三角形の面積概念に関する概念イメージの研究

桒　山　仁　志
上越教育大学大学院修士課程２年

１．はじめに

Vinner(1991)は理想的な概念形成について,「概念定義を司る細胞と概念イメージを司る細胞の２つの細胞が，お互いに関係づけられていることが望ましい。」(p.70)と述べている。Vinner の研究の対象者は主に高校生以上であるが、小学生に対象を変えてもこの文面にはさほど違和感を感じない。それは算数にも概念定義があり，概念形成に概念イメージの働きが重要であることは，筆者の教職経験からも頷けるからである。

先行研究には概念形成をテーマにしたものが多い。その一方で概念形成に必要な概念イメージの内容を明らかにした研究は，それほど多くない。むしろ図形に関する領域では，子どもの概念形成や問題解決におけるイメージの弊害（高野,1987；村上,1995 等）の研究の方が多いようである。例えば正方形を図１のように置くと，多くの子どもがひし形と判断するのは，視覚イメージの弊害といえるだろう。

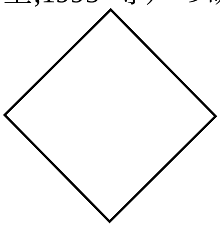


図１　傾いた置き方の正方形

先行研究にあるとおり図形の概念で様々なイメージが概念形成に影響を与えているならば，図形と関係の深い面積学習においても，同様のことが起きている可能性が高い。

そこで本稿ではまず面積概念における子どものイメージの様相を分析する。そして面積概念の形成に必要な導入課題と概念イメージとを明らかにすることを本稿の目的とする。

2. 面積の概念形成と概念イメージのとらえ方

面積についての筆者のとらえは「広さを数値化したもの」である。例えば１㎝×１㎝の正方形を横１列に１億個並べた図形は、細い線のようになるため，日常的には広い図形と呼びがたい。しかし面積の定義によって広さを数値化した場合，この図形の面積は大きいといえる。このように日常的な広さの概念にとらわれず，面積の定義を想起できることは面積の概念形成に必要である。　しかし面積の定義を想起することが，面積の概念形成の全てではない。Vinner(1991)は「概念を得るとは概念イメージを形創るという意味であると仮定する」(p.69)と述べ，理想的な問題解決過程として図２のモデルを提示している。

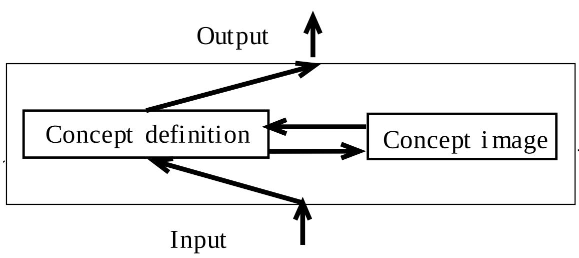


図２　理想的な問題解決の過程

面積に関する問題場面の多くは求積に関するものである。また面積を「広さを数値化したもの」としてとらえた場合，求積できることは広さの概念を面積の概念に変容させる上で重要である。この図２により求積に関す

る問題解決には，面積の定義を想起することと同様に概念イメージの想起もまた重要であることがわかる。例えば面積の定義を知っていても直角三角形の広さについては「広い・狭い」といった広さの概念による判断しかできない。しかし「同じ図形なら２つ合わせると基の図形の面積の２倍になる」という概念イメージが伴えば，倍積変形を経て求積できる。図２の Concept definition と Concept Image 間の相互の矢印は，このような面積の定義と概念イメージとの相互関係を表しているといってよい。

しかし概念イメージの中には概念形成に支障をきたすものも含まれる。子どもは往々にして「等周長の図形は面積も等しい」という認識を示すことが先行研究によって明らかにされている（梶, 1983；長谷川・岩田, 1996）。こういった認識は生活経験から得られたイメージといえ，本稿はこれも概念イメージとしている。このような概念イメージは，「周が長ければ面積も大きい」といった，誤った面積概念を形成させる可能性をもつ。

