証明の意義理解に関する調査からの一考察

梅　川　貢　司
上越教育大学大学院修士課程１年

１　はじめに

筆者は、「証明ができない」多くの生徒をわかるようにしたいといつも願いながら授業してきた。しかし、「証明がわからない」という生徒の声は残念ながら少なくならなかった。その原因を探り、証明がわかる授業を展開したいということが本研究の動機である。

図形の性質の証明がわからないという生徒の代表的な声の中には、

- **見た目で判断して何でいけないのか？**
- **当たり前のことをなぜ証明しなければいけないのか？**

のように、「証明そのもの難しさ」だけでなく「証明の意義や必要性」に関わる内容が少なくない。確かに、小学校の学習内容と中学校の学習内容とは扱う図形の性質が重なっているものが多い。既知の内容を今更「体系化を図るため」とか「命題の一般性を保証するため」と言われても、一方的な教師からの押し付けのように聞こえるかも知れない。

筆者は、今まで形式的証明が記述できることを重視した指導をしてきた。岩崎(1998)から示唆されるように、このような教授活動の繰り返しにより、生徒にとって証明が意義あるものにならなかったのではないか、そのために学習意欲を促すことができなかったのではないかと筆者は考えている。

そこで、本研究の出発として実施した『証明の意義理解に関する実態調査』の結果を分析・考察することを通して、中学生にとって証明を意義あるものとするための示唆を得ることを本稿の目的とする。

２　研究の背景

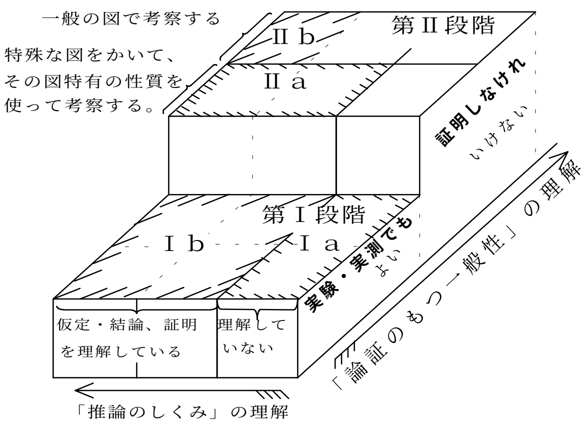
中学生の論証の意義理解に関する先行研究として、小関・国宗ら(1978～1987、2000)と國本(1996)を概観した。

<u>小関・国宗ら(1978～1987,2000)</u>は、論証の意義理解に関する発達水準として次の３つの水準を設定している。

第Ⅰ水準･･･図形の性質を説明するのに、実験・実測による方法でも十分であると考えている段階

第Ⅱ水準･･･演繹的に証明しなければならないことの意味を理解している段階

第Ⅲ水準･･･大局的（体系的）な意味も理解して証明できる段階



そして、３つの説明（実測による説明・角を集める説明・演繹的証明(1987,2000)）を用意し、それぞれについて「説明として十分で

あるか」を判断させ、その理由を記述させている。小関・国宗らが捉えている論証の意義（一般性・しくみ）を理解しているか否かを判定した結果、第Ⅱ水準まで達している生徒は中２で８％、中３で２３％であったと報告している。さらに、第Ⅰ水準から第Ⅱ水準へ高めるための授業を実施し「討論による考察が有効である」と提言している。小関・国宗らが検証した授業は、教師が生徒の認知発達を理解し、その発達段階に応じた指導計画を立案したからこそ有効であったものと理解する。Balacheff,N(1991)が述べているように、全く教師が介入しなければ生徒の議論が証明に向かわない可能性もあるし、金山(1997)が述べているように、主張の妥当性の判断を行わない「教師の介入」とそれを可能にする「状況設定」のような計画がなければ、公立中学校で討論により論証の意義理解を高めることは難しいと思われるからである。つまり、討論活動さえすれば、論証の意義理解が高まるというわけでなく、小関・国宗らのように生徒の発達段階を把握する必要があろう。

國本(1996)は、教師及び中学生を対象に証明の捉えについて調査している。三角形の内角の和について５つの説明（経験的説明・前形式的証明・形式的証明）を用意し、それぞれの説明が証明であるかどうかを判断させ、その理由を記述させている。その結果、中学３年生の約２０％しか論証の意義を理解していないと報告している。そして、論証の意義が理解されない原因の１つは「小学校と中学校との論理的思考力の育成のつながり」であるとし、証明の理解のために形式的証明の前段階としての前形式的証明を行わなければならないと述べている。

一方、小関・国宗ら(1978～1987、2000)の調査は、論証の意義（一般性やしくみ）理解において生徒がどの程度到達しているかを調査したものであり、説明や一般性を生徒がどのようなものと捉えているのかが十分には明らかではない。生徒たちは我々教師が期待する説明や一般性とは別の観点で捉えているように思われるからである。そもそも生徒たちは説明や一般性をどのようなものと捉えているのであろうか。このことは生徒の選択理由の中に表れているはずである。本稿の目的は、生徒たちの選択理由を手がかりとして、生徒が説明や一般性をどのようなものと捉えているのか、またこのことが証明の意義理解や基礎的な学力とどのような関連があるのかを明らかにすることである。

３　研究方法

3.1　調査目的

次の４点を明らかにすることを目的とする。

(1) 生徒はどのようなものを説明と考えているのか、その理由（基準）は何か。
(2) 論証の意義の１つである一般性を生徒はどのように認識しているのか。
(3) 演繹的証明の意義を理解している生徒はどのような意義を感じているのか。
(4) 演繹的証明の意義の理解と学習内容の理解とは関係があるのか。

