数学教育における実験・観察の役割に関する研究

江口　賢哉
上越教育大学大学院修士課程１年

１　はじめに

1.1 研究の動機

現場の数学教師は，全ての生徒が学習内容を理解することを理想として教材研究を行い，授業に臨んでいる。

しかし，現実には学力差が大きい生徒集団を相手に全員が理解できる指導を行うことは，非常に困難なことである。生徒達が少しでも学習内容を理解するために，教師側で「学習課題の工夫」,「発問の工夫」といった方策をとりながら授業を進めていることだろう。

筆者は，これまで中学校の数学教員として教育現場の数学教育に携わってきた。そこでは，授業の進め方への工夫として導入課題で「実験・観察」の活動を意識的に取り入れた授業の試みを行ってきた。

例えば，円周角の導入において行った「実験・観察」を利用した授業では，グラウンドに描いた円周上に生徒を等間隔に立たせ，メガホンを覗く実験を行った。円周上からメガホンを覗く方向と覗いて見える人数の変化を予想させ，実際に覗いて確かめる活動の中から，弧の長さと円周角の関係に気づかせていこうと狙った授業である。この授業では，生徒は大変意欲的に取り組んだと筆者は実感している。教室を離れての活動であったことの影響も少なくないと考えられるが,「人がまばらに見える正面よりも隣との間隔が狭く見える両端の方の人数が多く見える」と予想した多くの生徒達が，確かめる活動において見える人数が同じことを知り,「あれっ？」という声には，意外性や驚きが含まれていた。

このように，導入課題おいて実験や観察を取り入れた授業を組むことは生徒の興味や関心を引くものであることは確かであると考える。また，何よりも数学があまり得意でない学力の低位の生徒に対しても，学習に対する意欲づけや授業に参加できる喜びを与えることができたと考える。

しかし，このような「実験・観察」を導入課題とした実践例は，筆者自身だけでなく，教科書での学習内容の扱いを見ても非常に少ない。また,「実験・観察」の活動後の授業への参加意識が低下することや情意面だけでなく授業に取り入れた「実験・観察」の役割の違いも筆者には気になっていた。

そこで，数学教育において「実験・観察」がどのような役割をもち，どのような場面で導入すればどのような効果が期待できるのか。これらをより明確にすることによって，筆者の疑問を解決するだけでなく，授業の様々な場面への「実験・観察」の導入への示唆が得られると考えたのが，本研究への動機である。

1.2 研究の目的

本研究の目的は，数学の授業において「実験・観察」をどのような場面でどのような効

果が生じるのかを考察し,「実験･観察」の役割について明らかにすることを通して,「実験・観察が数学的活動には不可欠な一部であること」の位置づけと授業において「実験・観察」を取り入れる場面の可能性への示唆を与えることである。

本稿では,「実験･観察」の取り入れる場面と効果について考察し,「実験･観察」の役割をより明確にする。

そのために，まず Polya(1959)から「実験・観察」と「帰納的な考え方」との関係について考察する。また,「思考実験」や「数学的モデリング」といった「実験・観察」に関わる先行研究を概観し,そこで述べられている「実験・観察」の扱われ方や役割について示す。

次に，どういう場面で実験・観察をすればどのような効果があるのか，その足がかりとして，一つの具体的な授業実践で取り上げた学習課題に対する筆者の解法過程をたどり,「実験･観察」の思考過程への取り入れ方とその役割を内省的に考察する。

２　「実験・観察」の役割に関する研究の意義

平成10年12月に学習指導要領が改正され,目標の中に新たに「数学的活動の楽しさ」という文言が付け加えられた。この部分について,次のような記述がある。（下線は筆者が加筆）

> 今回の改訂で新しく「数学的活動の楽しさ」を知ることが加えられた。これは，平成元年に目標に入れられた「数学的な見方や考え方のよさ」を知ることに加えて，さらに情意的な側面を大切にし，数学を学ぶことへの意欲を高めるとともに，<u>数学を学ぶ過程を大切にするとの趣旨によるものである。</u>単にでき上がった数学を知るのではなく，<u>事象を観察して法則を見つけて事柄の性質を明らかにしたり，具体的な操作や実験を試みることを通して数学的内容を帰納したりして，数学を創造し発展させる活動を通して数学を学ぶことを経験させ</u>，その過程の中に見られる工夫，驚き，感動を味わい，数学を学ぶことの面白さ，考えることの楽しさを味わえるようにすることが大切である。その過程においては，数学的な考え方も大いに用いられ，数学的な見方や考え方も高まることが期待される。(p.14)