Vinner（1991）は概念イメージについて「その概念の名前によって私たちの記憶の中に呼び起こされる何か」（p.68）と述べている。したがって面積という名前に対して子どもがどのような概念イメージを持つかが、面積の概念形成においては重要である。少なくとも前述の「同じ図形なら２つ合わせると基の図形の面積の２倍になる」といった面積の性質の関する概念イメージが必要であろう。同時に「周の長いものは広い」といった，誤った概念を形成させる可能性を持つ概念イメージの変容についても考えていく必要がある。

3. 三角形の面積概念に関する概念イメージ

3.1 調査　の概要

筆者は三角形の面積学習以前の子どもの面積概念に関する概念イメージを明らかにするため，小学生に対して調査を行った。

対象児童

新潟県公立小学校４年生４名（男女各２名）

＊４人とも算数の成績は概ね上位。面積の学習は長方形と正方形のみ終了。

調査期間

平成１３年３月１２日（女子ペア）

１４日（男子ペア）

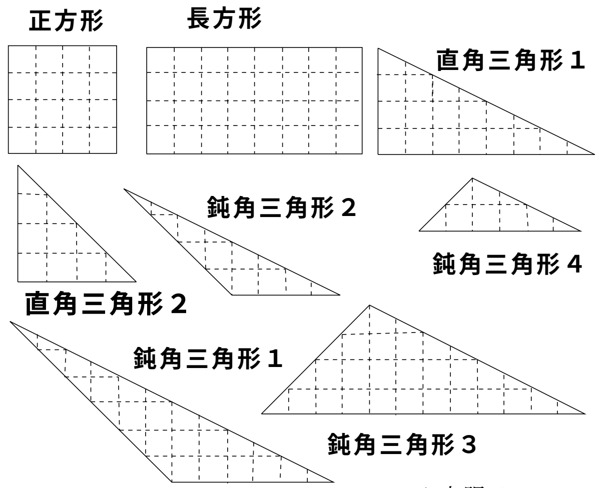
＊２日間とも放課後の６０分で実施。

対象児童の抽出方法

学級担任により，三角形の面積学習を塾等で学習しておらず，また自分の考えを表現することが苦手でない児童を抽出して頂いた。

調査計画

最初に求積の対象となる図形（図３参照）を用いて敷き詰め遊びを行わせる。



＊方眼は
１　×１

図３　調査に使った図形

敷き詰め遊びを行う理由は緊張緩和とともに，三角形の求積を支援するためである。求積の対象となる図形間には，直角三角形１を２枚組み合わせると長方形になるといった相互関係がある。また鈍角三角形２についても，直角三角形２と組み合わせると直角三角形１になるといった相互関係がある。子どもが敷き詰め遊びで図４（次ページ参照）のように鈍角三角形２に直角三角形２を補って直角三角形１を作る活動をすれば，大きな直角三角形の面積と、小さな直角三角形の面積の差で鈍角三角形を求積することが期待できる。

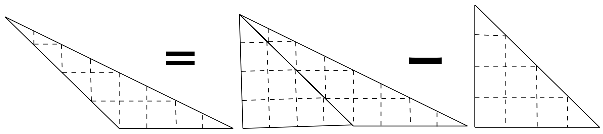


図４　鈍角三角形の外側に直角三角形を補う求め方

敷き詰め遊び後は，求積できそうな図形を選んでもらい，実際に面積を求めてもらう。求積方法については教師は一切干渉せず，自由に他の図形と組み合わせたり，切ったりしてもよいことにする。そして子どもの求積方法を分析することにより，その子どもの面積に対する概念イメージを明らかにする。

3.2 調査　の分析結果

3.2.1 問題解決に役立った概念イメージ

子どもは直角三角形に対しては，「同じ図形なら２つ合わせると基の図形の面積の２倍になる」という概念イメージを想起して求積を行った。そして他の図形については図５と図６のように求積を行った。