3.2　調査対象

新潟県公立Ｋ中学校に協力して頂き、平成12 年 11 月 13 日（月）から 11 月 17 日（木）にかけて、３年生５クラス（計１７４人）を対象にアンケート調査を計画した。中学３年生を調査対象にした理由は、２年の「図形の性質の証明」を学習してから１年が経過し、学習効果が安定していると考えたからである。

3.3　調査方法

質問紙により調査した。質問紙はＢ４サイズ１枚で、左半分が「証明に関わる基礎的な内容問題」、右半分が「証明の意義理解に関わる問題」のようにレイアウトした。

筆者は、どのようなものを説明と考えているかを知るために「三角形の内角の和が１８０°である」ことの説明を判断する問題を用意した。この命題を調査問題に選んだ理由は、小学校以来、授業でいろいろな方法で説明されてきてい

る内容であるからである。そして、生徒が学習してきたと思われる次の４つの説明方法を用意した。

Ａ君の説明：正三角形の性質による説明

Ｂ君の説明：分度器を使っての実測による説明

Ｃ君の説明：紙を切って集める操作的説明

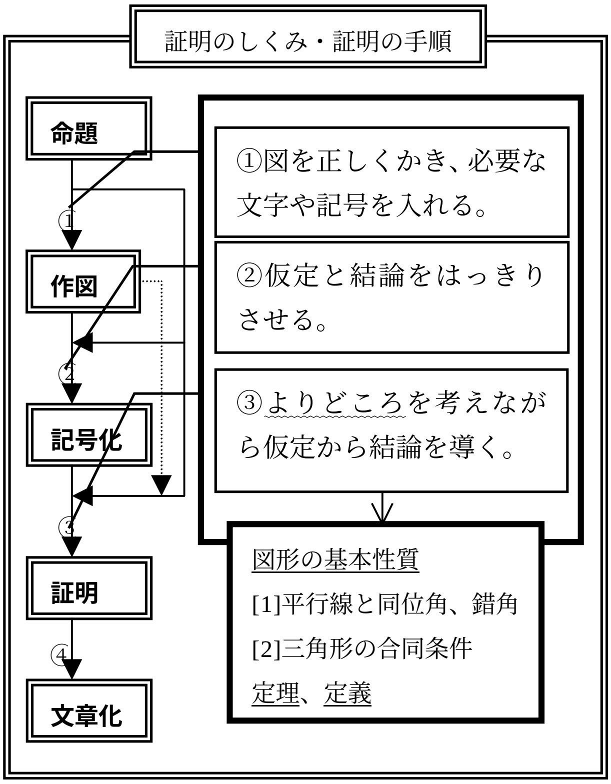
Ｄ君の説明：演繹的証明による説明

この４つの説明を相対的に評価させるために、「あなたが１番よいと思う説明」は何かを問い、その判断基準がより明確になるように「他の説明と比較して」選択理由を書かせるようにした。

また、それぞれの説明を支持する生徒の特徴を知るために、証明に関わる基礎的な内容の理解を調査する問題を用意した。証明に関わる基礎的な内容として、「命題の作図･記号化」、「図形の基本性質」、「基本的な証明」、「記号から文章化」、「図の意味」の５種類を設定した。この５種類は、平林(1958)、小関・国宗ら(1987)、教科書（H9 学図）を参考にしながら、実際に図形の性質を証明する際の構造を【図１】のように捉え、各段階で必要と思われる学力を特定した結果である。そして、この５種類を証明に関わる基礎的な内容と捉え、【表１】のようなねらいのもとに調査問題を用意した。なお、小関・国宗ら(1987)の調査問題と大きく異なる内容は、「図形の基本性質」である。この「図形の基本性質」は、次の２つの理由から図形の証明にはとても大切な内容であると考える。

(1) 「対頂角」や「平行線の性質」は、本格的な図形の論証学習の直前に、筋道を立てて演繹的に説明する学習として位置付けられていること。

(2) 「図形の基本性質」が、図形の性質を証明する際において「よりどころ（根拠）」として重要な位置にあり、十分に理解していないと証明を理解できないこと。



【図１】

類	基礎・基本	ねらい
A	**命題の作図・記号化**	**命題を「作図」し「記号化」する力と「証明の意義」理解との関係を明らかにする。**
B	**図形の基本性質**	**図形の基本性質と「証明の意義」理解との関係を明らかにする。**
C	**基本的な証明**	**基本的な「証明」ができることと「証明の意義」理解との関係を明らかにする。**
D	**記号から文章化**	**証明されたことを文章化することと「証明の意義」理解との関係を明らかにする。**
E	**図の意味（図の包摂関係）**	**図の包摂関係を理解し証明に用いることができるということと「証明の意義」理解との関係を明らかにする。**

【表１】基礎的な内容の調査問題のねらい

この５種類の内容の調査問題を５つのクラスで別々に調査した。証明の意義に関わる内容の調査問題は共通問題として全クラスで実施し、それぞれの説明を支持する生徒と基礎的な内容理解との関係に傾向が見られるか分析できるように配慮した。調査時間は３０分とした。調査協力校の教科担任が授業時間に定期テストと同じ座席でアンケート調査を行い、調査依頼者（筆者）が解答の正誤判定や分析・考察等の事後処理を行った。

4　「証明の意義」理解の調査

4.1　調査問題

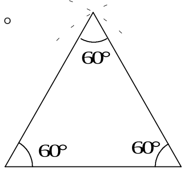
2　「三角形の内角の和は１８０°である。」

このことが正しいことを、A，B，C，D君の４人がそれぞれ次のように説明しました。４人の説明のうち、あなたが１番よいと思う説明はどれですか。解答欄に選んだ記号を書き、選んだ理由を他の説明と比較して書いてください。