この記述は,「実験・観察」が「数学を学ぶ過程を大切にする」ということが,「数学を知る」という数学的側面だけでなく,「工夫，驚き,感動を味わい,数学を学ぶことの面白さ,考えることの楽しさを味わえるようにする」という情意面を含む教育的側面からも教育効果が期待ができることに言及したものと捉えることができる。

したがって，本研究にて「数学的活動」の一部として捉えることができる「実験･観察」が，どのような場面やタイミングで授業に取り入れれば，どのような教育効果が期待できるのかを整理しておくことは，より効果的な授業改善に向けて示唆を与えるものと考える。

そこで，以下に「実験･観察」に関わる先行研究を概観し，それぞれの立場での役割について考えてみたい。

３　「実験・観察」を利用した先行研究

3.1 帰納的な考え方

高木(1970)は数学者ガウスの数学に対する態度について，次のように述べている。

> ガウスが進んだ道は即ち数学の進む道である。その道は帰納的である。特殊から一般へ！それが標語である。それは全ての実質的なる学問に於いて必要なる条件であらねばならない。 (p.57)

「実験・観察」を取り入れたような「帰納的な考え方」を含んだ授業を通して，ガウスが楕円関数論をはじめ多くの功績を残したように,隠れている規則性や法則の発見につながる「自ら見つけ出したり創造したりする態度」を身につけることが期待できると考える。

高木が論じたガウスの数学に対する態度は,前述した学習指導要領の「数学的活動の楽しさ」に関する記述の一部（前述下線部）にも見られることから,「数学的活動」の本質的な一部であることを示唆している。

Polya(1959)は帰納的な考え方について,次のように述べている。

帰納は物事の観察から始まることが多い。(中略)

こうしてわれわれは一つの推測を構成するに至った。この推測は帰納によって発見された。すなわち，それは観察によって暗示され，特別な二三の実例によって支持されたのである。　（中略）

このようにして明瞭に組み立てられた一つの一般的命題に達したのであるが，それは，しかし，単に一つの推測であり，暫定的なものに過ぎない。いいかえれば，その命題はぜんぜん証明されていないし，どう見たって真であると主張することはできないもので，単に真理に近づく一つの試みに過ぎない。

しかしながら，この推測は，経験と，「事実」と，「実在」と，ある暗示的接触点を持っている。(中略)

以上の注意をしたことで，我々は帰納的手続きの第一段階をおおざっぱに述べたわけである。(pp.2-4)

Polya(1959)は，帰納的な考え方の出発点として，「実験・観察」をあげ，ゴールドバッハの推測を事例にして，帰納的な考え方の段階を暗示的接触と支持的接触の2段階に分けている。この区別について，次のように述べている。

上に調べた特別な場合について，二つのグループを区別することができよう：推測を構成した以前のものとその後にきたものと，前者は推測を暗示したものであり，後者はそれを支持したものである。どちらも推測と「事実」との間のある種の接触を与える。表自身は別に，「暗示的」接触と「支持的」接触を区別してはいない。(p.6)

また，観察などによる「暗示的接触」により構成された推測が，幾つかの特別な場合について確かめる「支持的接触」によって，その信頼度を増すという性質についても触れている。Polya が「帰納は物事の観察から始まることが多い」という言葉には，「実験・観察」がもつ性格によるところが大きいと考える。それは，Polya の記述からも読み取れるように，「観察」はそれ自身よって暗示された１つの推測を帰納による発見に導く役割をもつ場合があるということである。

3.2 思考実験

思考実験を科学の方法論の立場から捉えたのが，Popper(1971)である。思考実験が，ある仮説から演繹的理論によって何らかの予想がたてられ，その予想を実験あるいは観察などによる帰納的な方法によって確認するという手続きで科学的な発見がなされるという立場である。そして，Popper(1971)は，「思考実験」を批判的用法，発見的用法，弁護的用法の３つの様相分けている。

批判的用法とは，思考実験によりある可能性が無視されていることを示すことによって理論を批判すること。発見的用法とは，思考実験を理論の例証や説明のために用いること。そして，弁護的方法とは，思考実験を理論への批判的な意図や擁護的・弁護的意図をもった論証として用いることとしている。

