文字式の学習過程に関する研究

ー　事象と文字式の関連に焦点を当てて　ー

谷沢　浩明

上越教育大学大学院修士課程２年

１．はじめに

文字式の使用に消極的な生徒が学習指導の場面で見られ，この傾向は多くの研究で報告されている。考えられる一つの原因は，文字式の学習指導にある。三輪(1991)は，文字式の指導が決まり切った範囲で行われていたり，計算処理の技能の習得が中心であったりして，文字式の意味や利用についての指導が十分でないことを指摘している。そこで本論文では，中学校の式指導を振り返り，事象と文字式の関わりに焦点を当てながら生徒の学習過程に着目し，生徒の様相から指導への示唆を得ることを目的とする。

２．学習過程を捉えるための理論的観点

2.1.　表す･変形･読むの３つの過程

中学生の文字式の学習指導において，有効な方法として，三輪(1996)は文字式利用の図式を提案している。

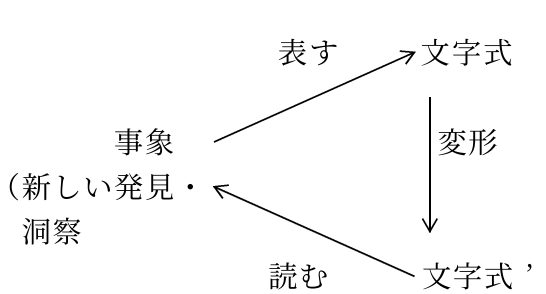


図 2-1：文字式利用の図式（三輪,1996,p2）

三輪(1996)は次のように述べている。

> この図式(scheme)は点で示される３つの状態：事象，文字式，文字式’と，線で示される３つの過程：表す，変形，読むから成り立っている。３つの過程を一廻りすることで，新しい発見や洞察が得られることが期待され，１つの到達点に立つことができると考えられる。(p.2)

この学習指導では，統合された３つの過程を一廻りし，事象についての新しい発見や洞察を得ることによって，文字式のよさや価値を実感できるなど，文字式が有効な思考の手段や伝達の方法となることが予想できる。つまり，図式を一廻りする学習によって，文字式利用の意義が得られ，事象を豊かに捉えることが可能になると考えられる。

しかしながら，実際の生徒の学習を振り返ってみると，事象から文字式に表すことができない生徒があったり，意図する変形ができない生徒や，文字式から事象を読み直すことができない生徒があった。そこで，３つの過程を促す場面や手段の開発が必要となると考える。

2.2.　文字式の概念形成

Sfard(1991)は，数学的な概念は基本的に二面で捉えることができることを述べている。構造的（対象として）(structural)と操作

的（過程として）(operational)の２つの捉え方(conception)であり，コインの両面のように自由にどちらの捉え方もできることが概念の獲得には必要である。そして，新しい概念の獲得の第一歩は操作的であり，構造的な捉え方への移行には困難が伴うことを述べている。さらに，概念の進展は内面化と凝縮化を経て具象化することを述べている。学習者は新しい概念を引き起こす過程を知り，徐々に制御し易くなる段階を通り，馴染み深いものを新しい見地から見ることのできる瞬間の大飛躍を経て，概念が進展することを述べている(Sfard, 1991, pp.18-19)。

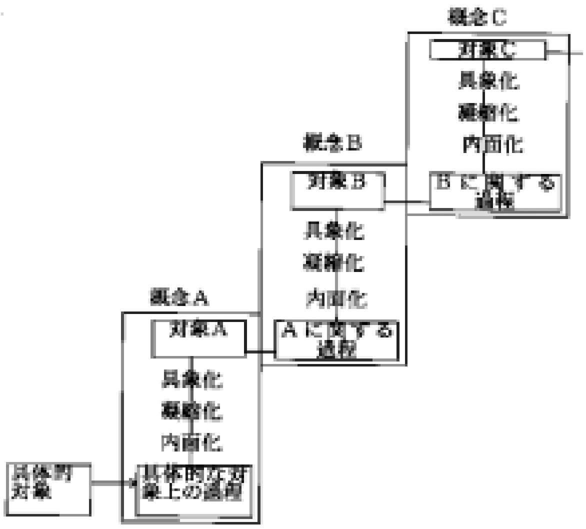


図 2-2：概念形成の一般化モデル
（Sfard,1991,p22）

中学校の学習指導の現状を振り返ると，この階層に従った指導が一見為されているように思える。しかし，文字式をかなり早い段階から対象として扱った学習指導が為されていて，文字式を指導する教師が，二面性をあまり意識しないで指導しているのではないかと考える。したがって，文字式の二面性を考慮した学習指導が必要であると考える。

これらの先行研究では，生徒の学習の様相すなわち，文字式の概念がどの様な過程を経て進展するのかが具体的に述べられていない。そこで，生徒の学習過程に着目し，生徒はどの様に学習を進展させていくのか考察する必要がある。

