

動性と静性とから見た数学的概念における隠喩の働き

高 橋 等
上越教育大学

児童・生徒が数学的知識を構成する様を明らかにすることは、算数・数学教育における研究課題の一つである。高橋は一連の研究(高橋, 1996a, 1996b, 1998; Takahashi, 1998; 高橋, 1999; Takahashi, 2000; 高橋, 印刷中)により数学的知識の比喩性のもつ能動性に着目し、構成の様を明らかにしてきた。この一連の研究では Polanyi, M. と Prosch, H. (例えば Polanyi & Prosch, 1975) と Lakoff, G., Johnson, M. および Neff, R. (例えば Lakoff, 1993) とを理論的な背景とした視点から、児童・生徒の数学的知識の構成の能動的な様態を解釈し、一定の成果を得た。ところで、能動性に価値を置くとはいえ、児童・生徒が構成する心的構造の静的な性格に力点を置く立場からの知見にも着目する必要があるだろう。

本研究の目的は、数学的知識の構成における動性と静性とから、比喩、特に隠喩の働きを明らかにすることである。

本研究では、上記高橋の一連の研究でもしばしば取り上げてきた Sfard, A. の理論(Sfard, 1991, 1994, 1997)を主に考察する。

論を次のように展開する。最初に、幾つかの用語の規定を行う。第二に、Sfard(1991)が論じている概念の二重性を考察し、第三に、Sfard(1991)と Piaget(1966)との対比を行う。第四に、Sfard(1994, 1997)を取り上げ、概念の二重性と隠喩とを考察する。第五に、Sfard(1994, 1997)において隠喩に関する理論の背景である Lakoff, G., Johnson, M. およ

び Neff, R. の理論(Johnson, 1987; Lakoff, 1993; Lakoff & Johnson, 1980; Neff, 2000)を考察し、新たな視点から Sfard (1994, 1997)の理論の発展を図る。最後に第二から第五までを基に本研究の知見を示す。

1. 幾つかの語の規定

高橋は一連の研究(高橋, 1996a, 1996b, 1998; Takahashi, 1998; 高橋, 1999; Takahashi, 2000; 高橋, 印刷中)において、知識なる語によって数学など学問の心的構成物を言い表し、‘知ること’或いは‘知る活動’なる語によって構成過程を言い表してきた。哲学事典の知識の項目では、知識を確実にして根拠のある認識をいう(哲学事典, 1971), とある。認識の項目では認識を最も広い意味での知識のこと(哲学事典, 1971)とし、認識が知識を含むとしている。本研究では、上記哲学事典の見解を踏まえ、認識は知識を含み、知識は確実さを伴うとする。

知識ないし認識と同様の語として概念がある。概念は哲学事典には、人間の思考活動の基本的な形態であり、人間は事物についての概念を形成し、これを使用することによって、事物の本質的な特徴をとらえることができる(哲学事典, 1971), とある。概念の形成は認識と同様の活動であるものの、知識のように確実さと対比されているわけではない。寧ろ、哲学事典に、概念は言語とともに生まれ、言語によって表現される(哲学事

典,1971), とあるように, 概念は言語と関係する。しかし, 確実さ或いは言語との関係の程度に違いがあったとしても, 概念の形成と認識ないし知識とは本来的には同じである。

さて, 数学教育学の先行研究では, 知識, 認識或いは概念など用語が混在している。高橋の一連の研究(高橋,1996a,1996b,1998; Takahashi,1998; 高橋,1999; Takahashi, 2000; 高橋, 印刷中)で用語の基準としてきた Polanyi(1958,1966)は, 認識なる語は使用せず, 専ら‘知ること’(knowing)なる語を用い, ‘知ること’と同等の性格をもつとして‘知識の獲得’(to acquire knowledge)なる語を使用する。‘知ること’を説明する際に Polanyi(1958)は, 概念枠組み(conceptual framework)なる語を用いるように, 必要に応じて概念なる語をも使用する。概念枠組みは‘知ること’を精緻に説明するために, Polanyi(1958)が Piaget, J. の理論などから考察し深化させたものである。

さて, 本研究では主に考察の対象とする Sfard(1991,1994,1997)に, 一応, 沿って語を用いることにする。ただし, Sfard(1994, 1997)は認識と同様の語として理解(understand)なる語も多く用いており, 本研究でもしばしば理解なる語を用いる。

