事象から形式的な表現への過程を重視した一次関数の授業

橋　薫
上越教育大学大学院修士課程２年

１．はじめに

授業で関数の単元に入ると，生徒は関数が何かよくわからないという。それは関数関係が本来見えないものであることによるためであろう。教室では見えないものを表・グラフ・式などの一般的で形式的な表現をすることで見える形にして考察の対象にしている。しかし，生徒の立場から見ると三つの形式的な表現を使いこなすことは難しいことである。

そのような問題がありながらも，従来の授業では式を求めることや表・グラフ・式の書き換えの指導が中心になっている。そして，このような形式的な表現以外の，絵や図のようなものを扱うことはあまりされていないのが現状である。

そこで，本稿では事象から形式的な表現に進むときに絵や図のような表現が媒介となることを想定して，一次関数の授業を行い示唆を得ることを目的とする。

２．表現体系と記号的表現の難しさ

平林(1973)は表記を規約的表記と象徴的表記に分けている。特に象徴的表記のなかの図的表記が有用であることを述べている。中原(1995)は現実と記号の間に着目し，表現は現実的表現，操作的表現，図的表現，言語的表現，記号的表現の順に進むとしている(図1)。

関数では記号的表現にあたるものは表・グラフ・式である。これらの表現の難しさは先行研究から明らかになっている。例えば，東京都中数研関数委員会(1986)を見る。変数がどんな事象を表すか書かれた表から比例の関係にあるものを選ぶ問題の正答率は非常に高い。しかし，事象を表すことばがなく，変数が単に x，y と書かれた澤田(2001)の調査では，三つの表現(表・グラフ・式)を結びつける難しさがあるものの，23%という正答率はかなり低いものである。さらに、同じ澤田の調査の中で，２台の車の移動距離と時間の関係を表す２本の比例のグラフから車の距離の差や時間の違いを読みとる問題では３分の２の生徒が正解している。これらの結果から事象が背景にない問題は難しいといえる。

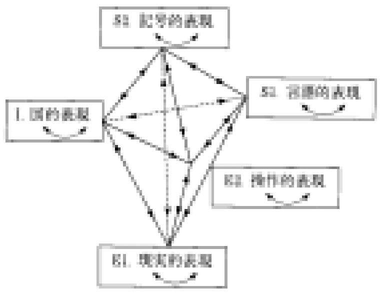


図１　中原の表現体系

また，山口ら(2001)の調査には表現を書き換える問題がある。$y = x$ をグラフに書き換えさせる問題の正答率は中学３年生でわずかに44%である。ここでも関数の表現の難しさが見える。

これらは中原の表現体系でいう記号的表現の難しさである。そこで，事象から記号的表現への過程を重視し，特に図的表現に着目する。

３．問題解決における図の役割

図的表現にあたる子ども自身の描く絵や図によって問題の解決が進むということが花形や菊地，布川によって報告されている。

菊池(1996)は問題を読んでも情景が理解できない，構造もわからないという子どもにとって，形式的な線分図よりも，もっと自由に図を描いてみることが情景を理解することや解決に至るための助けになるのではないかと提案している。これは，関数の学習で表・グラフ・式よりも図や絵のようなものを使うことに着目しなければならないと考えている筆者の考えを補強するものである。

花形(1990)は，数量関係をを把握していない状態で問題文中の数値を単に問題文に出ているとおりに表した絵を直結図，数量関係を把握した上で描かれた絵を数量関係図とに区別した。そして，問題解決過程において直結図は徐々に数量関係を把握しながら数量関係図へと発展していくとしている。また，布川(2000)は問題場面に対する理解と図を描く活動との相互作用を指摘している。

つまり，その時点で見えていたこと，理解できたことを絵や図にする。絵や図を考察することで問題に対して新しい見方が生まれる。生まれたものを使って図に書き込みをしたり，書き直したりすることで，絵自体も変化し新しいものになる。見方・考え方と絵や図がお互いに関係しあい変化しながら理解が進んでいく可能性があるということである。

関数では Meira(1995)が事象から表に表すプロセスに現れる表現を細かく分析している。Meira の研究は１回のインタビュー調査で，事象から表までのプロセスのみである。筆者は，生徒が描く素朴な絵や図に着目するという Meira の研究を授業で生かすことを目的とする。授業で事象から記号的表現である表・グラフ・式に進む過程でどのような表現が描き出され，描き出したものをどう扱うかを含めてみていくものとする。