A君の説明

正三角形について考えます。正三角形の１つの内角は６０°です。内角は3つありますから、３つの内角の和は、６０°＋６０°＋６０°＝１８０°となります。

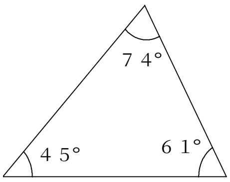
だから、三角形の内角の和は１８０°であることがいえます。



B君の説明

下の図のように適当に三角形をかきました。そして、３つの角を分度器で測ってみたら、７４°、４５°、６１°でした。

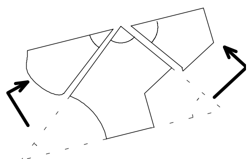
３つの角の和は
７４°＋４５°＋６１°＝１８０°
だから、三角形の内角の和は１８０°であることがいえます。



C君の説明

適当な三角形を画用紙で作りました。下の図のように、その三角形の２つの角を切り取って、3つの角を１か所に集めてみたら、ちょうど一直線になりました。

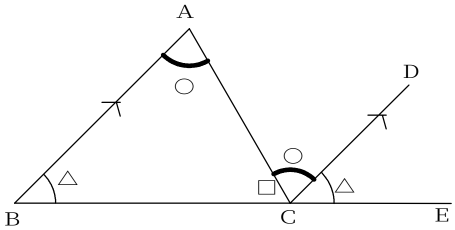
直線の角は１８０°です。
だから、三角形の内角の和は１８０°であることがいえます。



D君の説明

下の図のように、△ＡＢＣの辺ＢＣを延長し、ＣＥとします。次に、点Cを通り辺ＢＡに平行な直線ＣＤをひきます。

ＢＡ//ＣＤですから、
∠Ａ＝∠ＡＣＤ（平行線の錯角･･･○）
また、∠Ｂ＝∠ＤＣＥ（平行線の同位角･･･△）
したがって、
∠Ａ＋∠Ｂ＋∠ＡＣＢ
＝∠ＡＣＤ＋∠ＤＣＥ＋∠ＡＣＢ
＝∠ＢＣＥ＝１８０°（直線の角）
だから、三角形の内角の和は１８０°であるといえます。



4.2　調査結果

全クラスが共通に回答した証明の意義についての調査問題では、【表３】のように選択された。なお、クラス名は仮名であり、学校行事の関係で有効回答数は１４７名である。

組＼	A君	B君	C君	D君	合計
A組	6	7	12	4	29
B組	9	3	10	7	29
C組	5	4	13	10	32
D組	4	1	12	12	29
E組	7	6	8	7	28
学年計	31	21	55	40	147
%	21.1	14.4	37.7	27.4	100.0

【表３】：証明の意義の選択結果

アンケートでは選択するだけでなく、その理由を他の説明と比較しながら記述させた。Ｄ君を選択していてもその選択理由が未記入であったり、選択理由が「字がたくさんかいてあるから」のように証明の意義とは無関係な理由もあった。そこで、そのような生徒をＤ×、次のコメントのように中学校で期待している証明の意義（一般性の保証や説明性など）を評価し、実験・実測による説明の不正確さ・説明不足や循環論法が不合理であることの指摘などを書いている生徒を、Ｄ〇として、【表４】のように集計しなおした。

- Ａ君の場合、正三角形だけにげんていした考え方なので、ほかの三角形にもおなじことがいえるとはかぎらない。Ｂ君の場合、分度器を使っているために、なぜ１80°になるのか？という部分でかけている。Ｃ君も同様になぜ180°になるのか？という部分で説明不足だと思う。しかし、Ｄ君は、このことを証明しているので、4人の中で一番せっとく力のある説明だと思う。

組＼	A君	B君	C君	D×	D〇	合計
A組	6	7	12	0	4	29
B組	9	3	10	0	7	29
C組	5	4	13	3	**7**	32
D組	4	1	12	1	11	29
E組	7	6	8	**0**	**7**	28
学年計	31	21	55	4	36	147
%	21.1	14.4	37.7	2.72	24.5	100.0

【表４】：証明の意義の集計結果

次の【表５】は選択理由に記述された判断基準を一覧にまとめたものである。１人の生徒が複数の判断基準を記述しているため縦の合計は延べ人数であり、【表４】とは異なる。

分類	判断基準＼	A君	B君	C君	D×	D〇	合計
01	わかりやすさ	25	16	46		7	94
02	一般性		6	12		23	41
03	簡単	15	8	10			33
04	説明性	2		1		29	32
05	操作性			29			29
06	誤差がなく正確	4		3		12	19
07	目でみてわかる			11			11
08	必ずできる方法		4	7			11
09	計算や文字拒否	1	1	8			10
10	実測が正確		7				7
11	小学校でやった	1		3			4
12	Aは循環論法					1	1
13	たくさん字が				1		1
14	なんとなく	1					1
15	未記入	1			3		4
	計	50	42	130	4	72	298

【表５】判断基準の分類表

次の【表６】は、生徒が書いた選択理由から、Ａ・Ｂ・Ｃ選択者の演繹的証明へのコメントを抽出し、集計したものである。

分類	演繹的証明へのコメント	A君	B君	C君	合計
01	わかりにくい	15	10	32	57
02	難しい	2	4	14	20
03	めんどうくさい	7	1	4	12
04	複雑な計算・計算式	1	1	5	7
05	説得力がない		2		2
06	他の人に伝わりにくい			2	2
07	見るのがいや			1	1
08	ノーコメント	6	4	4	14
	計	31	22	62	115

