公式等）だけを使って探求をしたつもりである。この活動は状況に潜んでいる数学的なものを見通し、状況が語りかけるものを真摯に聞き取る姿勢で臨み、それらを自分自身が持っている数学的知識、経験に裏打ちされた数学の言葉で表現し、そこに数学的な操作を加えていく過程であるといえる。このように文脈から数学的操作を見出し、活用していくのは洞察が働くからである。そしてこの洞察はどのようにして働くのであろうか。

5．1洞察の機能

ダグラス・M・スローン（2000）は物理学者であるデービット・ボームの「洞察」についての考えを引用している。

「ボームは洞察の本質をはっきりとさせるために重要な思想家の実例を取り上げている。なぜなら、彼らにこそ洞察の本質がはっきりと見出せるからである。ニュートンの重力という概念の着想、アインシュタインの光の恒常速度という着想、それにヘレン・ケラーのことばの意味の突然の把握は、すべて、論理的演繹から得られた仮説や結論としてでなく、知覚として、イメージとしてその人にもたらされたのである」（p.157）

「問い質し（消極性）と知覚すること（積極性）という洞察の二つのはたらきがわかってくると、次にもう一つの洞察の機能が見えてくる。(中略)この洞察は、人がある仮説を立てようとしているときのように、新しいイメージや知覚を潜在的な洞察であると考えるときに現れてくるものである。イメージや知覚は、仮説として取り扱われるならば、経験を照らしはじめ、関連の希薄な諸目的を結合し、ものごとを新たな仕方で意味づけはじめる。それは洞察ないし洞察の準備として機能しはじめるのである。」(p.161)

この一つの例として3．2．5の活動、新しい視点を獲得する経験を取り上げてみたい。この活動はいわゆる「ひらめいた」ところであり、借金返済の関係式の完成が予感された瞬間であった。返済表を従来の縦からの見方から横から見ることで「新しい仕方で意味づけ」されるまでの過程を概観すると、それまで表を縦の方向に見ていた活動として、図3、図4、を作り出す活動と、表2のエクセルで数式を埋め込む活動が関連してきた。縦方向に見ただけでは数列の一般項を導き出すことは複雑で困難であり、それでも様々な活動を展開するなかで意識の根底には他の手がかりをずっと求めていた。そこで縦ではなく表を横から眺めるという視点で複雑な関係式を導き出している事例（関根,1994）に接し、3．2．5の活動で一般項から関係式に視点が変わり、複雑に見える構造を解明する手がかりをつかんだといえる。

優れた絵画を鑑賞するという経験（p.162）にならえば、もちろんその事例（関根,1994）を導き出した実際の洞察はその著者自身の洞察であり、筆者の洞察ではない。しかし、その事例を見て、その解答過程が筆者に向かって働きかけてくるのを認めるならば、筆者の知覚が活動しはじめ、筆者に欠けていた（求めていた）考え方が起こり、著者の洞察を共有し始めたと説明できる。

6．今後の課題

「借金返済の問題」に二つのアプローチで迫り、両者を比較することでその特徴を浮き彫りにしてきた。等比数列の和の「応用問題」として借金問題へアプローチする場合、まず借金問題が等比数列の和の問題として捉えられる確信を得なければならない。この捉え方は教科書から（あるいは教師から）一方的に提示される。もしそれが提示されなければ果たして解けたかどうか自信が持てない。また、借金を積み立てで考えることができるという洞察はその文脈に商習慣の仕組みを持ち込まないと難しいように思う。この

ような視点は今後、文脈と洞察の関係を詳しく調べていくことで明らかになっていく。

問題を解く際に「これならばできる」という確信を生徒に持たせてあげるにはいったいどのようにすればよいのか、具体的な教材で数学の授業を実践を通じて今後の課題としていきたい。従来高等学校の数学の授業場面では見過ごされてきたきらいがあるが、この気持ちをいまこそ取り戻す必要があるであろう。

引用・参考文献

永尾汎　ほか. (1993). 高等学校数学A. 数研出版, 71.

江崎真一　桜田四郎　他. (2000). 新計算事務 下. 暁出版, 27-39.

関根鴻. (1994). 知って得する生活数学. 講談社ブルーバックス, 38-44.

青木雄二. (1991). ナニワ金融道第一巻. 講談社, 58-59.

青木雄二（監修）. (1994). ナニワ金融道 カネと非情の法律講座. 講談社, 18

Cyber shop promise　返済シミュレーション http://cyber.promise.co.jp/hensai/

Lange Jzn,J.de. (1987).*mathemtics insight and meaning*. Utrecht:Ow&OC, 23-92

ダグラス・M・スローン. (2000). 洞察＝想像力:知の解放とポストモダンの教育, 市村尚久・早川操(監訳). 東信堂, 157-162