2.3. 学習過程を捉えるための視点

2.3.1. 数字式

Bednarz ら(1996)は，方程式の文脈を通して，数字式による関連づけの利用があったことを報告している。例えば「３人の子どもがおはじきで遊んでいる。彼らは合わせて 198 個のおはじきを持っている。George は Denis の２倍のおはじきを持っていて，Pierre は George の３倍のおはじきを持っている。それぞれの子どもはいくつのおはじきを持っているか？」という問題では，関係を関連づけることに困難があり，これを乗り越えるために子どもは数字式を活用していた。例えば，最初の値を未知量の１つとして次の数量を２倍しさらに３倍した数量の和を求めていく。すなわち最初の値を 10 と置き，次に 20，60 から 10 ＋ 20 ＋ 60 ＝ 90 と和を求める操作を繰り返していく「数による試し」を行っていた。このように子どもは，数量の間の関係の関連づけを乗り越えるために，数字式を活用しており，文字式を表す場面でも数字式を活用することが考えられる。

藤井(1998)は，数学史の考察から，数字式の中に擬変数を読むことによって文字式へ進展する可能性を述べている。

> 「文字の式」へと発展するためには,「数字の式」の中に一般性をよみとることが必要となる。「数字の式」における「準一般的」側面を「よむ」ことができるとき,「数字の式」から「文字の式」へと発展することが期待できるのである。（p.127）

数字式に一般的な側面を読むこと，すなわち数字式の中の数に擬変数を読むことによって，文字式への進展が望めると考える。例えば藤井は，平林(1996)の研究から分数の乗法の仕方について，擬変数を読むことを示している。

分数の乗法は具体的な数を用いて下のよ

うに表されている。

２／３×４／５＝２×４／３×５

この式は，２／３と４／５の場合だけでなく，任意の数でも同じことができることを示している。(p.127)

どんな分数についても，この乗法の仕方が成り立つと捉える，すなわち数字式の中に擬変数を読む時，文字を使った式に進展する可能性が指摘されていると考える。

これらの研究結果から，数字式が文字式の学習に深く関わっていることが分かる。

2.3.2.　操作的なアプローチ

文字式を構造的に捉えることの困難について Coady(1995)は，４名の生徒のインタビュー調査から示している。事例では，文字式の示す関係が把握できない生徒や，計算機による計算結果のみに信頼を置く生徒が示されている。さらにまた，一方では提示された文字式に他の文字式を代入することができても，他方の課題では数値を一つひとつ代入した計算結果から関係を把握していた生徒を報告している。さらに清水(1997)は，連立方程式の代入法を題材として，文字式を一つのまとまりとして捉えられない生徒の事例を示しており，文字式をまとまりとして構造的に捉えることの困難を示している。

文字式を構造的に捉えることには，このように困難が伴うことが分かり，文字式概念の進展には，操作的な捉え方の進展が大きく関わっていると考えられ，操作的な捉え方の様相に着目する必要があると考える。

子どもの除法概念の様相について考察した熊谷（1998）は，分析結果から操作的概念の示される場面と操作の関連，さらに複数の操作の関係に多様性と質の違いを指摘し，これらの特徴に着目することが必要であることを述べている。例えば，図を描くという操作的なアプローチを見ると，堀内さんの場合は，数値と描いた○を１つずつ対応させながら除法を捉えている様相があり,荒井君の場合は，図を描きながら 10 個をひとまとまりとして捉え始め，水沼君や新沼君の場合は，図を描くことが除法だけでなく，乗法にも繋がっている様相があった。このように，問題場面の図を描くという操作の様相に，子どもの除法の学習の特徴が示されおり，除法概念の形成のプロセスの一部分が示されている。

そこで，生徒の文字式の操作的なアプローチに着目し，その特徴を見いだすことによって，概念形成のプロセスが見いだせると考える。

2.3.3.　学習過程を捉える視点

文字式の学習過程を捉えるために，事象と文字式と数字式の３者に着目し，操作的なアプローチの可能な場面を通して，事象と文字式，事象と数字式，数字式と文字式の相互の関連についての様相をそれぞれ考察することが必要となると考える。つまり，事象と文字式の関連の操作的なアプローチの特徴にはどんな点があり,どの様なプロセスがあるのか,事象と文字式の変形の関わりはどうか，さらに，数字式がどの様に事象と文字式に関わっているのかについて，生徒の様相を考察し，活動の特徴を明らかにする必要がある。

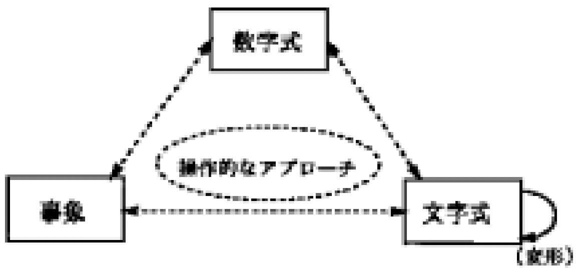


図 2-3：学習過程を捉える視点

このような視点で生徒の学習の様相を考察することによって，操作的な捉え方から構造的な捉え方へと進展する概念形成のプロセスの一部分を解明することができるものと考える。これらをまとめて表すと図 2-3 のように

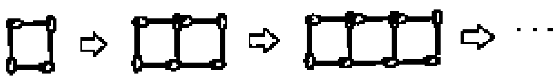
なる。事象と文字式と数字式の３者と，それらを結ぶ相互の関連を，操作的なアプローチを通して考察する。