森田(1991)は Popper が分類した「思考実験」の三様相，つまり批判的用法・発見的用法・弁護的用法を数学教育の場に適合するように，それぞれ反例的用法，支持的用法，説明的用法という語に置き換えている。

反例的用法とは，反例を見出したり背理に導くこと。支持的用法とは，ポリアのいう支持的接触の段階と同じで，前提を確かめた結果が，証明されたわけではないが，支持され信頼性が増した状態に導くこと。説明的用法とは，思考実験を理論の不備を補ったり，理論の説明に利用することと述べている。

森田の主張する思考実験の３つの用法には「実験・観察」が含まれるものと考える。「実験・観察」で得たものを根拠として，理論を批判したり（批判的用法），理論の信頼性を支持したり(支持的用法)，説明の補足に利用したり（説明的用法）するのである。

したがって，「実験・観察」には，思考実験の３用法には欠かせないものであると考える。

3.3 数学的モデリング

Blum(1995)は，数学的モデリングを現実場面から数学的モデルへと導く「モデルのプロ

セス」, あるいは問題解決過程に応用されるもの全体，あるいは現実世界を数学に関係づけるすべての方法と位置づけ，数学的モデリングの過程を下図(図１)のように表した。

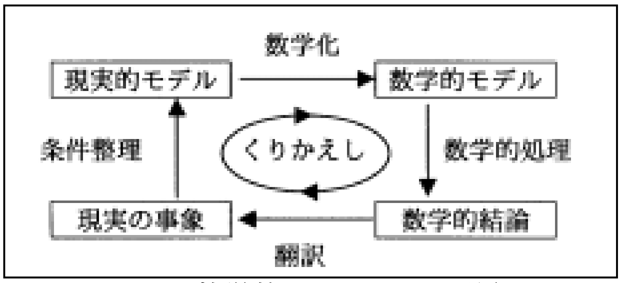

図１　数学的モデリングの過程

Blum は，問題解決過程について，数学的モデリングの過程との関わりから次のように述べている。(下線部は筆者の加筆による）

> 問題解決過程は，特定の数学的結果が得られる数学の範囲内で，適当な方法や作業を選ぶことによって持続する。これらは，本来の状況に関して解釈されるために，現実世界に再翻訳されなければならない。(中略)
>
> 解釈の段階で潜在的に多くの落とし穴があるため，もし現実で矛盾が生じたら，全体のサイクルが再び始まらなければならない。(pp.3-4.)

「実験・観察」を利用し，現実場面を題材にした数学的モデリングの授業研究として，大澤(1997)の「リレー問題」がある。

大澤は，この実践において，数学的モデリングの過程の中の随所に「実験・観察」を取り入れている。例えば, 数学化を図る前の「現実の問題」として，各個人の走力のデータをとる「実験」を行っている。また,「数学的処理の段階」においても, 測定したデータがどのような関数になっているか，表やグラフの「観察」して読み取っている。さらに「翻訳する段階」では，数学的処理によって導かれた結果を現実に戻って検証するために，実際に全員リレーをする「実験」を行っている。

そして，これら一連の活動を通して，現実場面の問題を数学で考えることの有用性について，生徒に感じさせることができたと結論づけている。

Blum の「もし現実で矛盾が生じたら，全体のサイクルが再び始まらなければならない」という言葉を，大澤の事例に当てはめて考えると，最後の検証実験で学習者が思ったような成果があげられなかったとき，修正したり，もう一度考え直したりして「数学的モデリングの過程」が再び始まることを表している。

この事例に見られるように,「実験・観察」は，数学的モデリングの過程において，再びサイクルが始まるか否かを決定づける必要不可欠な活動であると位置づけることができる。

3.4 先行研究に見る実験・観察の役割

3.1 から 3.3 において,「実験・観察」に関わる先行研究を概観してきた。それらから，次の４つの「実験・観察」の役割について示唆を得たと考える。

①推測を帰納による発見に導く役割
②推測に対する棄却または信頼度を増す役割
③理論への不備を補う役割
④数学的モデリングの過程の循環を維持する役割

そこで，次の章では１つの事例をもとに，筆者が課題を自分で解いたときにたどった思考過程から，どこで実験・観察を利用して解いたか，それはどんな点で有効であったのかを考察することによって, 実験･観察が必要な場面とはどのような時なのか。その実験・観察によって次にどのような方向に思考過程が向けることができるのかについて明らかにする。その事例に関する「実験･観察」の考察を通して, 今までに考察し, 明らかになった「実験・観察」の役割について，さらに検討しようと考える。