Sfard(1994,1997)が理解なる語を使用する理由は, 隠喩に関する理論として引用している Lakoff, G., Johnson, M. および N ez, R. (Johnson, 1987; Lakoff, 1993; Lakoff & Johnson, 1980)の影響があるからであろう。なお, 本研究で, Lakoff, G., Johnson, M. および N ez, R. (Johnson, 1987; Lakoff, 1993; Lakoff & Johnson, 1980; N ez, 2000)を直接に取り上げ論じる際には, 彼らの研究の流れを考慮し, 認識ではなく認知なる言い回しをする。

2. Sfard(1991)による概念の二重性

Sfard(1991)が論じた数学的概念の二重性の考えは有名で, 彼女の理論が我が国の数学

教育学研究においてしばしば取り上げられ, 児童・生徒の数学的活動を捉えるために援用されている(例えば, 谷沢, 2001)。Sfard(1991)は, 数学的概念を操作的と構造的との二重により捉える。操作的であるとは動的で連続的, 詳細であり, 構造的であるとは静的で瞬間的, 集約的で, 操作的であるよりもより抽象的である(Sfard, 1991)。

Sfard(1991)は, 操作的概念と構造的な概念とを, それらの一般的性質, 内的表象, 概念発達における位置および認識過程における役割との各々の点から端的に述べている。一般的性質としては, 操作的概念では数学的実体が或る過程の結果として見なされるか, その過程自体と同定され, 構造的な概念では数学的実体が実在物のように静的構造と見なされる; 内的表象としては, 操作的概念は言語的表象に支えられ, 構造的な概念は視覚的イメージに支えられる; 概念発達における位置としては, 操作的概念は概念形成の最初期段階で発達し, 構造的な概念は操作的概念から展開する; 認識過程における役割としては, 操作的概念は効果的な問題解決と学習のために必要であるが十分でなく, 構造的な概念はすべての認識過程を促進する。

Sfard(1991)は, 操作的概念と構造的な概念とを例示してもいる。有理数を例とすれば, 操作的とは整数の除法かその結果で, 構造的とは整数の対であり, 特別に定義した対の集合の要素である(Sfard, 1991)。

操作的概念と構造的な概念とは巡回的であり, この二つの概念は心的に発達する幾つかの数学的概念, 各々の数学的概念は史的展開に凡そ沿うのだが, の二側面となる。Sfard(1991)は, 数概念の発達を例にとり, この巡回性を説明する。彼女によれば, 具体物の集まりから, 自然数, 正の有理数, 正の実数, 実数, 更に複素数に至る数概念の発達では, 各々の数概念において操作的概念から構造的な概念への巡回がある。例えば, 正の有

理数から正の実数への発達は、図形の測定という操作的概念を経て正の無理数の概念に至り、次いで正の実数の概念の構造化に至る、構造化された正の実数の概念は、更に実数の概念に発達するための操作的概念となる (Sfard, 1991)。

Sfard(1991)は概念の発達を、二重性とは別の性質からも説明している。その性質とは、内面化から凝集化、更に具象化へと至る発達の三段階である。彼女は、内面化が心的表象によって操作するに至ること、凝集化が操作の系列を幾つかの単位に纏めることであると言い、具象化が存在論的变化、即ち、新しい視点から慣れたものを見る突然の能力であると述べる。彼女によれば、内面化と凝集化とは緩やかな量的変化であり、具象化は急な質的变化である。

Sfard(1991)によれば、内面化から凝集化、更に具象化へと至る過程は、操作的概念から構造的な概念への過程に應ずる。概念の発達において、操作的概念は内面化と凝集化とを伴い、構造的な概念は具象化を伴う (Sfard, 1991)。例えば、発達の初期においては、操作的概念は、具体物が操作に用いられ、操作の過程が心的に表象されていく内面化と、幾つかの操作が纏まっていく凝集化に、構造的な概念は、それらの纏まりが固定される具象化に対応する。

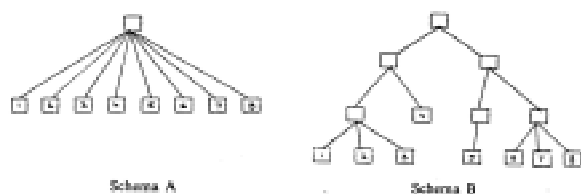


図1 Sfard(1991)が示すスキーマ

Sfard(1991)は、内面化、凝集化および具象化を概念における知識情報(information)の結び付きの有様によって説明している。彼女は知識情報の結び付きをスキーマと

呼んでいるのだけれども、内面化と凝集化、具象化はスキーマの状態の変化を伴う。Sfard(1991)が示す図(図1)のように、知識情報が並列していくスキーマAの場合が内面化、スキーマBのように知識情報が構造化された場合が具象化、スキーマAからスキーマBに至る過程が凝集化である。