本研究ではこうした点を解明するために，生徒に指導的インタビュー調査を実施した。

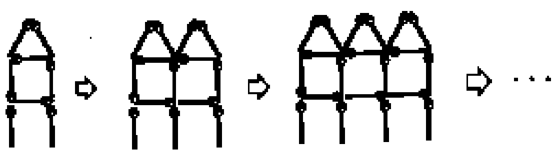
３．指導的インタビュー調査とその事例の分析

2000 年５月に行った中学１年生 38 名の事前調査から，事象と数字式の関連を分析し，記述に一般性の見られた渥本と高村という生徒と，事象と数字式が直接結びつかない記述のあった里見という生徒と，未記入であったが，自分の考えが話せる大池という生徒を抽出した。そして，７月の文字式の学習が始まって商や積の表し方を学習した段階で，抽出した４名の生徒１人ひとりに指導的インタビュー調査を行った。インタビューの様子は全て ATR と VTR で記録し, そのデータを分析，考察した。

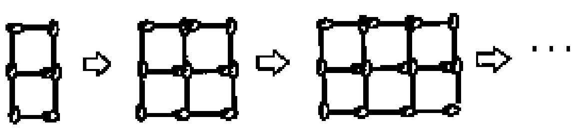
課題１． 図のようにマッチ棒を並べて正方形を作っていきます。



課題２． 図のようにマッチ棒を並べて長屋形式の家を作っていきます。



課題３． 図のようにマッチ棒を並べて正方形を２段にしていきます。



インタビュー調査では上記の３つの課題を用意し，それぞれの生徒の学習状況に応じながら本数を表す活動や，文字式を読む活動に取り組ませた。課題２と３は，課題１で表した文字式が活用できる課題として用意した。

以下にインタビュー調査の分析とその結果を述べる。

3.1　事象と文字式の関連の特徴

大池という１人の生徒を中心とした分析では，以下のような特徴があった。

(ア)文字式の示す意味の変容:事象の影響

大池の課題１におけるｘ＋ｘ＋（ｘ＋１）についての意味を，正方形が１個，２個，３個の場合と順に，数詞と図のマッチ棒の配列を照合させながら捉えている場面では，文字式の意味を変化させていることが分かる。例えば，図を指しながら「1,2,3，1,2,3，1,2,3 たす１」と発話していることから文字式の意味を（ｘ＋ｘ＋ｘ）＋１と捉えていることが分かる。

102S：これ＜ x+x+(x+1)＞は 1,2,3 がこれ＜ｘ＞で３で，1,2,3 がこれ＜ｘ＞で，1,2,3 がこれ＜ｘ＞で残りが１。これ＜最初の３個の図＞は最初が１で残りが 1,2,3，1,2,3，1,2,3 で考えているので考え方はこっち＜ 1+3x=y ＞と同じですね。

さらに彼は，マッチ棒３本から構成するユニットを指し示し，ｘと発話していることから，文字ｘに「もの」を読んでいると言える。さらに文字ｘに３を読んでいる様相が，次の発話から分かる。

104S：もし４つになったらｘ違っちゃうもんなんぁ 1,2,3,4 1,2,3,4 1,2,3,4 で１ だから４たす４たす４たす１///。

彼は「４つになったらｘが違っちゃう」と発話しており，３本から構成するユニットの３を意識していることが分かる。

このように彼は, 事象の影響を受けながら,

文字式の意味を変化させている。

（イ）変形した文字式から事象を読む困難性

大池は，課題２において２軒の家型の図から４ｘ＋｛(ｘ＋１）×２｝を立式した後自ら６ｘ＋２と変形したが，説明では，６ｘ＋２の２が図の左下の２本の部分の場合と，左上の２本の部分の場合があるように，照合する時によって２の部分が定まらないと述べ，４ｘ＋｛(ｘ＋１）×２｝としておく方が，分かりやすくて説明しやすいと述べた。

244S：1,2,3,4,5,6,　1,2,3,4,5,6 で，２，これだとうまく分かりにくいし。
245I：この６ｘ＋２だと分かりにくい？
246S：まっ，これだけだとわかりやすいんだけど，６ｘ＋２だとどうして答えが出るのって考えると，1,2,3,4,5,6 と 1,2,3,4,5,6 たす２だよというように説明できるんですけど，こっちの方が多少まぁ４ｘだから, 1,2,1,2,1,2,1,2 と残りの３，が今かける２だよというふうに説明できやすいなと思いますけどね。

次に，インタビュアーから先に表した２＋６ｘと比較を促されると，彼は，２軒の図と３軒の図を使って，図の配列と数詞を照合させながら表した過程を繰り返し，変形した６ｘ＋２と２＋６ｘが同じ結果になることに気づかなかった。

269S：1,2,3,4,5,6,7,8,910,11,12
1,2,3,4,5,6,7,8,910,11,12 本
1,2,3,4,5,6,7,8,910,11,12///

さらに彼は，課題１の正方形の場合の文字式を振り返るように促され，ｘ＋ｘ＋(ｘ＋１）と１＋３×ｘについて変形した場合を質問されたが，変形すると２つのアイディアが同じになってしまうことに「でも考え方は，こっちとまぁ多少なり違う, まぁ同じなんだよな」と発話し，違和感を示した。

大池は，文字式に対して事象の配列や表した過程をイメージしていて，形式的な変形後の文字式を新しい事象の配列に対応させることが困難な様相を示している。彼は，マッチ棒の配列の１つのアイディアに対して１つの文字式が対応し, 別のアイディアに対しては, 別の１つの文字式が対応すると捉えていて，変形した文字式から事象を読むことの困難を示している考える。