【表６】演繹的証明の捉え

4.3　考察

最も多くの生徒に支持された説明は、Ｃ君の操作的説明であり、有効回答の 37.7%である（表４）。紙を切って実際に３つの角を合わせる実験（操作）的な説明が１番よい説明であると考えている生徒が多い。その判断基準はわかりやすさであり、操作性や視覚的に理解できるという特徴がある。(表５)

Ａ・Ｂ・Ｃ選択者に共通して１番多い判断基準は、わかりやすさ(表５分類 01)である。わかりやすさの意味はＡ・Ｂ・Ｃ選択者によって違いがある。Ａ君選択者は「簡単でわかりやすい」、Ｂ君選択者は「簡単でわかりやすい、分度器は正確だからわかりやすい」、Ｃ君選択者は、「操作し目で見てわかる」というわかりやすさである。わかりやすさの質は様々であるが、説明はわかりやすいものがよいということが重要な判断基準である。これを裏付けるように、演繹的証明以外を支持した生徒たちの半数以上が、演繹的証明は「わかりにくく、難しく、面倒なもの」であると捉えている（表６）。一方、Ｄ君の演繹的証明を選択した生徒も「根拠がはっきりしていてわかりやすい」と７名がコメントしている（表５分類 01）。このことから、どの説明に対しても、わかりやすい説明がよい説明であると捉えていることが明らかになった。

説明性（表５分類 04）についてＤ君選択者の２９名が記述している。「Ａ・Ｂ・Ｃ君の説明はなぜそうなるのかがわからない」、「Ｄ君の説明はなぜ１８０°になるのかがわかるから」というコメントである。説明の認識という観点から、わかりやすさを第１の判断基準にする Ａ・Ｂ・Ｃ 君選択者と説明性を第１の判断基準とするＤ君選択者との違いがある。

一般性（表５分類 02）について、Ａ君選択者は誰も記述していない。Ｂ・Ｃ君選択者の１８名は全てＡ君の正三角形の性質を利用した説明に対するコメントであった。つまり、特殊な正三角形による説明は一般的でないことを指摘しながらも、任意の「適当」な１つの三角形で成立すれば一般性をもつと認識し

ている。このように一般性の認識という観点でも違いがある。換言すれば、説明性や一般性の認識は、我々数学教師と生徒との間にギャップがあるということである。

演繹的証明の意義を理解している生徒は、有効回答の 24.5%である（表４）。そして、演繹的証明をよいとする判断基準は、一般性(23 名)よりも説明性(29 名)が多い（表５）。つまり、他の説明との比較をしたとき、一般性よりも説明性という基準の方がはっきりとした違いとして意識されている。実験・実測による方法を一般性がないと指導するよりも説明とは何かという指導を行う方がよいということかもしれない。

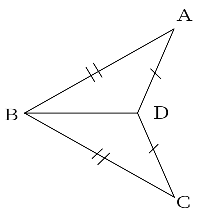
５　証明に関する基礎的な内容の理解と証明の意義理解との関係

5.1　基本的な証明問題と証明の意義

5.1.1　調査問題

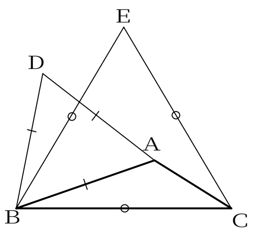
証明問題を２題用意して調査した。その２題は次の【図２】のような基本的な証明問題(1)と、基本的ではあるがやや難しい証明問題(2)である。

1　右の図で、ＡＤ＝ＣＤ、ＡＢ＝ＣＢ　ならば
∠ＡＢＤ＝∠ＣＢＤ
であることを証明してください。



証明

2　右図のように、△ＡＢＣの２辺ＡＢ、ＢＣをそれぞれ１辺として正三角形ＡＢＤ、ＢＣＥをつくります。
このとき、ＡＣ＝ＤＥであることを証明してください。



証明

【図２】基本的な証明問題とした調査問題

5.1.2　調査結果

難易度の違う２つの基本的な証明問題を用意した理由は、「証明の意義」がどの程度の証明問題ができるようになったときに理解されるようになるのか、或いは「証明の意義」理解は証明問題ができることと無関係であるのかをはっきりさせるためである。そこで、次のような誤答部分を含んでいても、証明の仕方を理解しておりその方針が正しいと認められる回答を△、完全な正答を○、それ以外を×とした。

1 △	・合同条件が「２つの辺と他の１辺が等しいので」と書いてあり、合同条件が間違っている。 ・「ＢＤ＝ＢＤ（合同)」と書いてあり、理由が間違っている。 ・三角形の合同条件が書かれていない。 ・「≡」を「＝」と書いてしまっている。
2 △	・「∠DBE＝∠ABC」の理由が不十分である。 ・等しい辺･角の要素とその理由をすべて挙げた所で終わっている。証明が途中である。 ・三角形の合同条件が書かれていない。

この判定基準により、基本的な証明問題の結果と証明の意義理解との関係を、次の【表７】のようにまとめた。

分類	分類＼	A君	B君	C君	D×	D○	合計
01	1：×、2：×	1	1	0	1	0	3
02	1：△、2：×	2	1	2	2	0	7
03	1：○、2：×	1	0	1	0	1	3
04	1：△、2：△	0	0	3	0	1	4
05	1：○、2：△	0	2	2	0	1	5
06	1：○、2：○	1	0	5	0	4	10
合計		5	4	13	3	7	32