スキーマAとスキーマBとを比較すると、知識情報がスキーマAでは八つで、それを統合するような知識情報の結節点の一つあり、他方でスキーマBでは同じく八つの知識情報を部分毎に統合するような結節点が六つある。各々の結節点は、特にスキーマBの場合は、程度の違いはあっても、各部分の知識情報間の共通性に相当する。これら結節点の共通性は、構造的な概念にまでは至らない場合であっても、幾つかの知識情報における素朴な構造をもつ。Sfard(1991)によれば、数学的対象は具象化の結果としてのスキーマBの最上位にある結節点に相当する。最上位の結節点がすべての知識情報に共通で、最も抽象的で完成度の高い構造を含む。スキーマAの場合には、上位にある結節点が知識情報を纏める何らかの共通性を伴う。

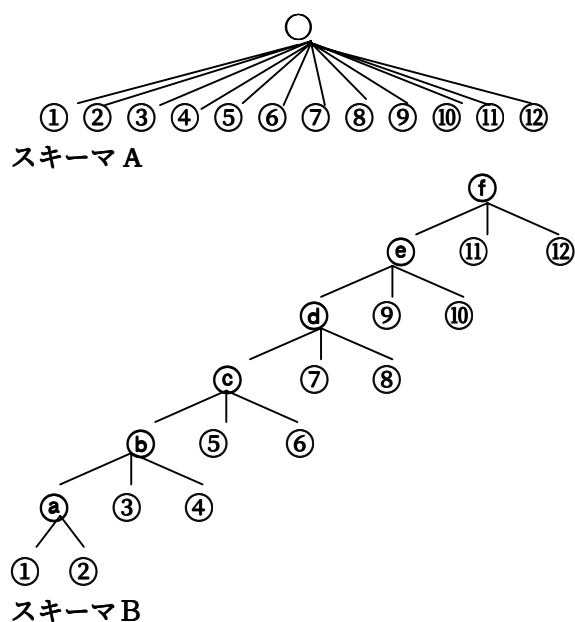


図2 分数の概念におけるスキーマの例

もっとも, Sfard(1991)によれば, これらスキーマによって概念の有り様をそのままに示し得るのではない。図化したスキーマは模型なのであろう。ただし, 知識情報網の形成をもって概念の形成とするのは, 認知科学に基礎を置く多くの数学教育学研究に見ることができ(例えば, Markovits & Sowder, 1994), この模型にしても認識過程の実際から全くかけ離れたものなのではないだろう。

スキーマAからスキーマBに至る内面化と凝集化, 具象化に例を照合させよう。スキーマAの各々の知識情報が, 本間(1990)があげるような分数の様々な意味だとする。図2の①と②とが分割分数における知識情報, ③と④とが操作分数における知識情報, ⑤と⑥とが商分数における知識情報, ⑦と⑧とが割合分数における知識情報, ⑨と⑩とが分数の同値性における知識情報, ⑪と⑫とが四則演算における知識情報であるとする。スキーマAでは①から⑫までが並列的に並び分数の意味という知識情報の纏まりとなっている。

スキーマBの㉔は分割分数の共通性と操作分数の知識情報を, ㉕は操作分数の共通性と商分数の知識情報を, ㉖は商分数の共通性と割合分数の知識情報を, ㉗は割合分数の共通性と分数の同値性の知識情報を, ㉘は分数の同値性の共通性と四則演算の知識情報を, および㉙は四則演算に共通の知識情報を統合する結節点となる。スキーマAでは並列的な纏まりで, 互いに関係付けられていなかった知識情報が, スキーマBに至ると互いに結び付き構造化される。㉙は様々な分数の意味を統合する最上位にあり, 分数の概念が有理数全体の概念へと発展する際には操作の対象となる。

3. Piaget, J.の理論との対比

Sfard(1991)の理論とPiaget, J.の理論(Piaget, 1966)とを対比することにする。Piaget(1966)の示す発達のうち, 感覚運動,

前操作および具体的操作はSfard(1991)の言う操作的概念に, 形式的操作は構造的概念に相当する。もっとも, Piaget(1962)の言う発達とSfard(1991)の言う概念の二重性とは, 上記の対応において単純に重複するのではない。Sfard(1991)の言う構造的概念に相当するのは, Piaget(1966)の言う形式的操作期に構成される束一群構造である。Sfard(1991)はPiaget, J.の理論を引用し自身の論の正当性を補強しているものの, 束一群構造にまでは言及していない。しかし, 形式的操作を特徴づける心的構造である束一群構造は, 具体的操作における群性体に比較して, より静的で集約的である点で, Sfard(1991)の言う構造的概念と同様の性質をもつ。