4　一つの事例による解決活動

4.1 実践事例の概要

この実践事例は, 筆者が平成 13 年度上越教育大学大学院の実践場面分析演習Ⅰにおける演習で行った模擬授業での事例である。

この模擬授業にて筆者の用意した課題は次のものである。

> サイコロを振って出た目が大きかったら勝ちというゲームをするにあたり、次の条件をもとにして、自分なりにサイコロの目を変えて変則サイコロを作ります。
> あなただったら、どんな目のサイコロを作りますか？あなたが考える最強のサイコロを作りましょう。
> ―条件―
> ・サイコロの目の数の和が 21 になる。
> ・さいころの目は自然数とする（自然数であれば、７以上でもよい)。
> ―例―
> (2,2,2,5,5,5) (2,3,4,4,4,4) (1,1,1,1,1,16)

この課題で「最強のサイコロ」とは，どの面についても上になる可能性が同様に確からしいサイコロを利用して上記のような対戦を行うとき,「最も有利になる目をもつサイコロ」，つまり対戦表を作成したときに「〇の方が×よりもたくさんできる可能性があるサイコロ」のことを指す。

4.2 筆者の解決過程-自分で解いた解決過程-

筆者がこの課題をどのように解いたか。また，そのとき何を考え，次にどのような行動をとったかを以下に示す。

①課題を読んだ段階（文脈からの推測）

この課題を見てまず初めに考えたことは,「有利不利は本当にあるのか？」,「でも，こんな課題の出され方をするのだから，きっと有利不利はあるだろう」ということである。

その根拠は，例で示された(2,2,2,5,5,5)と(1,1,1,1,1,16)の比較にある。

(1,1,1,1,1,16)は，16 の目が出れば必ず勝てるが，１の目だと確実に負ける。１の目の箇所が圧倒的に多いので，普通に考えれば不利である。これによって，少なくとも有利不利は存在するだろうと考えた。

では，(2,2,2,5,5,5)と(2,3,4,4,4,4)の場合はどうだろうか。これは，少しだけ(2,2,2,5,5,5)の方が有利なようである。その理由は, (2,2,2,5,5,5)が５の目のとき確実に勝てるが，２の目のときは必ずしも確実に負けるわけではない。つまり，(2,2,2,5,5,5)の目のうち, 半分(５のとき)は確実に勝ち，もう半分(２のとき)は引き分けの可能性もあることから, (2,2,2,5,5,5)の方が多少は有利であると考えた。

この考え方は, (2,2,2,5,5,5)のように比較的考えやすい目の組み合わせだったためよかったが，もう少し複雑な目の組み合わせでは考えるのが大変である。

そこで，対戦の有利不利を判断するために目の出方全てを一覧表にした対戦表を(右表２)を作ることにした。

	2	3	4	4	4	4
2	△	×	×	×	×	×
2	△	×	×	×	×	×
2	△	×	×	×	×	×
5	○	○	○	○	○	○
5	○	○	○	○	○	○
5	○	○	○	○	○	○

表２　対戦表

②対戦表の作成（対戦表の観察）

対戦表を作ることにより，〇×の個数を観察・比較することで，一目で有利不利を判断することができるようになった。しかし，１つの対戦は対戦表で有利不利が判断しやすくても，果たしてどの目の組み合わせが「最強のサイコロ」に当てはまるものなのかが分からない。そこで，全てのパターンを調べるために目の組み合わせが何通りあるのかを調べることにした。

③総当り調べ(正六面体から正四面体へ)

全ての場合について対戦表を作り，その対戦結果を総当り表にまとめるために，課題に提示されている条件（和が 21，目は自然数）に合う全パターンを手書きで書き出した。すると，正六面体の場合は 110 通りの目の出方があることが分かった。