（ウ）事象の構造と文字式

大池は課題２において，２軒の家型の図の配列を指しながら「１，２　１，２　１，２　１，２」と２を４つ数え,「１，２，３　１，２，３」と３を２つ数えて，４ｘ＋｛(ｘ＋１）×２｝と文字式を表した。事象の構造を捉えて文字式を立式した（図 3-1-1)。

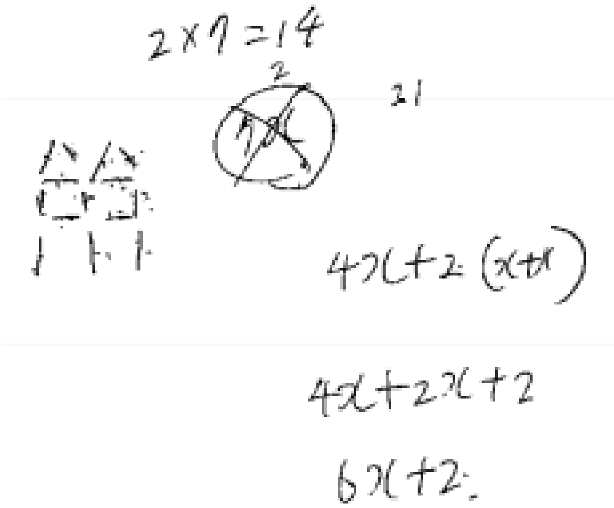


図 3-1-1：大池の記述した数字式と文字式

218S：こっち<２軒の図>と同じように表すとまず，1,2,3 あっじゃなくその前にまず（1,2,3 だから）1,2，1,2，1,2，1,2 と，まっ，家の数と同じやつがｘたす 1,2,3,4,5,6，1,2 いちにいさんよんだからまずこれが４つできますね。残りの 1,2,3，1,2,3 というのはカッコにしてｘたす１，(これもこういうふうにしてだめか，こうして･･･ｘたすこれだと４ｘだ

よな，･･･４ｘでいいのか＜数える＞やっぱり４つでいいんだ・・・）＜間＞こんな感じかな。ｘというのは家の数ですよね。

インタビュアーから式の意味を説明するように問われると，彼は２軒の図の配列と数詞の対応を繰り返しながら，２×７＝ 14 と数字式を記述し,「２かけるｘ」と発話しながら，続けて７ｘと記述し, これが２軒の本数の「答え」であると述べた。

222S：うーんとその方がなんか分かりやすそうだったから。ここでやると 1,2, 1,2, 1,2, で 1,2, 1,2, 1,2, 1,2 あっ（1,2, 1,2, 1,2, 1,2, 1,2, 1,2, 1,2, で２かける 1,2,3,4,5,6,7,//14 ということは２かけるｘ）これ＜ 7x ＞だ！これ自体が答えだ。

223I：これが答え？

彼は説明の中で，２×７=14 と数字式を立式し７ｘと文字式を表しており，数字式を媒介としていることが分かる。さらにこの場面では文字ｘに対して，２軒の場合で考えた２という数値のイメージを強く持っていて，２にｘを当てはめて文字式を立式したと考えられる。２×７＝ 14 を記述し，７ｘが答えと勘違いをしたことは，このイメージを持っていたことが原因だと考える。したがって彼はこの場面では，図の配列を指しながら事象の構造を捉え文字式に表したが，表した文字式について一般性をもった式と捉えておらず，文字式から事象を読めなかったと考える。

（エ）事象からの文字式の捉え直し

課題３において，事象での２回の数え直しから変形した文字式５ｘ＋２の意味を捉え直す様相が見られた。

大池は課題３において，１＋３×ｘ＋１＋２×ｘから５ｘ＋２と変形をし，最初は２個の図を使って左端２本を指で隠しながらランダムな意味のない数え方で説明をした。ところが「５にならない」というインタビュアーの発話から，２回の事象の数え直しを行い，文字式の意味を変容させた。

301I：どういうこと？ここ＜ 5x+2 ＞の５にならないよ。

302S：えっ？２本を消して，これ２ですよね，1,2,3,4,5,6,7,8,9,10，だから，正方形の数は，あれ正方形の数？違うなこれ，間違っている，正方形の数じゃないや。

303I：うん？これ＜ｘ＞正方形の数だよ。

304S：ここ？

305I：うん？

306S：だとすると間違っちゃうんですよ。正方形だと，1,2,3,4 だから，

307I：あっ間違えた，正方形の数じゃないよ，この形，長方形の数だよ。

308S：そうかそうか，長方形の数を２個だったら，いいんだ。５ｘ＋２でいいんだな。３つだとすると 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15, で 15 たす２で 17 でできるもんなぁ。

１回目の数え直しでは，２個の図において左端の２本は同じように指で隠し，照合の順を以前と変えた数え方をした。そして，数えた結果と代入による式の値とが等しくなることを確かめた。さらに，３個の図について，左端の２本を指で隠しながら２回目の数え直しを行った。