勿論, スキーマBがそのまま束一群構造というのではない。束一群構造はスキーマBにおける知識情報を統合し, 全体を貫くような性質である。この束一群構造は, Sfard(1991)が構造的概念に応ずるとしたスキーマBにおける知識情報間を結ぶ縄の役割を果たす。束一群構造とは, その縄を編む数学的性質をもった材料である。スキーマBとして表れる構造的概念を根基から支える構造が束一群構造なのである。

内面化と凝集化とにおいては, Piaget(1966)の言う群性体が構造を与える。スキーマAからスキーマBに至る中途の知識情報を結ぶ縄は群性体を構成し, 能動的な性質を帯びる。動性をもつ群性体は静性をもつ束一群構造への発達に向かう。

ところで, Sfard(1991)が示した構造的概念の性質のうち, 一般的な性格, 概念発達における位置, および認識過程における役割は, Piaget(1966)の言う形式的操作の性質にも相応するのだが, しかし内的表象に限っては, 沿わない。構造的概念の内的表象が視覚的イメージであるというのは, Sfard(1991)による独創の知見であらう。同様に, 操作的概念の性質のうち内的表象のみがPiaget(1966)

の理論とは沿わず, Sfard(1991)は内的表象が言語表象に支えられるとする。Piaget(1966)では, 具体的操作期以前の内的表象は言語表象というよりは具体物などの抽象度の低い表象である。Piaget(1966)と Sfard(1991)とのこの立場の違いは, Sfard(1991)が存在論的立場を保ちつつ, 認識に全体論的な見解をもち込んだことによる。Sfard(1991)の立場は, 後に隠喩への着目へと進展していく。

4. 具象化と隠喩

Sfard(1994)は内的表象としてのイメージの中に隠喩を見出し, Johnson(1987), Lakoff&Johnson (1980)およびLakoff(1993)の理論を取り込み, 隠喩の役割の考察から彼女の理論を補強した。Sfard(1994)によればイメージから隠喩を区別することができ, 隠喩はイメージの中でも型を伴うものである。Sfard(1994)はLakoff&Johnson (1980)による次の言及を引用している。

われわれは物理的物体や内容物に関する経験から, 方向づけだけにたよる基盤よりも更に広範な理解の基盤を得ることができる。物体や内容物という観点から自分の経験を理解することによって, われわれは経験のある部分を取り出し, それらを別個の存在物(entities)もしくは一定の種類の内容物(substances)として取り扱うことができるのである。ひとたび経験を存在物や内容物と同一視してしまえば, それらの経験に言及したり, カテゴリーやグループに分けたり, また, 数量化することができる—そして, そうすることによって, 経験の実体を推断することができる。(Lakoff&Johnson, 1980, p.25; 渡部他訳, 1986, p.37)

Lakoff&Johnson(1980)は, 経験を存在物や内容物に同一視し, その存在物や内容物の基盤をもって分類や数量化を行い, 経験の実体を

推断し, 理解するというのである。この基盤というのは, イメージ・スキーマのことである。イメージ・スキーマとは経験し, 理解するための心的な型であり, 対象に意味づけること, ないし推理することはイメージ・スキーマがあってこそなし得る(Lakoff & Johnson, 1980)。

存在物や内容物は, それ自体では動的でなく, 静的な性格をもつ。この性格は, 構造的な概念における一般的性質, 数学の実体は実在物のように静的構造と見なされる, とも整合的である。

さて, Sfard(1994)はイメージ・スキーマを基盤とする隠喩の成立を, 構造的な概念に至った指標, 即ち具象化の指標とする。彼女は, 構造的な概念の内的表象である視覚的イメージがイメージ・スキーマと相乗し, 隠喩が成立することをJohnson(1987), Lakoff(1993), およびLakoff & Johnson (1980)の理論の支えを得て見出したのである。



図3 Sfard(1994)が取り上げた数学者が描いた絵

彼女は或る数学者がボルスクの仮説を人間の顔に喩えた事例を取り上げ, 隠喩の生成の際に生じる図3のごときイメージを構造的な概念に至った際の証拠として論じる(Sfard, 1994)。隠喩の成立によって生じた, 数学者のもつ構造的な概念の影のごとき存在としてのイメージに力点を置くのである。

Sfard(1994)は, 時に図3のように表象される絵を伴う隠喩の生成によって, ‘深い’理解, 或いは‘真の’理解に至ると言う。この理解は突然のもので, 構造的な概念に至り具象化が起こる際の瞬間的, 飛躍的で急激なものである。



図4 Sfard(1997)が示す隠喩の関係

聞き手: よし, もし君が7分の9という分数の意味を聞いたことのない人に説明しなければならなかったら, どのように説明する?