これでは，総当りパターンが $110^2=12100$ 通りという膨大な数になり，限られた時間内でとても調べきることができる数ではない。

そこで，正六面体ではなく，正四面体とい

う面の数を少なくしたサイコロを想定し，総当りで調べることにした。

正四面体では, 目の条件が次のようになる。

・サイコロの目の数の和が 10 になる。

・さいころの目は自然数とする（自然数であれば，５以上でもよい)。

この条件下では，目の組み合わせが全部で９通りになり，総当りのパターンが$9^2=81$通りになる。この全パターンをコンピュータを利用して総当り表を作って調べることにした。その結果が次の表（表３）の通りである。

	1234	1333	2233	2224	1144	1225	1135	1126	1117	有利	不利	同等
1 2 3 4	△	△	△	△	△	○	○	○	○	4	0	5
1 3 3 3	△	△	○	○	×	○	○	○	○	6	1	2
2 2 3 3	△	×	△	○	△	○	○	○	○	5	1	3
2 2 2 4	△	×	×	△	○	○	○	○	○	5	2	2
1 1 4 4	△	○	△	×	△	×	△	△	○	2	2	5
1 2 2 5	×	×	×	×	○	△	○	○	○	4	4	1
1 1 3 5	×	×	×	×	△	×	△	△	○	1	5	3
1 1 2 6	×	×	×	×	△	×	△	△	○	1	5	3
1 1 1 7	×	×	×	×	×	×	×	×	△	0	8	1

表３　正四面体での総当り結果

④正四面体の総当り表の観察

正四面体での総当り表（表３）の観察から気がついたことは，次の４点である。

ア．基本形(1,2,3,4)に不利はない。

イ．基本形は，対戦相手が５以上の目を含む場合，必ず有利になる。

ウ. (1,3,3,3)が有利になることが最も多い。

エ．(1,1,1,7)は有利になることはない。

この対戦表の観察を通して得られたことは, 最強の定義が曖昧で,「何をもって最強か」の観点の設定が不可欠となった。

しかし，その最強の観点を「不利にならないこと」にするのか,「有利なパターンが多いこと」にするのか, どちらを重視すべきか決めかねた。それよりもむしろ「ア．基本形(1,2,3,4)に不利はない」と「イ．基本形は, 対戦相手が５以上の目を含む場合，必ず有利になる」に目が向き，正六面体でも同じようなことが起きているのか気になった。

⑤正六面体の対戦表の観察

そこで，正六面体の基本形(1,2,3,4,5,6)についてのみ，全パターン(110 通り)との対戦表を作り，有利不利の関係について調べることにした。

正四面体のときと同様に，コンピュータで対戦表を作成し，基本形 VS 全てのパターン(110 通り)について対戦表を作り，観察を行った。

有利	78
不利	0
同等	32

表４
基本形(1,2,3,4,5,6)の有利不利（全体）

有利	0
不利	0
同等	32

表５
基本形(1,2,3,4,5,6)の有利不利(６以下の目のみ)

その結果, 基本形(1,2,3,4,5,6)は正四面体のときと同様に，全てのパターンに対して不利になることはなく（図４参照)，しかも１～６の間の数を利用して作った目の組み合わせに対しては必ず同等に，そして７以上の数を使うと基本形よりも必ず全てが不利になることが分かった（図５参照)。

・基本形は不利にならない。

・１～６までしか使わない目の組み合わせは，基本形と同等になる。

・７以上を使うと基本形よりも必ず不利になる。

この３つの気づきは正四面体と正六面体に共通していることから,「まず間違いないだろう」という確信めいたものは感じたが,「なぜそのような規則性が成り立つのか」ということについての根拠ある説明ができるまでには程遠い状況であった。

⑥仮説の設定と解決に向けての手だて

④⑤での観察を通して,「基本形の最大値より大きな数の目を使うと基本形よりも不利になる」という予測はできた。この予測が正しいことを説明するために，対戦表での○×の細かな変化を調べることにした。それは，今までは対戦表や総当りの結果の表全体を観察して共通点を探し出してきたが，基本形対基本形の対戦表からごく一部の数値を変更して○×の最小限の変化を観察することを通して，変化の仕方に関する規則性を見いだそうとしたからである。多くの箇所を変更しては，たとえ何らかの規則性があったとしても，その原因を特定することは難しい。しかし，ごく一部だけを変化させる中で，何かしらの規則性が生じたならば，その原因を特定することは可能であると考えたからである。

⑦対戦表の操作と変化の観察

そこで，基本形(1,2,3,4,5,6)VS 基本形の対戦表（表６左）と基本形 VS 基本形の６を７に，２を１に変えた目(1,1,3,4,5,7)の対戦表(表６右)を比較・観察し，何かしらの規則性