４．教授実験の構想

10時間の授業は，事象を分析するという立場で課題を設定した。すべて追いつき追い越すという文脈を持つものを準備する。始めは操作できる事象を使うが，授業が進むに従って操作できないもの，そして，事象との関わりが徐々に少なくなるように構成した。動きを再現するために絵や図などを描き，自分の作り出した表現をもとに考える状況を作り出すことをねらう。

また，絵や図から事象の動きを説明させるだけでなく，記号的表現である表・グラフ・式から事象を振り返り，事象の言葉で表現させる場面を意図的に取り入れた。実際の授業の構想は次の通りである。

4.1 第１時から第４時

１から４時間目までは，実物を用いて授業を行う。始めの３時間は Greeno の装置を扱う。３時間を通して１つの授業とするのでなく，１時間に１つの課題を与え，事象から式化まで進ませることを３回体験させる；

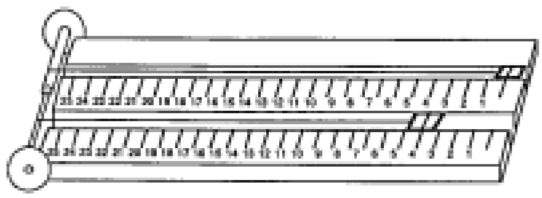


図２ Greenoの装置

第１時：考え方がわかるようにプリントに書きなさい，ということから言葉での説明，図での説明，表を使った説明をさせる。表を使った説明，式での表現まで説明する。

第２時：１時間目と同じ設定の装置を使う。前時の図，表，式が使えるが，装置を越える値を扱う課題にする。図や表など描き出した表現に頼らざるを得ない状況にする。

第３時：装置で変化の割合と切片にあたる

部分を変える。装置は見せるだけ，課題解決を求める。装置が手元にないので，出発地点や進むスピードなどの情報から，図を描いたり表を作ったりして動きを再現することを意図している。ここでも式の表現まで説明する。

このように，３時間が全く同じことの繰り返しではない。事象に依存はしているが，実物の操作から徐々に離れ表現に頼らざるを得ないようにしている。また，それぞれの時間で事象を扱う場面から式化をする中で，関数に必要な概念や表現が表れるようにする。１時間目の解決のプロセスを２時間目，３時間目の授業の中で洗練，修正されることをねらっている。４時間目では２本の線香を使って燃える時間と燃え残った量との関係を扱う；

第４時：新しい状況を持ち込み３時間目までの解決のプロセスを発展させることをねらう。

この事象を用いたのは，増えるときに減るという関係が表れるからである。

4.2 第５時から第６時

５，６時間目は事象に依存した課題であるが，プリント上で出題する。生徒は事象を具体的に操作できない；

第５時：表を使って解きなさい，ということで動きの再現を形式的な表現で求める。説明させる中で，表から事象への関連づけを図る。

第６時：速度の変化を通して，表の変化の割合とグラフの傾きとの関連を図る。

７時間目の表の１組の x, y と変化の割合をつかって一次関数の式を求めさせること，表の２組の x, y から一次関数の式を求めさせることにつながるように，表やグラフを使って式化する。

具体的に操作できない問題状況は３時間目から少しずつ出しており初めてではない。６時間目の問題は１から３時間目のウサギとカメの競争の問題と似たものにしている。生徒は速度を苦手としているので，一度扱った問題と似た構造を持っているものであれば状況がつかみやすいと考えた。

4.3 第７時から第９時

７，８時間目は解決のプロセスに表れた式化の方法を取り出し，形式的な表から一次関数の式を求めさせる；

第７時：表の１組の x, y と変化の割合をつかって一次関数の式を求めさせる。

第８時：表の２組の x, y から一次関数の式を求めさせる。

表を作るときに累加を使うこと，x が１増えるときの y の値と $x=0$ の時の y の値が式を作るときに大切であることはここまでの６時間で使われた解決のプロセスの中に表れている。前時までに，解決のプロセスの中で使っていた考えを意図的に取り出して意識させるという活動になる。

第９時：形式的な形で，切片と変域とに関係する問題を提示する。式から事象への関連づけを図る。

4.4 第10時

10時間目は，評価問題的な扱いである。一次関数のまとめの問題として教科書でも取り上げられる問題を扱う。増える，一定，減るという三つの動きがあり，そのことに気づいて動きの再現をすることが難しい。そのため，事象から式化するまでの解決のプロセスを振りかえさせるようにする。

５．事前調査およびその結果

事前調査は，宮城県内の公立中学校３年生24名に対して，比例の関係にあるものを理由を挙げて選ぶという問題で実施した。次の表は教授実験に参加した生徒の事前調査の解答の様子である；