【表 7】基本的証明問題と証明の意義理解

5.1.3　考察

演繹的証明の意義を理解していると判断できる生徒（D○）は、基本的な証明問題が完全に正答でなくても、証明の仕方が理解されており、その方針が正しいという結果が表れている（分類 03,04,05,06）。また、Ａ・Ｂ・Ｃ君選択者は分類 01 と 02 に７名おり、基本的な証明問題を記述できる学力と証明の意義理解とは無関係ではないように思われる。

基本的な証明問題が２問とも正解でありながら、演繹的証明の意義を理解していないと思われる生徒の選択理由に注目してみる。

分類 06 でＡ君を選択した生徒の選択理由は、「一番簡単だし、楽だから。」とだけしか

書かれておらず、証明の意義を理解していない。分類 06 でＣ君を選んでいる５人の生徒たちの選択理由は、（＿＿は筆者）

- 他の説明は全て計算をしていて、少しむずかしいと思う。でも、C君の説明は実際に三角形を切って目で確かめるのでわかりやすいと思う。
- 百聞は一見にしかずで、私だったら、目の前でこういうふうに説明してもらったら分かりやすいと思う。説明って言うくらいなら、やっぱり分かりやすいのが一番だから(って数学的な答えじゃないな)。A，B，C，Dのどれも見ればなるほどなあと思えるけど、A，B，Dは計算しなくちゃいけないから、時間がかかるし(←私的にですよ)めんどうに思えてくる。それと、小学校の頃こうやって説明してた先生がいたような気もするのでコレにしてみました。

のように 4.3 で述べたキーワード「わかりやすさ」が共通して述べられていた。基本的な証明問題を完全に解くことができるのに演繹的証明の意義を理解していない。

分類 06 でＤ君を選択している４人の生徒たちの選択理由は、

- A君の説明は、正三角形でしか通用しないものだから。B君の説明は、角度をはかる時に誤差が出やすいから。C君の説明は、どうしてそうなるのかが分からないから。D君の説明は、ちゃんと根きょがあって分かりやすいから。

のように、証明がもつ一般性や演繹性を評価し実験・実測の特徴を指摘しており、分類 06 のＡ・C 君選択生徒と明らかに違いがある。しかし、実際に回答された証明の記述を比較したが、明確な証明記述の違いを特定することはできなかった。

5.2　作図・記号化と証明の意義

5.2.1　調査問題

次の(1)～(4)の４つの命題について作図し記号化する問題である。

(1)　正三角形の３つの角は等しい。
(2)　二等辺三角形の頂角の二等分線は、底辺を垂直に二等分する。
(3)　直角三角形の直角でない２つの角を加えると、９０°になる。
(4)　１つの直線に垂直な２つの直線は平行である。

(1)と(2)は、教科書で扱われる命題であり、生徒にとっては既習事項である。(3)と(4)は教科書(Ｈ９学校図書)では扱われない命題であり、命題を読解し図をイメージできないと作図・記号化はできない。

5.2.2　調査結果

このアンケートの結果を次の【表８】のように集計した。なお、該当者がいない分類は削除した。また、分類の番号は(1)～(4)の各問題に優劣をつけずに、不正解の割合が高い順にした。従って、表の下ほど正解の割合が高いことになる。なお、分類表の○△×は次のような判定基準である。

○：作図と記号化とも正解
△：作図が正答で記号化が不正答
×：作図と記号化とも不正解

分類	(1)(2)(3)(4)	A君	B君	C君	D×	D○	合計
01	△ × × ×	1	3				4
02	× × △ ×	1					1
03	○ × × ×			1		1	2
04	△ △ × ×					1	1
05	△ × × △			1			1
06	△ × △ ×		1	1			2
07	○ × × △	1					1
08	○ × ○ ×	1					1
09	○ △ ○ ×			1			1
10	○ × △ △	1		2			3
11	△ △ △ △			**1**			1
12	○ × ○ △		1				1
13	○ △ △ △	1	2	4			7
14	○ △ ○ △			1			1
15	○ × ○ ○					1	1
16	○ △ ○ ○					1	1
合計		6	7	12	0	4	29

【表 8】作図・記号化と証明の意義理解

次の表は作図のみの正答率をまとめたものである。

作図内容	割合	正答率(%)

(1)**の正三角形の作図**	28/29	96.6
(2)**の二等辺三角形の作図**	25/29	86.2
(2)**の頂角の二等分線の作図**	12/29	41.4
(3)**の直角三角形の作図**	20/29	69.0
(4)**の垂線の作図**	17/29	58.6

【表 9】作図の正答率

5.2.3　考察

作図が不正答で記号化が正答であったものは皆無であった。つまり、仮定と結論をはっきりさせるためには、命題から作図する力が必要不可欠であるということである。

【表９】からわかることは、正三角形や二等辺三角形の作図はほぼできるが、角の二等分線や垂線の作図が半数前後の生徒が作図できなかったということである。

【表８】の分類 04 の生徒は、(1)と(2)の記号化が次のように不正答であった。

(1)の記号化「△ABC で3つの辺の長さがすべて等しいならば∠A＝　B＝　C である。」

(2)の記号化「△ABCで　Aの垂直二等分線をすると、底辺を垂直に2等分することができる。」

また、同生徒はＤ君の説明を選択した理由として説明性と一般性について述べており、演繹的証明の意義を理解していると判断できる。従って、この生徒は作図や記号化の定着は不十分であるが、演繹的証明の意義を理解している生徒である。

分類 11,13,14 は命題から作図ができるが記号化は不完全な生徒たちである。この生徒たちは全てＡ・Ｂ・Ｃ君の説明を選択しており、証明の意義を理解していない。したがって、作図がほぼ完璧にできることと証明の意義理解との関係は認められない。