①基本形(1,2,3,4,5,6)

＼	1	2	3	4	5	6
1	△	×	×	×	×	×
2	○	△	×	×	×	×
3	○	○	△	×	×	×
4	○	○	○	△	×	×
5	○	○	○	○	△	×
6	○	○	○	○	○	△

②(6→7、2→1)

＼	1	2	3	4	5	6
1	△	×	×	×	×	×
1	△	×	×	×	×	×
3	○	○	△	×	×	×
4	○	○	○	△	×	×
5	○	○	○	○	△	×
7	○	○	○	○	○	○

表６　基本形と基本形の６を７（２を１）に変えたものの比較

を調べることとした。

表６での対戦表の変化を観察すると，２を１に変えた部分（上の→）では，○が△に，△が×に変わった。したがって，実質的には，○が×に変わっただけである（△は横に１つだけずれる)。また，６を７に変えた部分（下の→）では，△が○に変わった。

したがって，この２つを総合すると，△が１つ減り，×が１つ増えて，結果的に基本形よりも不利（15 勝 16 敗５分）になった。

同じように, 基本形を 1～6 の範囲で目の組み合わせを変化させたときについても，調べてみる。ここでの利用した目の組み合わせは，基本形の１を２に，６を５に変えた目の組み合わせ(2,2,3,4,5,5)で調べた（表７参照)。

①基本形(1,2,3,4,5,6)

＼	1	2	3	4	5	6
1	△	×	×	×	×	×
2	○	△	×	×	×	×
3	○	○	△	×	×	×
4	○	○	○	△	×	×
5	○	○	○	○	△	×
6	○	○	○	○	○	△

②(1→2、6→5)

＼	1	2	3	4	5	6
2	○	△	×	×	×	×
2	○	△	×	×	×	×
3	○	○	△	×	×	×
4	○	○	○	△	×	×
5	○	○	○	○	△	×
5	○	○	○	○	△	×

表７　基本形と基本形のうち２箇所を１～６の範囲で変えたものの比較

表７での対戦表の変化を見るとき，１を２に変えた部分（上の→）では，△が○に，×が△に変わった。したがって，実質的には×が○に変わっただけである(△は横に１つだけずれる)。また，６を５に変えた部分（下の→）では，○が△に，△が×に変わった。したがって，実質的には○が×に変わっただけである（△は横に１つだけずれる)。

したがって, この２つを総合すると, ○・×・△の位置が変わっているだけで，それらの数には変化がなく，結果的に基本形と同等（15 勝 15 敗６分）になった。

しかし，この観察からは○×の位置の入れ替りについては分かるが，規則性までの特定は難しく分からない。

この観察をしている中で，説明をするために有効な１つの考えが生まれるのである。

⑧「ずらし」の考え方への移行

それは，○×△の帯が設定する数字によってずれるという考えである。

この考えは，表６の△の動きがポイントと

なって生み出された考えである。目の数が１つだけ増減するごとに，△の位置が１つずつずれるのである(表８参照)。

①基本形(1,2,3,4,5,6)

		0	1	2	3	4	5	6	7	
1		○	△	×	×	×	×	×	×	
2	←	○	○	△	×	×	×	×	×	
3		○	○	○	△	×	×	×	×	
4		○	○	○	○	△	×	×	×	
5		○	○	○	○	○	△	×	×	
6		○	○	○	○	○	○	△	×	→

②(6→7、2→1)

		0	1	2	3	4	5	6	7	
1		○	△	×	×	×	×	×	×	
1	←	○	△	×	×	×	×	×		
3		○	○	○	△	×	×	×	×	
4		○	○	○	○	△	×	×	×	
5		○	○	○	○	○	△	×	×	
7			○	○	○	○	○	○	△	→

表８　「ずらし」の考えによる対戦表

表８の②の表を見て分かる通り，網掛け部分の帯は，サイコロの目の和が 21 であるから一方が右にずれると，もう一方が左にずれる。太枠に入ってくる○×の数はそれぞれ１つずつなので，有利不利の変化は太枠からはみ出る○×△が関係することになる。つまり，表８の②の場合，太枠からはみ出たのは○と△であるため，それまで同じだった○×の数が，今度は○が１つ少なくなることになり，不利になるのである。