２回の数え直しは，最初のランダムな数え方から一般性の認められる意味のある数え直しに変化しており，数えた数値を単なる本数から一般性のある数として彼は読んだと考える。そして，代入による式の値と２回の数え直しによる数値が等しくなったことから，彼は，変形した文字式５ｘ+２について，一般性のある文字式として捉えたと考える。

これらの分析から，生徒は文字式を事象から再構成していることが分かる。事象に影響

されながら，文字式の意味を変化させている様相や，表した文字式の変形によって事象を読むことが困難な様相，さらに２回の事象の数え直しによって変形した文字式の意味を捉え直した様相から，事象が文字式と深く関わっていることが分かり，文字式の意味を何度も事象から構成していると考えられる。しかし，事象からの再構成は容易なプロセスではなく，抽出したどの生徒も数字式を媒介として活用しているように見えた。そこで以下に数字式の関わりについて，生徒の事例を見ていく。

3.2　事象と数字式の関連の特徴

（ア）マッチ棒の配列の一般性
:大池や渥本と里見の比較

マッチ棒の配列に一般性を捉えて立式した大池や渥本と，具体的な数値の示す図を常に描いてから立式した里見の，対照的な様相があった。

大池や渥本は提示された個数を超えた図をイメージして数字式を立式し，その後文字式を表した。大池は，課題１において，正方形が８個の場合は具体的な図を描かずに４＋３×７＝ 25 と総合式を立式し，さらに 100 個の場合は４＋３× 99 ＝ 301 と立式し本数を求めた。他の個数についても，「正方形の数が多くなっていくだけだからやろうと思えばいくらでもできる。」と発話した。

渥本は，正方形が８個の場合を１＋３×８＝ 25 と立式し，式の８の部分の数を変えることで 200 個，300 個，400 個，1000 個，10000 個の場合でも求められることを述べた。

36I：（前略）じゃあさぁ，他の時も求めたいと言ったらば，僕はどういうふうに式を作る？
37S：えっ，ここの数を変える。
38I：ここの数を変える。数を変えたとしたら，どんな場合でも表せるとしたら・・３個の時でしょ。８個の時でしょ。100 個の時でしょ。
39S：200 個とか 300 個の時。
40I：うん。200 個 300 個。
41S：400 とか，1000 とか，10000 とか。

これに対して，里見は事象の配列の具体的な図を描いてから数字式を立式していた。例えば，課題１においては，正方形が 100 個の場合の本数では，７個８個の時の図や式を意識しないで，正方形の図を 100 個書いてから 100 × 2 ＝ 200, 200 ＋ 101 ＝ 301 と求めた（図 3-2-1）。

図 3-2-1：里見の描いた 100 個の正方形

大池と渥本の二人の様相には，様々な個数の図をイメージすることが可能であることが示されている。そして，マッチ棒の本数をどんな数の場合でも計算できると答えていることから，立式した数字式から事象の配列を捉えている。しかし里見は，具体的な数値の図をもとにした数字式の計算を常に意識しており,マッチ棒の配列に一般性を捉えることや,表した数字式から事象を読むことがまだできない様相を示していると考える。

（イ）事象の変形と数字式

課題２において，課題１のｘ＋ｘ＋（ｘ＋１）で利用したアイディアを活用して立式することを求められた大池は，家型を崩して２回の新たな配列に並び替えてから文字式の立式を試みたが，うまく進展できなかった。

例えば彼の２回目の並び替えでは，２軒の図と２個の正方形の図を比較するようインタビュアーから促されたことを機会に，「真ん中の部分以外の上と下の部分はこれとこれ余計ですよね。」と述べながら，正方形４個と

１本に並び替えた図を描いた（図 3-2-2)。そして，(1＋ 4)＋ 3 × 3 ＝ 14 と数字式を立式し，図の右上の１本と，左側の正方形と，残りの３本で構成されたユニットから立式したことを述べた。

ところが彼は説明の途中で，数字式の中の３を丸で囲い「３が何の数になるのか分からない」と述べ，文字式を立式することはできなかった。

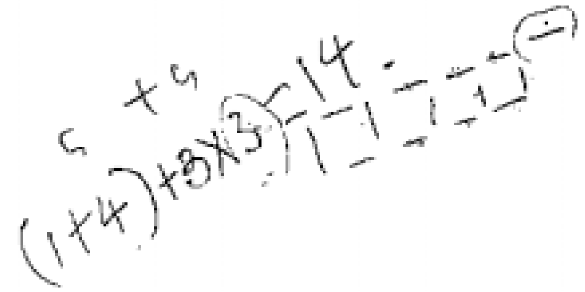


図 3-2-2：家型を崩して並び替えた２回目の図と数字式

205I：ああなるほど，並び替えたんだ。

206S：で，まずこの１はここに来て，このままではやりにくくなっちゃうし，また１を抜かしてやると，このようになゃうんで，このまた４本を取ってまたここにたすとして，ここの間がなくなる。1,2,3，1,2,3 で 1,2,3 だから３かける３をすると，三三が９で４たす１をたして合計 14 となるんですよね。もしこうするとここの３が何の数になるのかっていうのが，分からない。

この場面では，大池は，事象を変形し並び替えてから数字式を立式しており，事象を操作的に捉えている。そして，数字式の中の数を図の配列と対応させ，式の中の数に意味を捉えようとしている。媒介として数字式を活用しながら，数字式から並び替えた事象を捉え直していることが分かる。ところが，並び替えた配列に構造が読めず，事象と立式した数字式に一般が得られないと判断したことから，文字式に表すことができなかったものと考える。