ヨン: [間] それは… [間]。ううん。パイをとって, それを7つに分け, それから7分の9はこんな7つの切れ端になるかも…

聞き手: もう一度…

ヨン: はい。こんな7つの切れ端で…あっと, こんな9つの切れ端だ。

聞き手: でも, そのパイからは7つしかとれないよ。

ヨン: それで, 2つのパイ…とる。2つのパイを7つずつに分けて, それから9つの切れ端をとる。1つのパイと2つの切れ端という意味です。

図5 Sfard(1997)が示す隠喩の関係(図4)と対になる事例

Sfard(1997)は, Sfard(1994)から更に深化した理論を展開している。Sfard(1997)では隠喩の成立における活動にも着目し, その成立における操作的概念の位置付けを考察している。Sfard(1997)が図化した隠喩の成立の様子を図4に示そう。図4は図5に示した

面談のプロトコルと対になっている。視覚的な資源を伴いつつ, 操作的概念と構造的な概念とが統合し, 記号を指示し, 目標領域の数学的実体に至る。図4と図5との場合の操作的概念は2つのパイを各7つずつに分け9つ取ることに相当し, 構造的な概念は2つのパイの7分の9, 記号は $9/7$, 数学的実体は有理数に相当する。

図4に示される隠喩の関係は, 操作的概念と構造的な概念, 記号および数学的実体の統合を説明するものの, イメージ・スキーマや Sfard(1994)が隠喩として論じたような絵(図3)の説明はしていない。図3に示した絵の表象は, 知覚資源に貯えられていようけれども, 図4に略記される論では, Sfard(1994)で述べられた構造的な概念と具象化, 隠喩の関係は説明しきれないのではないかと。

5. Lakoff, G., Johnson, M. および Neuz, R. の言う隠喩

Sfard(1994, 1997)における隠喩に係る理論の基となっている理論に目を向けよう。Sfard(1994, 1997)は隠喩に係る理論として, 共通に Johnson(1987), Lakoff & Johnson(1980)および Lakoff(1993)の理論を取り上げている。もっとも, 最近では Lakoff, G. と Johnson, M. の二人に Neuz, R. が加わり, 彼らの理論を進展させている。この5節では, Sfard(1994, 1997)が着目した存在物や内容物のイメージ・スキーマを, 専ら数学的概念の構成という点から深化させた Neuz(2000)を取り上げる。Neuz(2000)の理論は Lakoff, G. や Johnson, M. と大きく異なるものではない。

Neuz(2000)は, 高次の数学的構造の認知においても身体性に基づく生活経験からなる日常的概念が用いられると言ひ, 境界のある空間の物体が集合の概念に, 繰り返しのある活動が帰納に, 回転が複素数の計算に, 運動や境界への接近が導関数のために用いら

れると述べる。

上記の日常的概念と数学的概念との対は隠喩によって構成された結果であり, N ez(2000)の言う隠喩とは, 起点領域から目標領域への写像である。起点領域と目標領域とは大雑把には類似の構造をもつ。

N ez (2000)は数学的概念における隠喩の関係として, 土台づける隠喩, 再定義的隠喩, および接続する隠喩の三つをあげる。N ez (2000)によれば, 土台づける隠喩では日常的概念によって数学的概念を土台づけ, 起点領域は数学以外, 目標領域は数学である。例えば, 容器が起点領域となり, 集合が目標領域となる。図的に表すと図6のようになる。

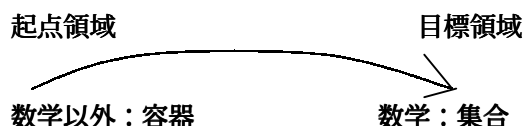


図6 土台づける隠喩の関係

再定義的隠喩は数学的概念を日常的概念に置き換えるもので, 接続する隠喩は或る数学的領域を他の数学的領域に関係させて概念化する隠喩である(N ez, 2000)。

上記の土台づける隠喩の例(図6)における起点領域の容器とは, イメージ・スキーマのうちの容器のスキーマである。容器とは存在物であり, 内容物の入れ物である。Lakoff & Johnson(1980)が述べ, Sfard (1994)が特に取り上げた存在の隠喩におけるイメージ・スキーマの代表が容器のスキーマである。