4.3 筆者の解決過程における実験・観察の考察

4.2 では，「最強のサイコロ」の課題について，筆者の解決過程を述べてきたが，その解決過程の中に見られる「実験・観察」はどの段階でどのように表れていたのだろうか。本節で整理・考察してみたいと考える。

まず，どの解決の段階で「実験」及び「観察」が表れていたかについては下の表(表９)を参照してほしい。

解決の段階	実験	観察
①課題を読んだ段階	○	○
②対戦表の作成	×	○
③総当り調べ	○	×
④正四面体の対戦表	×	○
⑤正六面体の対戦表	×	○
⑥仮説の設定	×	×
⑦対戦表の操作と変化	○	○
⑧ずらしの考え方	○	○

○：実験･観察あり，×：実験･観察なし

表９　解決段階と実験･観察の有無

以下に，各解決段階で起こった実験・観察の内容と次にどの活動に結びついていったか（→の先に内容を記す）を示す。

①課題を読んだ段階

実験：目の大きさと面の個数の関係から確実に勝てる場合，負ける場合の数を求め，比較をしてどちらが有利かを求める思考実験

⟶有利不利の存在に対する確信を深め，最強のサイコロの目の組み合わせへの具体的な思考に目を向けさせた。

観察：サイコロの目の比較の観察

⟶使われている目の数とその個数を確認し，思考実験のデータを収集した。

②対戦表の作成

観察：対戦表の○×の観察

⟶対戦表の○×の数を確認し①の実験で行った思考が正しいことを確認する。

③総当り調べ

実験：正六面体での目の組み合わせが何通りあるか計算し，全ての対戦を行った場合にどうなるかを思考実験

⟶正六面体では，対戦の数が多すぎるため，正四面体で考えること（特殊化）へのきっかけとなっている。

実験：正四面体について，全ての対戦につい

て対戦表を作り，それぞれの目の組み合わせに対する有利不利を求める実験
⟶正四面体の場合について，全ての対戦から総当り表を作成し，規則性や特徴を見いだすための準備をした。

④正四面体の総当り表
観察：正四面体での総当り表の観察
⟶正四面体の総当り表を観察し，それぞれの目の組み合わせと有利不利の関係から規則性や特徴を探る。

⑤正六面体の総当り表
実験：正六面体について，基本形 VS その他の目の対戦表を作り，それぞれの目の組み合わせに対する有利不利を求める実験
⟶正六面体の場合について，対戦実験からを基本形(1,2,3,4,5,6)についての有利不利の状況を求め，正四面体の場合との比較を行った。
観察：正六面体での総当り表の観察
⟶正六面体の総当り表を観察し，それぞれの目の組み合わせと有利不利の関係から規則性や特徴を探る。また，正四面体の場合との比較を行い，共通すると特徴への確信を深める。

⑦対戦表の操作と変化
実験：基本形との対戦相手を１～６までの数の場合と７以上の目を使った場合についての比較する思考実験
⟶対戦相手を１～６までの数の場合と７以上の目を使った場合について，○×の入れ替り方の違いについての理解を深め，仮説が真であることを確認した。また,「もう少しわかりやすい説明方法が考えられないか」ということについて，考えるきっかけとなった。
観察：基本形対基本形の対戦表と基本形対基本形の６を７に，２を１に変えた目(1,1,3,4,5,7)の対戦表(表６)を作り，両者の○×の入れ替りの観察
⟶基本形との対戦相手を１～６までの数の場合と７以上の目を使った場合についての△の動きから，ずらしの考えへの手がかりを得た。

⑧ずらしの考え方
実験：対戦表で，帯をずらした考え方を利用して，説明ができないかを実際に動かして確かめる実験
⟶「入れ替え」の考え方よりも分かりやすい説明ができることを確認した。
観察：ずらしの考え方での対戦表の観察
⟶ずらしの考え方での○×△の観察から，数値を変えたときに，対戦表の枠から出て行く○×△に着目すればよいことに気がついた。

５　実験・観察の役割（まとめ）と今後の課題

本稿において，先行研究の概観から，思考実験や数学的モデリングを取り入れた授業や研究には，必ず実験・観察が含まれていることをはじめとして,「実験・観察」が学習指導要領に新たに取り入れられた「数学的活動」には必要不可欠な存在であることを確認することができた。