（ウ）計算の影響

:計算結果から事象の捉え直し

高村の課題２におけるミスコンセプションには，事象の配列を数字式の計算結果から捉え直そうとする様相を見ることができる。

彼女は，２+６ｘと違う別のアイディアを求められると，「じゃあ８軒，８軒バージョン。」と述べ，課題１で取り組んだｘ＋ｘ＋（ｘ＋１）に，直接８を代入して家型の本数を求めようと計算を始めた。インタビュアーから課題に示されている図形に着目するよう促され，「あっ正方形じゃないとできないんだ！」と気づいたが，さらに 100 を代入して計算をした。結果が２+６ｘの時に求めた 602 本の半分の数になることから，「あっこれ倍にすればなる。」と述べ，図を見ながら「どっかでかけるを入れればなる。」と述べた。

458S：あっなんないこれ正方形じゃないと無理だ。

459I：無理なんだ。

460S：あっこれ倍にすればなる。

461I：なる？

462S：どっかでかけるを入れればなる。

うーん，どうすればなる，できるんだろう？

彼女は，ｘ＋ｘ＋（ｘ＋１）に代入した計算の結果から，家型の配列の中のどこを２倍したらよいか，見つけようとしており，計算結果に影響されて事象の構造を捉え直そうとしていると考える。

以上の分析から,事象と数字式の関連には,事象の一般的な構造を捉えて数字式に表し，表した数字式から事象を読む過程があることが分かる。これと対照的に，特定の個数を示す場面とそれを表した数字式があり，表した数字式から事象を読むことができない場合があることが分かる。そして，計算結果から表

した数字式の正誤を判断することはできるが，事象の一般的な構造を読むことができないことも分かる。また，２回の並び替えてから立式を試みていた様相から，事象の変形の過程があると考える。このように数字式を活用しても，事象の関係を捉えて，文字式に表すことには困難があり，事象と数字式の間の双方向の関わりが何度も必要であると考える。

3.3　数字式と文字式の関連の特徴

(ア)単に数字を文字に置き換えた文字式

里見は，数字式から文字式に表す時，立式した数字式の中の数を単に文字に置き換えて文字式を立式している様相を示した。

彼は，正方形８個の図と７×３＝ 21，21＋４＝ 25 の数字式からｂ×７＝７×ｂ，７ｂ＋ａ＝７ｂ＋ａと文字式を立式した。この時彼は，「４をａとして，この３個がｂとなって」と発話し，４を文字ａと置き変え，３を文字ｂと置き換えた(図 3-3-1)。

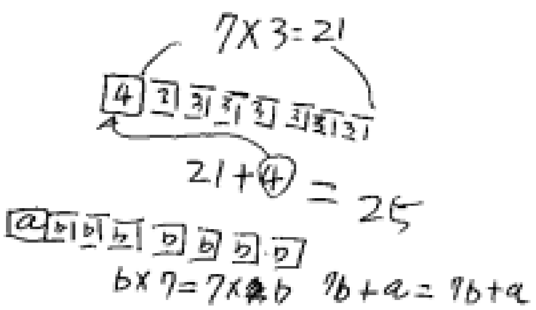


図 3-3-1：里見の記述した図と式

300S：これ＜４＞をａとして，この３個がｂ，（ｂ）となって（1,2,3,4,5,6,7,ちょうどいい。）ｂかける７でも７かけるｂでも，（読めんなちょっと，ｂでも）７かけるｂを７ｂ，７ｂ７ｂプラスａは７ｂプラスａ。

彼の発話と描いた図や式から，数字式の特定の数を単に文字に置き換えて文字式を立式したことが分かる。つまり彼は，立式した文字式について，描いた図の場面を示す数字式と変わりのない文字式として捉えており，他の場面の場合も意識した一般性をもつ文字式としては，捉えていなかったと考えられ，正方形の個数が変わるという場面の変化に，文字式が対応できていなかったと考える。

(イ)計算結果を意識した文字式

大池は，数字式から文字式を表したが，計算結果を意識している様相を示した。

彼は課題１では，３つのアイディアを説明し，文字式をそれぞれ表した。まず，最初に４＋３×７＝ 25 と数字式を立式し，４＋３×ｘ＝ｙと文字式に表した。次に，１＋３×ｘ＝ｙと文字式に表した。どの文字式も右辺にｙが示されていた。インタビュアーの質問に彼は，「ｙはこの場合答えを表す」と答えた。

45I：と，表せるんだ。やっぱりｙを使う？

46S：まぁ，今はまだｙを使っていませんけど，はい。主にｘの場合個数とかそういうものを表して，ｙやｂとかが答えとかそういう時とかが多いから，だから僕もこんなふうに使っているけど。

47I：ｙは答えを表すか。

48S：だいたいそうだっておれは，僕はそう思っています。

さらに次の場面では，正方形の重なりの個数を全体の個数から引くアイディアを用いて，数字式を一旦訂正した後，４×８－７＝２５から４×ｘ－（ｘ－１）＝ｙと表した（図 3-3-3)。