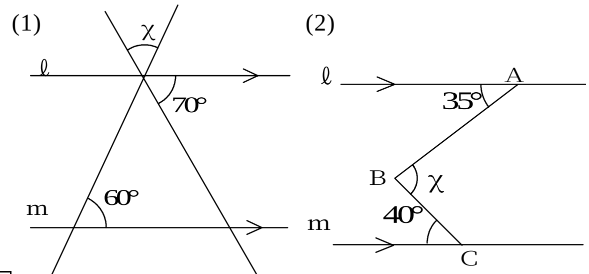
分類 15,16 の２人の生徒は、演繹的証明の意義を理解している生徒である。この２人の生徒とＤ○以外の他の生徒との明らかな違いは作図･記号化の問題の(3)(4)が正答か否かである。(3)(4)の問題は、２年時の学習でない内容である。つまり、なじみの薄い内容の命題であっても、命題を理解し作図や記号化ができる生徒は、演繹的証明の意義を理解している可能性が高い。

5.3　図形の基本性質と証明の意義

5.3.1　調査問題

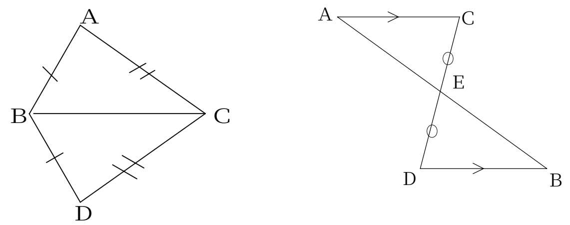
図形の基本性質の調査問題は、次のような問題である。

1　次の(1)、(2)の図で、２直線ℓとmは平行です。∠χの大きさを求めてください。

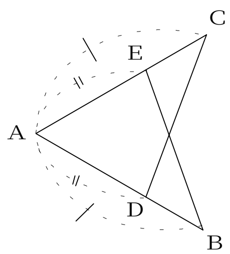


2　右の(1)〜(3)の図で合同な三角形を記号を使って表し、合同条件を書いてください。

(1)ＡＢ＝ＤＢ、ＡＣ＝ＤＣ(2)ＡＣ//ＤＢ、ＣＥ＝ＤＥ



(3)　ＡＢ＝ＡＣ、ＡＤ＝ＡＥ



5.3.2　調査結果

調査結果を次の【表 10】のようにまとめた。なお、判定基準は次のようにした。また、調査問題それぞれの正答率を【表 11】のようにまとめた。

1	**○：正答** **×：不正答**
2	**○：合同の式と合同条件とも正答** **△：合同の式が正答で合同条件が不正答（“それぞれ”がない）** **△：合同の式が不正答（対応順・≡・△等の間違い）であるが合同条件が正答** **×：合同の式と合同条件とも不正答**

分類	1　2 (1)(2)(1)(2)(3)	A君	B君	C君	D×	D○	合計
01	× ○ × × ×	1	**1**				**2**
02	○ × × × ×		**1**	1			**2**
03	○ ○ × × ×	2		1		1	**4**
04	× ○ ○ △ ×	1					**1**
05	○ ○ △ × ×	1		1			**2**
06	○ × △ △ △			1			**1**
07	× ○ △ ○ △	1					**1**
08	○ ○ △ △ ×	1		1			**2**
09	○ ○ × △ △	1					**1**
10	○ ○ △ △ △		**1**	1			**2**
11	○ ○ △ ○ △			1			**1**
12	○ ○ ○ ○ ○	1		3		6	10
合計		9	3	10	0	7	29

【表 10】図形の基本性質と証明の意義理解

	○	△	○+△	%
1(1)**同位角**	25		25	86.2
1(2)**錯角**	26		26	89.7
2(1)**三辺相等**	11	9	20	69.0
2(2)**二角夾辺相等**	12	7	19	65.5
2(3)**二辺夾角相等**	10	6	16	55.2
(1)∩(2)∩(3)	10	5	15	51.7

【表 11】図形の基本性質の正答率

5.3.3　考察

演繹的証明の意義を理解している生徒（D○）は７名であり、【表 10】の分類 03（○○×××）の１名と分類 12（○○○○○）の６名である。分類 03 の生徒は、合同式を記号＝でかき、合同条件は３問とも未記入であった。そして、証明の意義に関するコメントは、「わかりやすいから」と記述している。同位角・錯角の問題が正答であったことを合わせて考えてみると、D君の説明は同位角や錯角の理由がしっかり述べられているからわかりやすいとコメントしているものと考えられる。分類 12 のD○（６人）の生徒も、同位角や錯角を用いた説明が分かりやすく信用性があるとコメントしている。

分類 12 のC君選択生徒（３人）は、

- A君やB君、D君は頭を使わなければならない。それに比べてC君の説明なら、きっと小学生でもわかりやすいと思う。
- 図を使っているので分かりやすいしだれでも理解できると思う。計算式もないので分かりやすい。

のように、「小学生など誰もがわかりやすい」説明がよいというコメントであった。従って、この３人の生徒は、「自分だけでなく全ての人が理解できる説明がよい説明である。」と考えているものと思われる。