そして，このサイコロ課題の事例において行われた解決過程に見られる「実験・観察の役割」をまとめると次の通りになる。

(1)次の活動へのきっかけ(動機づけ)の役割

サイコロ課題の解決過程（以下，サイコロ課題と略す）において，筆者は④正四面体の実験によって得られた特徴から,「正六面体ではどうか」と考え，⑤の実験に取りかかっている。つまり，正四面体の実験結果を動機として，正六面体への発展を考えたのである。したがって,「実験･観察」には次の活動へのきっかけ（動機づけ）の役割がある。

この役割は，１つの活動から興味深い結果が得られたときに起こることから，活動の直後に見られることが多いと考えられる。

(2)条件整備の役割

サイコロ課題では, ⑤の基本形(1,2,3,4,5,6)

に対する総当り表を作成する際，コンピュータを利用して基本形 VS その他の目の対戦表を作り，その観察から総当り表を作成している。

つまり,「実験・観察」には表の観察から情報収集し，規則性や特徴を把握するための準備に生かすなど，条件整備の役割がある。

この役割は，何かしらの関係や規則性を発見したり，気づいたりするための準備段階，つまり，活動の初期に見られることが多いと考えられる。

(3)規則性や特徴の発見の役割

サイコロ課題では，④⑤の総当り表の観察から規則性や特徴を見いだした。したがって，発見としての役割がある。

この役割は，実験や観察の結果として表れるため，活動の後に見られると考えられる。

(4)予想や推測に対する真偽への確信を得たり，信頼度を増す役割

サイコロ課題では，②対戦表の作成を通して，有利不利の予想に対する確信を得た。また，④正四面体で見つけた特徴が，⑤正六面体にも見られることを通して，自分の推測に対する信頼感に高まりを感じることもできた。したがって，予想や推測に対する真偽への確信を得たり，信頼度を増す役割がある。

この役割についても実験や観察の結果として表れるものであり，活動の後に見られると考えられる。

(5)新たなアイデアを生み出すきっかけの役割

サイコロ課題において，⑧ずらしの考え方は対戦表の観察，つまり△の動き（ズレ）の観察から生まれた考え方である。

「ずらし」のアイデアは，対戦表での△の観察なしには生まれなかったと考える。したがって，新たなアイデアを生み出すきっかけの役割がある。

この役割の出現するタイミングは，不確定であるが,「実験・観察」がきっかけとなっていることは間違いない。

(6)証明不可能なものを可能にする役割

演習で行った模擬授業後に, サイコロ課題の発展として,「基本形(1,2,3,4,5,6)のサイコロが不利にならないこと」の証明を扱った。その証明は，∑を使うなど，中学生段階では不可能な証明であった。しかし，筆者はサイコロ課題の解決過程の⑧ずらしの考え方を利用すれば，中学生段階にも説明や理解ができるのではないかと考える。したがって，形式的な証明が不可能な段階であっても,「実験･観察」を利用することにより証明を可能にする役割があると考える。

以上のように,「実験･観察」の役割を前述の６点にまとめた。先行研究に見られた「①推測を帰納による発見に導く役割」と「②推測に対する棄却または信頼度を増す役割」については，(3)と(4)に該当すると考えるが，残りについては事例の中に表れなかった。

今後の課題としては，様々な場面での「実験・観察」を取り入れることのできる可能性について調べていきたい。

【引用・参考文献】

Blum,W. (Ed.). (1995). Mathematical modeling in mathematics education and instruction, Advances and perspectives in the teaching of mathematical modeling and applications. Water Street Mathematics. pp.3-14.

文部省. (1999). 中学校学習指導要領（平成 10 年 12 月）解説－数学編－. 大阪書籍.

森田俊雄. (1991). 算数・数学教育の新展開：局所的な数学と思考実験. 東洋館. pp.51-61

大澤弘典. (1997). 数学的モデリングの授業に見られる生徒の活動：グラフ電卓を利用した「リレー問題」を事例として. 第 30 回数学教育論文発表会論文集. pp.481-486.

Polya,G.　(1959). 数学における発見はいかになされるか１：帰納と類比（柴垣和三雄訳）. 丸善.

Popper,K.R. (1971). 科学的発見の論理（大内義一・森博訳）. 恒星社厚生閣. p.545.

高木貞治. (1970). 近世数学史談. 共立出版.