表1 事前調査

	問題１(　　) （グラフ）	問題２(　　) （表）	問題３(　　) （式）
A	◎(　　)	×(　)	×(　)
B	×(　)	◎(　　)	×(　　)
C	×(　)	×(　)	×(　)
D	×(　　)	×(　　)	×(　　)
E	◎(　　)	◎(　　)	×(　)
F	×(　)	×(　　)	×(　　)
G	×(　　)	×(　　)	×（　　)
H	×(　　)	×(　　)	×(　　)
I	×(　　)	×(　　)	×(空欄)
J	×(　　)	×(　　)	×(　　)
K	◎(　　)	◎(　　)	×(　)
L	×(　　)	◎(　　)	×(空欄)
M	×(　　)	×(　)	×(　)
N	×(　)	◎(　　)	×(　)
O	◎(　　)	◎(　　)	×(　)
P	◎(　　)	◎(　　)	×(　　)

＊学級の正答率

問題１･･･25%，問題２･･･37%，問題３･･･０％

このように，３年生に対しての調査であったが，記号的表現から比例を判断させる問題の正答率は，これまでの調査のデータと比較すると低いものであった。そこで今回の教授実験は，２乗に比例する関数を学習する前のこの３年生に対して，補習という形で行うこととした。課題に，事象に依存した問題を多く取り入れるだけでなく増加量や変化の割合，傾き，切片，変域という内容も扱うような構成とした。

６．教授実験における活動の様子

実際の教授実験では授業構想の第７時と第８時をカットし，計画の８時間分を10時間かけて実施した。

6.1　実物を用いた授業：動きを紙の上に再現する様子

問題：装置を見てわかったことを書こう。動かしてみてわかったことを書こう。

Greeno の装置を二人に１台ずつ与え，自由に操作させた。生徒は次のような表現をした；

・うさぎの方がカメが進むより多く進んでいる(たとえば，カメが２進むとしたらウサギは４進むとか)。比例しているのではないか。
・カメが１進むうちにウサギは２進む
・進む速さ　２：１
・１回まわすと，カメが１すすみ，ウサギは２進む。
・１回まく毎に　→　ウサギ２歩進む，カメ１歩進む。

動きを捉えるこの場面では，回転数とブロックの位置を関係づけていた生徒は３名，二つのブロックの位置を関係づけていた生徒は10名であった。

問題１：頂上までの途中にトンネルがあります。トンネルの出口は２９です。このトンネルから先に出てくるのは，ウサギとカメのどちらでしょうか。答だけでなく考え方がわかるように詳しく書いて説明してください。

Greeno の装置の二つのブロックの動きを紙上に再現させるために，教師は装置の目盛りを25までしか書かないという手だてを取った。解は29である。

何人かの生徒は25の先にも目盛りがあることを想定して29まで指で数えたり，実際にペンで目盛りを書き足したりした。教師が，装置を使わずに見つけ出した動きの情報を使って解くことを話し，「答だけでなく考え方がわかるように詳しく書いて説明してください。」と話したことで，図や表を書き出した。

動きを再現する段階では，二つのブロックの動きを比較して，動きを再現した生徒が多く，回転数と位置を関連づけて再現した生徒はいなかった。また，進んだ距離で捉える生徒もいなかった；

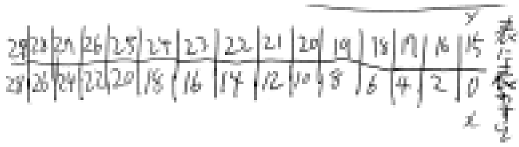


図３　問題１の表

動きを再現する場合，１進んだときに２進むことを使って累加的に図や表を書いていくことが考えられる。これは，増加量が一定であることから言えることである。この課題は紙上で再現した動きを，装置で確かめることが出来る。教師は生徒に発表させた上で，装置を使って確認させた。

> 問題２：ウサギが１００目盛りに着いたときにカメはどこにいますか。答だけでなく考え方がわかるように詳しく書いて説明してください。

この問題は装置を越えるところに解がある。装置を動かして解決することの出来ない問題である。教師のねらいは紙上に動きを再現し，再現した表現を使って問題を解決すること，また，再現した表現から事象を説明することである。

授業では，まず問題２に入る前に動きのとらえ方が色々あることを前時のプリントを使って示した。それに加え，二つのブロックの動きを比較して動きを再現した生徒が多かったので，回転数と位置を関係づける考え方も示した。

問題を解決するためには，１進んだときに２進むことを使い，解が求められるまで累加で表を書き続けることが考えられる。事実，クラスでは15名中６名がこの方法であった。場面に応じて「２進むときに４進む」や,「５進むときに10進む」のように増加量を変えたものを使って累加的に表を書いた生徒は６名。増加量を必要に応じて変化させて使うことは，変化の割合につながる考えである。残りの３名は100÷２という計算から50回転することを利用していた。