演繹的証明を理解していない生徒は図形の基本性質の理解が分散し不安定である。

演繹的証明の意義を理解するには、図形の基本性質を理解していることが必要条件である。

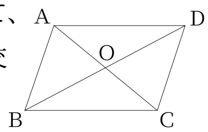
5.4　記号から文章化と証明の意義

5.4.1　調査問題

1　A君はある「ことがら」を次のように証明した。

（証明）

平行四辺形ＡＢＣＤにおいて、２つの対角線ＡＣ、ＢＤの交点をＯとする。



△ＡＢＯと△ＣＤＯにおいて、

（中略）

したがって、ＯＡ＝ＯＣ、ＯＢ＝ＯＤ

A君はどのような「ことがら」について証明したのでしょうか。次のア〜カの中から１つ選び、記号を○で囲んでください。

ア　平行四辺形の向かい合う２組の辺はそれぞれ平行である。

イ　平行四辺形の向かい合う２組の辺の長さはそれぞれ等しい。

ウ　平行四辺形の向かい合う２組の角の大きさはそれぞれ等しい。

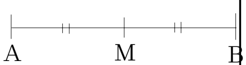
エ　平行四辺形の２つの対角線の長さは等しい。

オ　平行四辺形の２つの対角線は互いに他を二等分する。

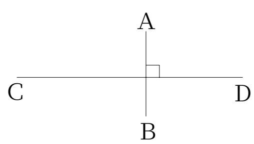
カ　平行四辺形の２つの対角線は直角に交わる。

2　次の（　）の中にあてはまる用語をかき入れてください。

(1)　右図のように、線分ＡＢでＡＭ＝ＭＢとなるとき、点Ｍを線分ＡＢの（　　　　　　）という。



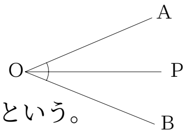
(2)　右図のように２直線ＡＢ、ＣＤが交わって、ＡＢ⊥ＣＤで



あるとき、ＡＢはＣＤの

（　　　　　　　）という。

(3)　右図のように、∠ＡＯＰ＝∠ＢＯＰであるとき、ＯＰを∠ＡＯＢの（　　　　　　　　）という。



5.4.2　調査結果

この調査問題では、何を証明したのかを選択肢から選んだり、正確な用語を書いたりすることを求めているので、完全に正答（○）か否か（×）で正誤判定をした結果、次の【表12】のようになった。

分類	1 2 (1)(2)(3)	A君	B君	C君	D×	D○	合計
01	××××			1	1		2
02	×××○		1				1
03	×○××	1		2		2	5
04	×○×○	1		2		1	4
05	×○○×			1			1
06	×○○○			2			2
07	○××○	1					1
08	○○××					1	1
09	○○×○	1		2		1	4
10	○○○×					1	1
11	○○○○			2		5	7
合計		4	1	12	1	11	29

【表12】記号から文章化と証明の意義理解の関係

5.4.3　考察

【表12】の分類11(○○○○)の生徒は７名であり、そのうち５名が演繹的証明の意義を理解している生徒であった。他の２名はともにＣ君の操作的説明を１番良いとしており、「切って１か所に集めさえすればいいのでわかりやすい」のように、キーワードであるわかりやすさを選択理由にしている。

分類10（○○○×）の１名の生徒は、2(3)「二等分線」を「垂直二等分線」と答えてしまった生徒であり、ケアレスミスであったとも考えられる。分類08（○○××）の生徒は、2(2)(3)とも無答であるが、証明の意義に関わるコメントに一般性を記述しており、用語を書けないが証明の意義を理解していると思われる。分類03（×○××）の生徒も、証明の意義に関わるコメントに誤差の指摘や一般性について記述しており、証明の意義を理解していると思われる。

このように、演繹的証明の意義を理解している生徒は、【表12】の分類03、04、08、09、10、11に分散しており、記号から文章化する学力と証明の意義理解との明らかな関係は見いだせない。しかし、演繹的証明の意義を理解している生徒は、文章化が正確にできる生徒の中に多い。

5.5　図の意味と証明の意義

5.5.1　調査問題

1①平行四辺形の定義、②ひし形の定義

2平行四辺形とひし形の包摂関係の利用

といった問題である。

5.5.2　調査結果

次のような判定基準で、【表13】のように集計した。

1	○：正答 △　：定義が不十分（“２組の”、“それぞれ”がないもの） △　：性質も定義に含めているもの ×：不正答
2	○：正答（わかる、ひし形は平行四辺形の仲間だから） △：わかる理由が不十分な場合 例．前に習ったから ひし形の性質だから ×：不正答（わかる理由が間違っている、わからない

分類	1 2 (1)(2)	A君	B君	C君	D×	D○	合計
01	×××	2	1	1			4
02	××△	1					1
03	×△×					1	1
04	×○×	1					1
05	△××		2	2		2	6
06	△×△			1		2	3
07	△△×	2		1			3
08	△△△		2				2
09	△△○					1	1
10	△○△	1	1				2
11	△○○					1	1
12	○××			1			1
13	○×△			1			1
14	○△○			1			1
合計		7	6	8	0	7	28

【表13】図の意味と証明の意義理解

5.5.3　考察

演繹的証明の意義を理解している７名の生徒は、【表 13】から分かるように分散している。図の意味（包摂関係）と証明の意義理解との関係は見いだせない。

６　おわりに

生徒たちの選択理由の記述から、よい説明と考える判断基準は「わかりやすさ」であることが明らかになった。これは演繹的証明の意義を理解していると思われる生徒も、そうでないと思われる生徒にも共通に見られる特徴である。ただ、わかりやすさを判断する基準が質的に異なるということであった。従って、演繹的証明の意義を理解させるためには、それが「わかる」ものとして認知される必要がある。５つの基礎的な学習内容の中で、基本的な証明問題・図形の基本性質と演繹的証明の意義理解との間にある程度の相関があることが予想された。今後、この両者の関係をさらに明確に特定するための調査が必要である。