彼は，数字式から文字式を表す時「これを文字式だと４は決まった数だから，ここ＜８＞にｘを入れて引く７というのはｘから１引いた数だから，引くかっこｘ引く１にして，でいいかな。こうなります。」と発話しており，事象の関係や数字式の中の数８に擬変数

を読んでいると考える。しかしその一方で，やはり右辺にｙと表し，数字式の計算結果と文字を対応させた表し方をしており，計算結果を意識していたことを示している。数字式に擬変数を読み文字式に表すことができても，表した文字式に計算結果を意識していたと考える。

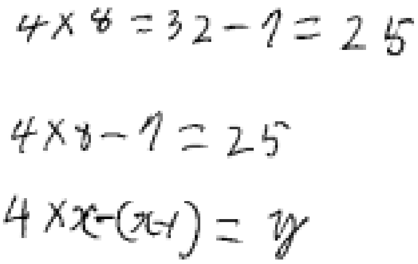


図 3-3-2：計算結果を意識した文字式

（ウ）変形した数字式からの文字式

大池と渥本は，変形した数字式から文字式を表し，数字式に事象の関係の一般性を捉えている様相を示した。

大池は，課題２において８軒の場合の本数を，どのように求めたか説明するように促されると，課題１で考えたアイディアと比較を述べながら, 8 × 8 = 64, 8 －１＝７，７ × 2 = 14，64 － 14 ＝ 50 と４つの数字式を記述した。文字式に表すことが求められると，４つの数字式から 8 × 8 －{(8 － 1)× 2}＝と総合式に変形し，続けて文字式を表した（図 3-3-3)。

146S：（まずはこれを１つの式にすると，８かける８えーとこっからどうすればいいんだ，これが全体の数だ，それからえーとー引くか，カッコ 14 だから８引く１かける２をすればいいんだな，ああだめだ，８引く１をしなければいけないから）

彼は，総合式から文字式を表す説明で，数字式の中の８を見て家の軒数と１軒に必要な本数が区別できる発話をし，総合式からすぐに文字式を表しており，数字式の中の数に擬変数を読み，文字式を表した考える。

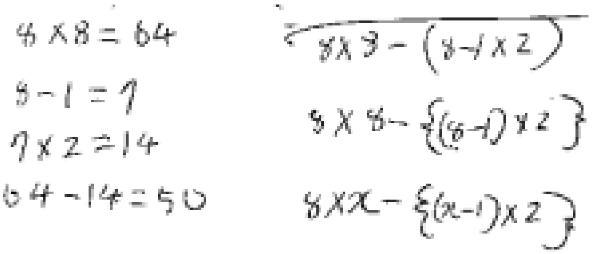


図 3-3-3：総合式から文字式

渥本は，課題２の家型の図の中に正方形を見出し，１+３ｘを利用した本数の表し方を求められた。最初３軒の家型の図から取り組み始め，８軒の場合を１+３×８+１+３×８＝ 64 と計算し，その途中で数字式が変形できることに気づき，(１＋３×８)×２と変形をした。変形を終えたところで，インタビュアーから計算結果が間違っていることを指摘されたが，彼はすぐに計算を訂正せず，３軒の図に戻って考え直し，１本の位置を変えて１+３×８+３×８+１と立式し直した。しかし，図の１本の位置を変えても影響がないことに気づき，変形した数字式から（１+３×ｘ）×２と文字式を表した（図 3-2-4)。

332I：もう一度ここやり直してみて。
333S：あれ・・・・50 で・・・・あれ，ここ間違えた。
334I：そうだ気づいたな。
335S：はい。これでこっちが１でなくて，こっちの方がいいかもしれない。・・・こっちの方がいいかもしれない，そうしないとこっちの１が,
336I：どこをどう変えたの？
337S：えっこの１をこっちへ持っていった。
338I：ああこの１を後ろに持っていったんだ。後ろに持っていった意味はどういうこと？
339S：えっと，こっちに持っていっちゃうと，まずこっちで１たす３でえーと 25 で，たすこっちが三八 24 で，あっあっ関係ないか。

340I：関係ないか。
341S：はい，間違え。

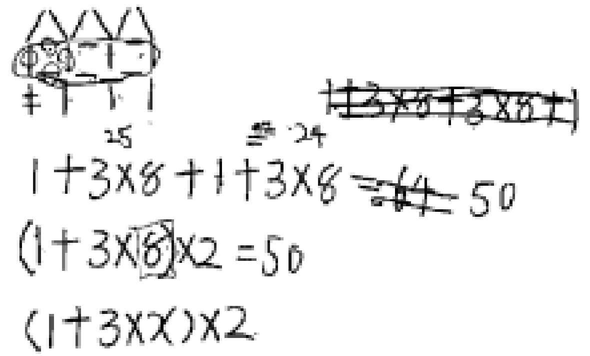


図 3-3-4：渥本の変形した数字式から文字式

渥本は，数字式の変形をしており，一旦は数字式の意味を捨象している。ところが，計算結果の間違いの指摘から，事象に戻り関係の捉え直しを行い，再度数字式を立式し直している。そして，２つの数字式の比較から変形した数字式の正当性を捉え，文字式を表している。彼は，変形した数字式を対象として扱ったと考える。

以上の分析から，数字式と文字式の関連に多様な特徴があることが分かる。表された文字式が数字式の影響を受けており，数字式を読むことが文字式の捉え方に影響を与えると考えられる。