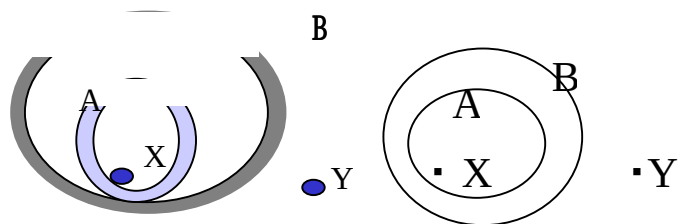


図7 容器のスキーマとベン図

容器のスキーマは, N ez(2000)によれば, 境界と内部, 外部からなる。容器のスキーマの例を図7左として示す。もっとも, すべての容器のスキーマが図7左に示したような容器と物体との位置関係からなるのではなく, 図示したものは一例である。図7左では容器Bの外に物体Yが, 容器Bの中に容器Aがあり, 容器Aの中に物体Xがある。この容器のスキーマに対応する数学的関係が, 図7右に示したベン図である。

N ez(2000)は容器のスキーマから集合に写像する主だった隠喩を示してもおり, 例えば, 容器のスキーマの内部から集合に, 内部にある物体から集合の要素に, 或いは大きな容器のスキーマの中にある容器のスキーマから或る集合の部分集合に, などの隠喩の関係をあげている。確かに静物である容器がイメージ・スキーマとなった心的な型には数学の静的な関係が対応している。

6. 知覚資源, 内面と隠喩

N ez (2000)の理論を概観したところで, Sfard(1997)の論を更に発展させ得るか。Sfard(1997)の示した隠喩の関係とN ez(2000)の示した隠喩の関係を照合すると, 大枠では, 当然のことながら適合する。隠喩が起点領域から目標領域への写像であるとは Lakoff, G. と Johnson, M. と (例えば, Lakoff, 1993)による元々の知見であり, 図4と図6とに各々図示した隠喩の関係も, この写像を基にしている。Sfard(1997)の方は自身による概念の二重性を中心とした理論から発展させたものであり, 操作的概念と構造的な概念とを隠喩の関係に組み入れている。他方で N ez (2000)の方は Lakoff, G. と Johnson, M. との理論からの発展である。

N ez(2000)の示す隠喩の关系到 Sfard(1994)が取り上げた表象(図3)を位置付けることにする。図3は数学者が構造的な概念に至った時の隠喩の表れである。起点領域

が数学的構造, この場合はボルスキの仮設で, 目標領域が図 3 のような表象となると考えると, N ez(2000)の述べる三種の隠喩のうち再定義的隠喩に最も近い。図化すると次となる(図 8)。

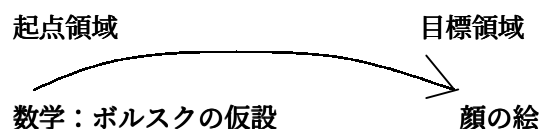


図 8 隠喩の関係における顔の絵の位置付け I

しかし, N ez(2000)が再定義的隠喩の例としているのは, 起点領域が無限集合, 目標領域がより以上のもの或いは同じくらい多いなどの日常的概念である。この日常的概念は文化的に共有され, いわゆる型を伴うものであるのに対し, 顔の絵は事例となった数学者に固有の表象である。Sfard(1994)が取り上げた絵を伴う隠喩の関係は N ez(2000)の示す三種の隠喩の関係には含まれないのではない。

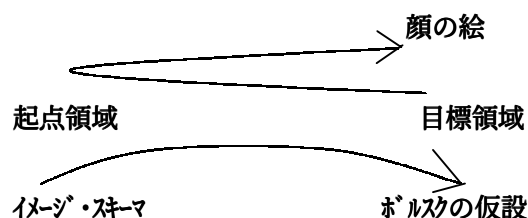


図 9 隠喩の関係における顔の絵の位置付け II

図 3 のような顔の絵を N ez(2000)の示す隠喩の関係に位置付けるとすれば, 図 9 のようになろう。起点領域がイメージ・スキーマ, 目標領域がボルスキの仮設である。起点領域にあるイメージ・スキーマは高橋が一連の研究(高橋, 1996a, 1996b, 1998; Takahashi, 1998; 高橋, 1999; Takahashi, 2000; 高橋, 印刷中)において扱った内面に含まれる。内面は Polanyi & Prosch (1975)の言う我々自身(Ourselfs)と同じく知覚や感情などの資