生徒たちの「一般性」の認識は様々であり、一般性を意識しない生徒、任意の「適当な」１つが成立すれば一般性があると考える生徒、全ての場合を満たさなくてはならないと考える生徒が１つの教室に混在することが明らかになった。また、「説明」の認識も然りであった。例えば、演繹的証明の意義を理解している生徒は他の説明との違いを、一般性よりも説明性に求めた。つまり、演繹的証明の意義を理解している生徒の特徴は、Hanna,G(1995)が述べている証明がもつ説明性を理解しているということが明らかになった。証明がもつ説明の機能を重視する証明指導が証明の意義理解において有効である可能性が示唆された。

２年図形の証明を学習した中学３年生でも「操作し目で見てわかりやすい」説明を１番よい説明と考える生徒が多い調査結果を視覚的理解の志向性と捉えるならば、國本(1996)が提言する前形式的証明がやはり必要であるように思われる。前段階の指導については、古藤(2001)も「*Action Proof* により論証の考えの意義を理解させる素地指導を行う」ことの必要性を述べ、小関(2000)も「実験的『証明』、前形式的証明を中学校で重視したい」と述べている。このように、複数の研究者が論証の意義理解のためにその前段階の指導が必要であると主張していることにも注目し、その有効性について検証する必要がある。

＜引用・参考文献＞

Balacheff, N. (1991). The benefits and limits of social interaction: The case of mathematical proof. A.J.Bishop *et al.* (eds.), Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching(pp.175-192). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Hanna, G. (1995). The role of proof in mathematics education. Lecture Note at the Tagung fur Didaktik der Mathematik in Kassel, Germany. (磯野正人訳. (1996). 数学教育研究, 11, 165-168. 上越教育大学数学教室.)

一松信ほか. (1998). 中学校数学２. 学校図書.

平林一榮. (1958). 論証幾何学習の構造. 日本数学教育学会誌. 第４０巻. 第５号.

岩崎浩. (1998).「メタ知識」を視点とした授業改善へのアプローチ－「指示の文脈」と「記号体系」との間の相互作用－. 全国数学教育学会誌. 数学教育学研究. 第４巻. 83-103.

金山光宏. (1997). 生徒の証明の捉え方の変容を促す証明指導の研究：学級の合意作りとしての証明をめざして. 数学教育研究. 12. p.71-80.上越教育大学数学教室.

古藤怜. (2001). Action Proof について－７の倍数の探求過程を通して－. 尚数会研究集録. 第 31 集. pp.5-6

國本景亀（研究代表者）. (1996). 空間直観力と論理的思考力を育成するための教材開発と指導法の改善. 平成６～７年度科学研究費補助金　一般研究（Ｃ）. 課題番号06680256 研究報告書.

国宗進ほか６名. (1984). 図形における論証指導について－（第７次報告）－. 日本数学教育学会誌. 第 66 巻. 第５号. pp.9-18.

国宗進ほか５名. (1986). 図形における論証指導について（第８次報告）－その１・論証の意義－. 日本数学教育学会誌. 第 68 巻. 第９号. pp.22-27.

国宗進. (2000). 図形の論証に関する理解度の変化. 日本数学教育学会誌. 第 82 巻. 第３号.

小関熙純・家田晴行・春日龍郎・国宗進・小寺隆幸・中西知真紀・山下国広. (1978). 図形における論証指導について（その１）. 日本数学教育学会誌. 第 60 巻. 第１号. pp.12-19.

小関熙純・家田晴行・春日龍郎・国宗進・小寺隆幸・中西知真紀・山下国広. (1978). 図形における論証指導について（その２）. 日本数学教育学会誌. 第 60 巻. 第３号. Pp.9-18.

小関熙純・家田晴行・春日龍郎・国宗進・榎戸章仁・中西知真紀・山下国広. (1979). 図形における論証指導について（その３）. 日本数学教育学会誌. 第 61 巻. 第３号. pp9-19.

小関熙純ほか６名. (1980). 図形における論証指導について－第３次報告（その１）－. 日本数学教育学会誌. 第 62 巻. 第３号. pp9-15.

小関熙純ほか６名. (1980). 図形における論証指導について－第３次報告（その２）－. 日本数学教育学会誌. 第 62 巻. 第５号. pp2-10.

小関熙純ほか７名. (1981). 図形における論証指導について－第４次報告（その１）－. 日本数学教育学会誌. 第 63 巻. 第 11 号. pp3-10.

小関熙純ほか７名. (1982). 図形における論証指導について－第４次報告（その２）－. 日本数学教育学会誌. 第 64 巻. 第１号. pp3-14.

小関熙純ほか８名. (1982). 図形における論証指導について－第５次報告－. 日本数学教育学会誌. 第 64 巻. 第９号. pp2-14.

小関熙純・家田晴行・国宗進. (1984). 図形認知の発達研究―「平行四辺形」概念の形成過程について―. 日本数学教育学会. 第６６巻. 臨時増刊. 数学教育学論究. Vol.41・42. pp.3-23.

小関熙純編著.(1987). 図形の論証指導. 明治図書.

小関熙純. (2000). Ⅲ観察、操作や実験を通しての図形指導―特に、図形の論証指導―. 第 82 回全国算数・数学教育研究（千葉）大会講習会テキスト. pp.21-27

中西知真紀・国宗進ほか７名. (1983). 図形における論証指導について（第６次報告）. 日本数学教育学会誌. 第 65 巻. 第３号. pp.13-24.

中西知真紀ほか５名. (1987). 図形における論証指導について（第８次報告）－その２、証明の難しさの分析－. 日本数学教育学会誌. 第 69 巻. 第１号. pp.22-28.