４. 考察

分析結果をまとめると以下のようになる。

〇事象と文字式の関連の特徴
・文字式の意味は事象に影響されながら変化しうる。
・表した文字式には，事象の構造が影響しており，変形した文字式から事象を読むことの困難さがある。
・事象の構造を捉えて文字式を表しても，文字式に一般性を読めないことがある。
・文字式の意味を事象から捉え直すことによって，意味理解が進展する可能性がある。

〇事象と数字式の関連の特徴
・生徒は，事象と文字式の媒介として数字式を機能させており，事象を数字式に表す，数字式を読むのプロセスによって，事象の意味を数字式を通してまず理解をする。

〇数字式と文字式の関連の特徴
・数字式の数を単に文字に置き換えた文字式や計算結果を意識した文字式，さらに擬変数を捉えた数字式や，対象として扱った数字式があり，文字式の理解の様相を数字式から得ることができる。

生徒は，困難を伴いながら事象から文字式を再構成しており，その過程では数字式を媒介として機能させている。すなわち，事象と文字式が繋がる過程には，事象の関係を数字式に表し，数字式を通して事象を読むことの双方向から関係の一般性を捉える学習があり，数字式を文字式に表す過程には，数字式の捉え方に影響された多様な特徴がある。そして，必要に応じた数字式の変形の過程がある。

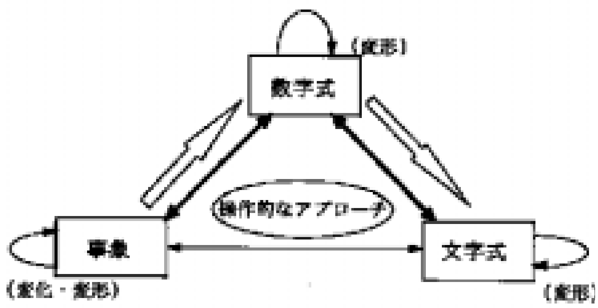


図 4-1：事象からの再構成に基づいた文字式の学習過程

したがって，数字式に表す，数字式を変形する，数字式を読むの，３つの過程を機能させた学習過程を経ながら，文字式の学習が進展し，文字式を構造的に捉え，対象として扱うことへと繋がっていくものと考える。

これらの結果から示唆される主な点は以下のものである。

中学１年生の文字式の学習指導は，数える，パターンを見つけるなどの事象での活動を重

視し，徐々に事象と文字式の関連を進めることが必要である。特に，文字式を事象から再構成する過程に数字式を機能させる過程があることから，事象と数字式の関連を重視した活動が，文字式の学習に有効であろうと考える。そして，文字式が数字式の捉え方に影響されていたことから，表された文字式の多様性を考慮した指導が必要であると考える。

これらの示唆を踏まえた授業の構成が今後の課題である。

謝辞　本研究のインタビュー調査にあたって，当該校の小川泰久校長，沼田光義教頭，川崎敏朗教諭をはじめ多くの先生方と１年Ａ組の皆さんの多大なる協力をいただきました。この場をかりて厚く御礼申し上げます。

＜主な引用･参考文献＞

Bednarz, N. & Janvier, B. (1996). Emergence and Development of Algebra as a Problem-Solving Tool: Continuities and Discontinuities with Arithmetic. N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds). *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching* (pp.117-136). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Coady, C. (1995). Students' Responses Utilising the Procedural and Structural Aspects of Algebra. In L. Meira & D. Carraher (Eds.), *Proceedings of the 19th International Conference of PME, 2,* 50-57.

Sfard,A.(1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. *Educational Studies in Mathematics. 22 (*1）, 1-36.

Sfard,A.＆ Linchevski,L.(1994). The Gains and Pitfalls of Reification: The Case of Algebra. *Educational Studies in Mathematics. 26* , 191-228.

国宗 進.（編著）.（1997). 確かな理解をめざした文字式の学習指導. 明治図書.

熊谷光一.（1998). 導入期における子どもの除法概念に関する研究:インタビュー調査をもとに.日本数学教育学会 第 31 回数学教育論文発表会論文集, 51-56.

小林志郎.（1991). 多様なアイデアを実感する授業-中学校第 1 年「文字式の利用」-. 古藤怜(編). 算数・数学科における Do Math の指導（pp.105-115). 東洋館出版社.

清水宏幸.（1997). 中学校数学における文字式の理解に関する研究: 文字式をひとまとまりと見ることの困難性に焦点を当てて.日本数学教育学会 第 30 回数学教育論文発表会論文集, 247-252.

谷沢浩明.（2000). 文字式の学習過程に関する考察 - 中学１年生のインタビュー調査より-.日本数学教育学会 第 33 回数学教育論文発表会論文集, 325-330.

平林一栄.（1996). 式について: 算数優等生を数学落第生にしないために. *新しい算数教育, 309,* 6-9.

藤井斉亮.（1998). 「文字の式」の理解に関する一考察-擬変数について-. 日本数学教育学会 第 31 回数学教育論文発表会論文集, 123-128.

三輪辰郎.（1991). 式の指導内容の概観と問題点の考察. 福森信夫,平林一栄(編). 新・中学校数学指導実例講座第 2 巻数・式.金子書房.

三輪辰郎.（1996). 文字式の方法序説. 筑波数学教育研究, *15*, 1-14.