この後，グラフを描く活動を行ったが従属変数が二つある関数になれていないためか，二つの従属変数の一方を独立変数，一方を従属変数として関係づけたものを書いた生徒が多い。

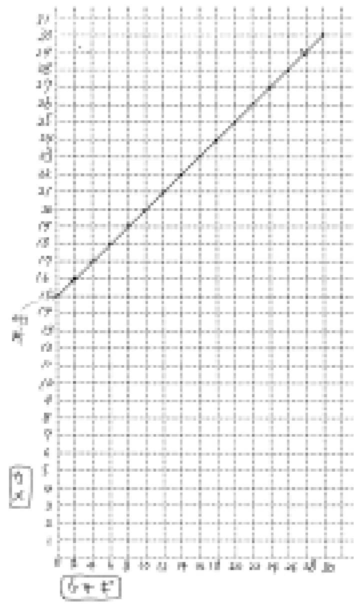


図４　問題２のグラフ

また，グラフの切片の説明をここで行った。装置の出発地点にあたるものであるため受け入れられやすかった。

> 問題３：ウサギがカメに追いつくのは目盛りがいくつの時ですか。答だけでなく考え方がわかるように詳しく書いて説明してください。

問題３では，軸の太さと出発地点を変えた装置を教師用に１台だけ用意した。課題を解決するためにどんな情報がほしいか問うた。すると，軸の太さと出発する位置が知りたいという声が上がった。教師は，ウサギのブロックは０目盛りからスタートして６回転で15進み，カメのブロックは10目盛りからスタートして６回転で12進む, という情報を与えた。

生徒は，増加量から１回転あたりの進む量を計算し累加で二つのブロックの位置が同じになるまで表を書いて解を求めた。変化の割合の説明はここで行った。また，提示された

情報から６回転で15と22，12回転で30と34，18回転で45と46とする解法も考えられるが，このような考えで表を書いた生徒はいなかった。

この後，表からグラフを書く活動を行った。回転数と動いた距離のグラフ，回転数と位置のグラフの二つである。生徒には表とグラフ用紙だけ配り，グラフを書くように指示をした。ある生徒は次のようなグラフを書いた；

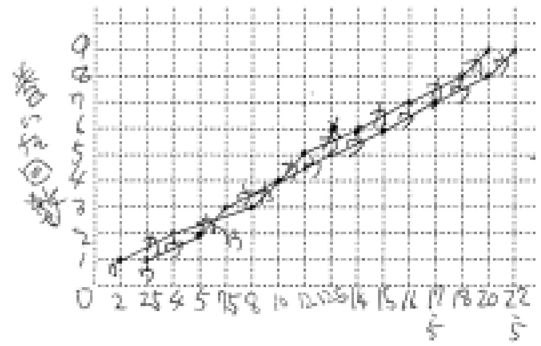


図５　問題３のグラフ

グラフの一般的な表記の規約指導が不足していたためと考えられる。

6.2 動きの見えない事象を用いた授業での活動の様子

> 問題５：机の上に，高さ２ cm の積み木が25個積んであります。その積み木を上から１つずつとって，同じ机の上にある10cm の台の上に積み直します。その時に，机の上に元々積んであった積み木の高さと，台の上に積み直した積み木の高さが同じになるのは，何個積み直したときでしょうか。表を書いて解きましょう。

問題５は変化の割合が負になる場合を扱うために減少する事象を取り上げた。問題には積み木の図はない。ここでは表の操作を意図した。動きを再現する手段として表をつくることに習熟してほしいということと，表を読みとり事象の動きをイメージ出来るようになってほしいというねらいがある。実際の授業は二つの場面に分かれている。前半は問題解決の場面。後半は表から式・グラフをつくる場面である。

積み木一つの高さと個数から全体の高さを50　と求めることの出来た生徒は表を書くことが出来ている。表を書き出すことの出来ない生徒に対しては，黒板に積み木の高さと台の上の積み木の高さの表の始めの部分を提示した。表は２　ずつ増加，減少していくもの，10　ずつ増加，減少していくものである。独立変数にあたる動かした個数を１ずつ変化させた表を書いた生徒が多い。20　ずつとか10　ずつ変化させた表を書いている生徒は15名中４名と少数である。また，動かした個数を独立変数にして表を書いた生徒はプリントを見る限りでは少ない。