源を含み, 隠喩が生成されると呼び起こされる経験の蓄積である。

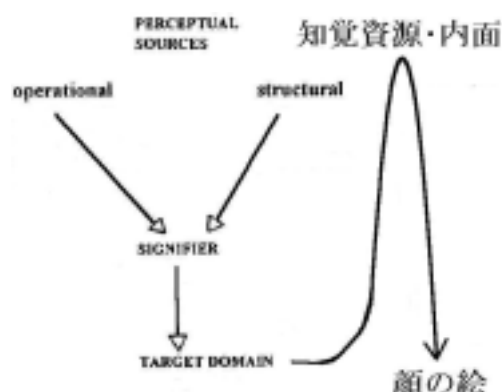


図 10 Sfard(1997)が示す隠喩と知覚震源・内面との関係

Sfard(1997)の示す隠喩の関係(図 4)を, 図 9 に示した隠喩の関係と同じ視点から拡張することができる(図 10)。図 10 では, 操作的概念と構造的な概念との統合が生じた際に, 呼び起こしが生じ, 知覚資源を含む内面に蓄えられていた顔が表象として生ずることを示す。ただし, 操作的概念と構造的な概念, イメージ・スキーマの関係は鮮明ではない。

Sfard(1994, 1997)の理論では, 隠喩は構造的な概念に至ったときに生じるのであり, 操作的概念と隠喩との関係は積極的には論じられていない。しかし, 操作的概念に応じてイメージ・スキーマが働くのだとすれば, 操作的概念に対しても, 図 3 で取り上げるような隠喩が生成されるであろう。実は, 操作的概念のように動性を伴う際のイメージ・スキーマの働きと隠喩の生成を高橋(印刷中)は既に明らかにしている。

7. 認識における三層と隠喩の働き

6 節までに, 操作的概念と構造的な概念, イメージ・スキーマ, 知覚資源を含む内面の関係付けが問題点となった。高橋(印刷中)によるこの問題点への接近とは別に, 7 節では群性体ないし束一群構造にも着目し, この関係

付けを行う。

構造的概念に対応する知識情報網における縄の役割を Piaget(1966)の言う束一群構造がなすのだとすれば, イメージ・スキーマは束一群構造を構成する役割を果たす。イメージ・スキーマは日常的概念から数学的構造を構成する心的な型であるから, 群性体や束一群構造をも構成し得る。概念の構造化はイメージ・スキーマ, 群性体ないし束一群構造の支える知識情報網の三層からなる。図化すると図 11 である。

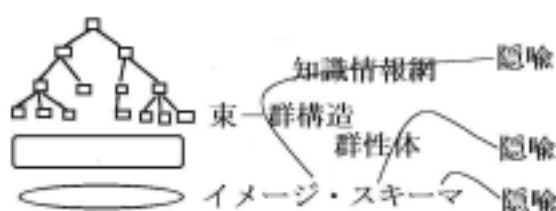


図 11 認識における三層の構造化

三層の各々で隠喩の関係が成立する。イメージ・スキーマから束一群構造や知識情報網を写像し隠喩を生成する場合のみでなく, 群性体を写像し隠喩を生成する場合, およびイメージ・スキーマそのものから隠喩を生成する場合がある。

さて, 2 節において構造的概念と知識情報網とを論じた時に, 知識情報網の形成が一応の模型であることを述べた。一応の模型であるとは, 構造的概念が本当に完成するものなのかどうか, という問題点とも係わってくる。学校で学習するすべての児童・生徒が算数・数学において構造的概念に至るのかどうか, 構造的概念に至らないことがあるとすれば, 何故に児童・生徒は次の教材の学習へと進み得るのか。勿論, 次の学習へ前進し得る理由は様々にあるのだけれども, 操作的概念の働きを, 特に複雑な数学的概念においては, 考察する必要がある。高橋(印刷中)では本研究で論じてきた操作的概念に相当するような

活動においてもイメージ・スキーマが働き, 隠喩が生成されることを示している。図 11 に示した三層の構造化では, 主にイメージ・スキーマに依存し, 時には群性体や束一群構造を素朴に構成しつつ, 隠喩を生成しながら学習を進める場合も説明し得る。隠喩の生成は, 高橋の一連の研究(高橋,1996a, 1996b, 1998;Takahashi,1998;高橋,1999;Takahashi, 2000;高橋, 印刷中)で論じてきたように, 児童・生徒の内面の能動性に起源をもち, 概念が構造化されずとも生じるのである。