後半で，表から式を求めさせる課題を出した。記号的表現の書き換えである。従属変数が二つある表やグラフを扱うことが困難であることはこれまでの授業の中でも見られた。そこで表を二つに分けて始めの部分だけ提示した。生徒は表をもとにして式をつくる活動に取り組んだ。$y=50-2x$，$y=10+2x$ のように切片を前に出した式をつくった生徒４名いた。そこでは，生徒は例えば，50を机の上の高さ，-2を減っていく数，x を動かした個数と話している。これは，問題の状況が50　，10　の高さからスタートするため，場面をそのまま表現したものと考えられる。

この問題の後でグラフから問題文をつくる課題を提示した。次の通りである；

> 問題６：積み木を使った問題で次のようなグラフが出来ました。どのような問題だったのでしょうか。ことばで書きましょう。

記号的表現であるグラフから事象を見直させる問題である。グラフから切片や傾きを読みとり，積み木の高さや積み木一つあたりの高さを求めなければならない。

6.3 変化の割合を扱った授業

> 問題７： ウサギとカメが同時に出発して35km離れたゴール地点まで競争することにしました。ウサギは１時間で2.5km 進み，カメは１時間に１ km 進みます。スタートして５時間たってみたら差がかなり開いていたので，カメはイヌに代わりに走ってもらうことにしました。イヌは１時間で何 km のスピードで走ればウサギに追いつけるでしょうか。

教師は５時間後までの表を書いた後，具体的な値としてイヌが１時間に３　で走るとしたらどうなるか，という問題にして事象の状況をつかませようとした。

生徒たちと会話をし，ウサギのほうが早くゴールすることを予想した後，表とグラフを書くように指示した。さらに，イヌが１時間に４　で走るとウサギより早くゴールすることを表やグラフを使い確かめた。

ある生徒は，１ます右に動いて４ます上がるという方法でグラフを書きながらながら「もう追いついたっぽい」という発話をしている。グラフから事象を振り返ることが出来ている。このようにして問題場面の状況をイメージできるようにした後で次の問題を提示した；

> 問題８：イヌは１時間に３ km のスピードではウサギに追いつくことが出来ませんでした。ウサギと同時にゴールするためには，１時間に何 km で走ればよかったのでしょうか。

解決するためには９時間で30　走るときの速さを求めることになる。そのため，表の枠を一つずつ数えて９時間であることを探した。教師は多様な解き方を板書させた。直接計算を使う方法，表から求める方法，グラフから求める方法である。それぞれを生徒に説明させ，表記どおしの関連をつけさせるだけでなく，事象との関連づけも意識させるようにした。

6.4 動点問題

> 問題10：右の図のような長方形 ABCD があって，P は A から出発して，１ cm/秒の速さで，周上を B，C を通って D まで　移動します。P が　A を出発してから x 秒後の△ PDA の面積 y cm^2 は，x の変化につれて，どのように変わるでしょうか。

問題文から，動くイメージをもてないためか点 P が長方形の頂点にきた図しか描けない生徒が見られた。

そこで，一つの図に１秒毎の動いた点を書いたものと，１秒後との図を複数枚書いたものを取り上げ黒板に提示した;

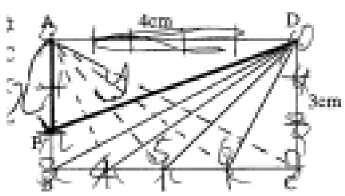


図６　問題10の図

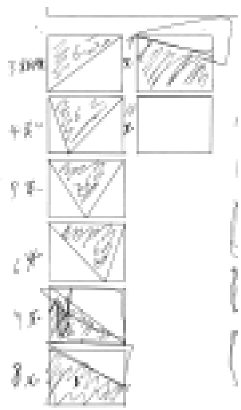


図７　問題10の図

活動の進まない生徒に対してはこれらの図を参考にするよう勧めた。三角形の面積を求める計算式を縦に複数書き出した生徒がいた。一つ一つの三角形の面積を計算したものであるので説明を聞いていた生徒も納得していた。また，別のある生徒は面積を求める複数の計算式をもとにして，変化する数を x