もっとも, 構造的概念に至ることがないというのでもなく, 構造的概念に価値がないというのでもない。多くの児童・生徒の場合を照合すると, 図 11 に示したように, 隠喩の生成に三つの場合があり, 構造的概念にとらわれることなく能動的に隠喩を生み出しながら学習を進め得るに違いないのである。

8. 結語

本研究の目的は, 数学的知識の構成における動性と静性とから, 隠喩の働きを明らかにすることであった。1 節では用語の規定を行い, 2 節で Sfard(1991)による数学的概念の二重性を考察した。3 節では概念の二重性と Piaget(1966)との対比を行い, 4 節では Sfard(1994,1997)が示した概念の二重性と隠喩との関係を考察した。5 節では, Sfard(1994,1997)の背景にある Lakoff,G., Johnson,M.および Neuz,R.を論じ, 6 節では 4 節と 5 節とを受け Sfard(1994, 1997)による理論を深化させた。7 節では 6 節の結果に 3 節での Piaget(1966)への考察を加えて, 本研究の最終的な知見を得た。最終的な知見とは, イメージ・スキーマと群性体ないし束一群構造, 知識情報網からなる, 認識の三層が構成され得ること, それら三層に関して隠喩が働くことである。児童・生徒の能動性に支えられる隠喩の生成はイメージ・スキーマの働く操作的概念においてもなされ, 児童・生

徒の算数・数学学習を促進するのである。

文献

本間光幸 (1990). 分数学習における児童のつまづきの研究. 第 23 回数学教育論文発表会論文集, 25-30.

Johnson, M. (1987). *The body in the mind: The body basis meaning, imagination, and reason*. Chicago: The Univ. of Chicago Press.

Lakoff, G., 池上嘉彦&河上誓作他訳 (1993). 認知意味論. 紀伊國屋書店.

Lakoff, G. & Johnson, M. (1980). *Metaphors we live by*. Chicago: The Univ. of Chicago Press.

Lakoff, G. & Johnson, M., 渡部昇一, 楠瀬淳三 & 下谷和幸訳 (1986). レトリックと人生. 大修館.

Markovits, Z. & Sowder, J. (1994). Developing Number Sense: An Intervention Study in Grade 7. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25, 1, 4-29

N ez, R. E. (2000). Mathematical idea analysis: What embodied cognitive science can say about the human nature of mathematics. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th international conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.1, pp. 3-22). Hiroshima, Japan: Hiroshima University.

Piaget, J. 芳賀純訳 (1966). 論理学と心理学. 東京: 評論社.

Polanyi, M. (1958). *Personal knowledge: Towards a post-critical philosophy*. Chicago: The University Chicago press.

Polanyi, M. (1966). *The tacit dimension*. Gloucester: Peter Smith Pub.

Polanyi, M. & Prosch, H. (1975). *Meaning*. Chicago: University Chicago press.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of

the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.

Sfard, A. (1994). Reification as the birth of metaphor. *For the Learning of Mathematics*, 14, 1, 44-55.

Sfard, A. (1997). Commentary: On metaphorical roots of conceptual growth. In L. D. English (Ed.), *Mathematical Reasoning: Analogies, Metaphors, and Images* (pp.339 -371), Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

高橋等 (1996a). 数学的知識に関する中学生の持つ比喩の様相. 筑波数学教育研究, 15, 35-44.

高橋等 (1996b). 数学的知識の比喩に関する研究 — 数学的知識の比喩とは何か —. 教育学研究集録, 20, 91-99.

高橋等 (1998). 児童の算数の見方と学習活動との関連. 上越数学教育研究, 13, 33-42.

Takahashi, H. (1998). Some characters of metaphorical knowledge of several materials: A case of a junior high school student. *Tsukuba Journal of Educational Study in Mathematics*, 17, 241-248.

高橋等 (1999). 或る小学 6 年生の持つ分数の知識に介入している内面の存在と潜在化. 上越数学教育研究, 14, 29-38.

Takahashi, H. (2000). Modalities of students' internal frames of reference in learning school mathematics. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.) *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 185-192). Hiroshima: Hiroshima Univ.

高橋等 (印刷中). 数学的知識の比喩性に着目した算数・数学学習への接近. 能田伸彦, 清水静海 & 磯田正美 (編), 算数・数学教育の新世紀, 東洋館. 谷沢浩明 (2001). 文字式の学習過程に関する研究—事象と文字式の関連に焦点を当てて—. 上越数学教育研究, 16, 69-80.