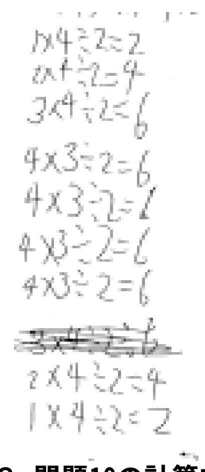


図８　問題10の計算式

に置き換えて関数式を求めていた。

7．考察

7.1 事象を分析するために動きを紙上に再現し，学習の対象をつくる

事象を関数的に分析するための第１歩は動きを捉えることである。動きの変化を捉えるためには連続的な動きを瞬間，瞬間で捉えていく作業である。問題１で Greeno の装置を操作した結果，「２：１」や「15ずれていること」や「５進むときに10進む」ということ見つけて，記録している。問題３では教師が装置の情報を与えた。しかし，これだけでは活動が進まない生徒がいる。与えられた情報を，自分の言葉で動きを捉えるのに時間がかかっている。例えば，「６回転させると12だから22」ということばで捉え直している。また, 問題７では「ウサギは１時間に2.5　」「カメは１時間に１　」という情報が問題文の中にあり抵抗なく受け入れて，動きを再現する活動に使っている。

これらの三つの場面で共通してみられるようにまず第１に，問題場面の動きを部分的に捉えることが大切である。第２に捉えた動きを使って，改めて事象全体の動きを作り直すという作業が必要になる。

桐山(1999)は生徒自身が事象から変数を見いだしてくる場面が必要であるとし，Greeno の装置を使った研究をしている。そして，変数間の関係を構成していく過程において，次のような理解の水準を提出している；

(1)　前従属変数を構成する
　　動きを現象から部分的に構成する
　　動きを全体的に構成する
(2)　前独立変数によって動きを捉える
(3)　独立変数と従属変数の関係を捉える

(p.70)

生徒の活動は桐山の水準の(1)の　　に一致している。　は装置から「２：１」や「15ずれていること」や「５進むときに10進む」ということ見つけたり，教師が与えた情報から「６回転させると12だから22」と捉え直す場面である。　は　をうけて図を書いたり表を作ったりしている場面である。問題１では図的表現が，問題３や問題７では表が動きを全体的に動きを構成することに役立っている。

7.2 記号的表現を事象のことばで説明する

出題で工夫したことは，答を求めるだけでなく説明をするように求めたことである。また，最後の解答の時だけに説明させるのではなく，解決の糸口のつかめない生徒に対してヒントを与えるために，時間の途中で解答の一部分だけ説明させることもした。

問題がすべて事象に依存しているため，生徒は説明で事象の動きを表すことばを使っていた。このようなことは当たり前と言えるが，考察する対象が動きを持っていて，その動きをつかむことが，一次関数の学習で難しいことである。

また，解決のために書いた表現が絵や図ではなく記号的表現である表・グラフ・式であっても，説明をするときには事象の動きを示すことばを使って説明している(または，使うように促している)。事象の動きを表すことばを使うことで，記号的表現の説明もしやすくなり，考えが共有されやすくなった。

8．おわりに

教授実験という特殊な授業場面であった故の反省点もある。第１に生徒から出された考えを議論にかけたりまとめたりする場面がないことである。これは，表現をもとに一人一人がどのような解決をしていくかに注目したため，教授方法として取り入れなかった。第２に表現の規約的な指導が不足していたことが上げられる。

しかし，絵や図は動きを再現する際に生徒にとって使いやすいものであること，記号的表現を扱うときに事象の動きを表すことばを使うことで理解が進むことが教授実験から見えてきた。今後は事象から形式的な表現への過程に現れる絵や図のようなものを大切に扱うとともに，表現の規約指導を含めた授業実践を行わなければならないと考える。

註

1)授業の構想

主　問　題	主　な　表　現 「」発言，()身振り	関数との関連事項

＜＜実際に操作できる状態での事象に依存した問題＞＞

１時間目. 問題の状況を図や式で書くことにより，動きを変数としてとらえさせる。

トンネルがありトンネルの出口は29のところです。ウサギとカメではどちらが先にトンネルをでてきますか。考え方がわかるようにプリントに書きなさい。	･「～ずつ」「１進むとき，･･」 ･(１回転ずつ回す) ･(指で目盛りを数える) ･累加的に表を書いていく	・部分的に動きをとら え ようとする⇒回転 数を独立変数 ・増え方が一定⇒変化 の割合が一定

２時間目. 装置を超えた範囲の時，装置を離れ，自分が作り出した「解くためのプロセス」を使って答を求めさせる。

ウサギが100目盛りに着いたときにカメはどこにいますか	･「はみ出る」 ･単位を大きく取って累加的に書いた表 ･グラフを延長する ･ｙ=2x から計算する	･20ずつでも10ずつにしても解ける⇒変化の割合 ･回転数がｶﾒとｳｻｷﾞの動きを決める⇒独立変数
ウサギが勝つようにするためにはどうすればいいですか。	･「速くする」「出発地点」	･速さと出発地点が全体の動きを決める

３時間目. 状況から動きをとりだし，動きを部分的に構成するときに必要な条件について意識させる。

ウサギがカメに追いつくのは目盛りがいくつの時ですか。どんな情報がほしいですか。	･「速さ」「１回転あたりどれだけ進むか」「軸の太さ」「出発地点」	･動きを決めるものが変化の割合と切片であるという意識
20回転のときは調べてあります。○○です。このデータを使ってどんな方法でもいいので解いてください。	･○○÷20	

４時間目. 変化の割合が負になる状況の問題を，自分が作り出した「解くためのプロセス」を使って答を求めさせる。（これまでの３時間の授業の評価）

長くて太い線香と短くて細い線香があります。片方が燃え尽きたときにもう一方はどれだけ残っているでしょうか。 何を調べればいいですか。	・「１分間に燃える長さ」「一方が１ cm 燃えたときのもう一方の燃えた長さ」 ・実測した表 ・表から求めた1cm あたりや１分あたりの燃える長さ	・変化の割合が負の場合 ・表から変化の割合を求める

＜＜実際に操作できない状態での事象に依存した問題＞＞

５時間目. 実際に操作できないプリントで問題をあたえ，自分の解決プロセスを使って答を求めさせる。

積み木の上に，高さ２ cm の積み木が25個積んであります。その積み木を上から一つずつとって，机の上の10cmの台の上に積み直します。このとき，机の上に元々積んであった積み木と，台の上に積み直した積み木の高さが同じになるのは，何個積み直したときでしょうか。絵を描かないでやってみてください。	・表を書いて説明する。１個動かすと2cm減って，こっちは2cm 増える。元々50cmと10cm の高さで。	・表やｸﾞﾗﾌを説明するときに，事象と関連づけるような言葉がどのように使われるかを見る。
同じような問題で次のようなグラフができあがりました。どういう問題だったのでしょうか。	・元の高さは90cm と5cm で，２個動かすと5cm 増える。 ・10個動かすと，35cm になって同じ高さになる。	・グラフの切片から事象へ ・グラフの傾きから積み木の大きさ

６時間目. 事象に依存した問題を扱う中で，１次関数を求めさせる。

ウサギとカメが同時に出発して35km離れゴール地点まで競争することにしました。ウサギは１時間で2.5km 進み，カメは１時間で1km 進みます。 ５時間たってみたら差がかなりついていたので，カメはイヌに代わりに走ってもらうことにしました。イヌは１時間に何 km のスピードで走ればウサギに追いつけるでしょうか。 １時間に3km でやってみましょう。	・表を１時間ごとに累加的に書く ・グラフを表の値を使って書く ・グラフを１時間ごとに累加的に書く	・グラフ上で５時間で5kmのところの点から3km の速さにかえる⇒１組の x,yと変化の割合から式を求める
イヌは１時間に3km のスピードではウサギに追いつくことができませんでした。ウサギと同時にゴールするためには，１時間に何 km で走ればよかったのでしょうか。	・表で，イヌに交代した地点とゴール地点の値を入れ，間を埋める。 ・グラフで，イヌに交代した地点とゴール地点の点を書き込み，線で結ぶ	・グラフ上で５時間で5kmの点から，14時間で35kmの点に線を引く⇒２組のx,y から式を求める ・(y の増加量)/(x の増加

		量)＝(変化の割合)であることの定義

＜＜記号的表現を扱う問題＞＞

7時間目. 形式的な形で，１次関数を求めさせる。どのような表現を使って解いていくかをみる。

<table>
<tr><td>次のような１次関数の表があります。変化の割合が３なのだそうです。
x が６の時の y の値は求められますか。
<table><tr><td>x</td><td></td><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td></td></tr><tr><td>y</td><td></td><td></td><td>4</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>
式を求めなさい</td><td>･４に３ずつ加える。７,10,13,16,19で y＝19。

･x＝０の時の y の値が１。</td><td>･変化の割合と１組の x,y から式を求める
･３ずつ累加⇒変化の割合が一定</td></tr>
<tr><td>形式的な練習問題</td><td></td><td></td></tr>
</table>

8時間目. 形式的な形で，１次関数を求めさせる。どのような表現を使って解いていくかをみる。

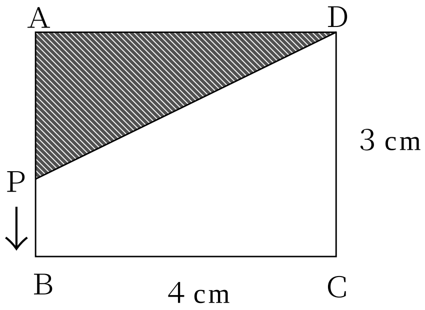
<table>
<tr><td>次のような１次関数の表があります。x が８の時の y の値は求められますか。
<table><tr><td>x</td><td></td><td>2</td><td></td><td>5</td><td></td></tr><tr><td>y</td><td></td><td>3</td><td></td><td>9</td><td></td></tr></table>
式を求めなさい</td><td>・３と９の間の６を３等分して２。２ずつ増えるから，３,５,７,９となる。同じように９のあとも，９,11,13,15となる。
・y は２ずつ増えるから,x が１の時は１,x が０のときは-1と　なる。変化の割合が２だから，式は y＝２ x－１となる。</td><td>･２組の x,y から式を求める
･間を３等分する⇒変化の割合が一定</td></tr>
<tr><td>形式的な練習問題</td><td></td><td></td></tr>
</table>

9時間目. 形式的な形で，切片と変域と関連する問題を解かせる。どのような表現を使って解いていくかをみる。

<table>
<tr><td>y＝２ x＋３がカメの動きを, y＝２ x がウサギの動きを表すとします。５から10目盛りのところにトンネルがあるとします。カメがトンネルに入り始めるのは何回転目からでトンネルから頭を出すのは何回転目の時でしょうか。また，ウサギはどうでしょうか。</td><td>･計算する
y＝2x＋3＝5　　　x＝１
y＝2x＋3＝10　　x＝3.5
カメは１回転から3.5回転
･表を書いて x が５から 10の対応する y の値をみる</td><td>･５～10⇒5≦ y ≦10
１～3.5⇒1≦ x ≦3.5
変域</td></tr>
<tr><td>ウサギはカメに追いつくでしょうか。</td><td>･｢同じ速さだから追いつかない｣</td><td>･追いつかない⇒グラフが平行，傾きが同じ</td></tr>
</table>

＜＜まとめの問題＞＞

$\boxed{10時間目}$．動点問題を解かせる。

右の図の長方形 ABCD があって，P は A から出発して，１ cm/秒の速さで，周上を B，C を通って D まで移動します。P が A を出発してから x 秒後の△ PDA の面積 y　cm^2は，x の変化につれて，どのように変わるでしょうか。  	･三角形の面積をいくつも計算する。 ･表を書く。 ･表を書いてからグラフを書く ･表を３つに分ける ･グラフを３つに分ける	･増える　→　一定　→　減る

2)本文で取り上げなかった問題は次の通り。

$\boxed{問題４}$：20cm の細い線香と，12cm の太い線香があります。一方が燃え切ったときにもう片方は何残っているでしょうか。答だけでなく考え方がわかるように詳しく書いて説明してください。

$\boxed{問題９}$： xを回転数としたとき，$y＝２\ x＋３$がカメの位置を，$y＝２\ x$がウサギの位置を表すとします。５から10の位置のところにトンネルがあるとします。カメがトンネルに入り始めるのは何回転からで，トンネルから出てくるのは何回転の時でしょうか。また，ウサギはどうでしょうか。

主な参考文献

Dorfler,W．(1989)．Protocols of actions as a construction of cognitive schemata from actions．*Proceedings of the 13th PME Conference 1*，212-219．

花形恵美子．(1990)．文章題の解決過程における絵の役割．日本数学教育学会誌，*72*(12)，28-36．

平林一榮．(1973)．数学教育の課題　：表記論的に見た数学教育の問題．広島大学教育学部紀要第１部，*22,* 177-186．

菊池光司．(1996)．算数の問題解決における図的表現の働きに関する研究．日本数学教育学会誌，*78*(12)，2-7．

桐山眞一．(1999)．中学生における関数の理解に関する研究：一次関数を事例として．上越数学教育研究，*14*，61-72．

Meira，L．(1995)．The microevolution of mathematical representations in children’s activity．*Cognition and Instruction，13*(2)，269-313．

中原忠男．(1995)．算数・数学教育における構成的アプローチの研究．　聖文社．

布川和彦．(2000)．数学的問題解決における図と情報の生成．上越数学教育研究，*15*，9-18．

澤田利夫．(2001)．学力は低下しているか：学力調査　中間報告．平成12年度科学研究費補助金研究成果中間報告書．

東京都中数研関数委員会．(1986)．中学校での関数指導について（その１）．日本数学教育学会誌，*68*(11)，23-30．

山口武志，飯田慎司，中原忠男，重松敬一，岩崎秀樹，植田敦三，小山正孝．(2001)．中学生の数学的能力に関する調査研究：「図形・関数」調査結果の分析．日本数学教育学会誌，*83*(3)，2-11．