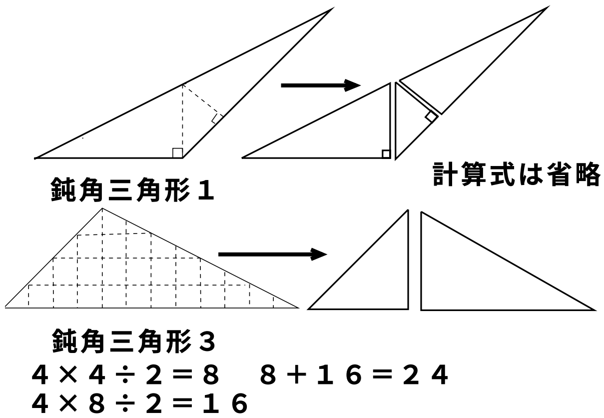


図５　鈍角三角形１と鈍角三角形３に対する求積の仕方

図５と図６はどちらも切り離すことで求積を行っている。ただし切り離すという行為の目的は若干異なる。それは図５が求積しやすい形に切り離すことを目的にしているのに対し、図６は図形を再構成することを目的として切り離している点である。しかし概念イメージの内容はどちらも「図形の面積は切り離しても変わらない」と考えてよいだろう。

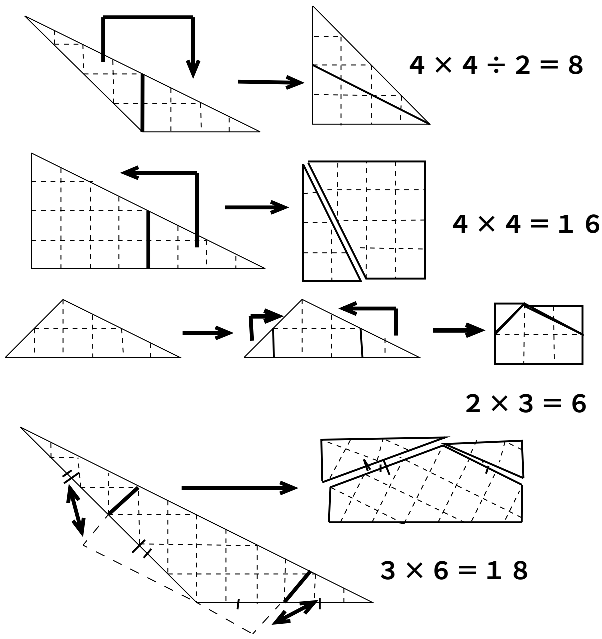


図６　鈍角三角形２，直角三角形１，鈍角三角形４，鈍角三角形１に対する求積の仕方

3.2.2 誤った概念を形成させた概念イメージ

男子ペアの１人は直角三角形２を２つ合わせて面積を８×２＝16　²と求めた（図７参照。ただし図中のアイウは筆者）。その時のインタビューは次の通りである。

T1　どこが8ですか？
C2　［指でイウをなぞる］
T3　うん，ここね。で，2は？
C4　ここ（アイ）とここ（アウ）をたして2になった。
T5　こことここをたして2というのは？
C6　ここ（アイ）を1辺と考えて1辺＋1辺で。
T7　あ，これ（式の2）は2辺という意味ね。これ（式の8）は8　という意味か。…（中略）…（辺の長さ×辺の本数で求積したことについて）…これは新しいアイディアですか？
C8　［うなずく］

この子どもが図７に対して８×２と立式した背景は「図形の面積は辺の長さで表せる」という概念イメージが影響していると考えら

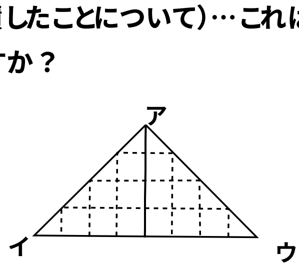


図７　直角三角形２を合わせた図形

れる。８　を選択した理由は，長方形の面積学習で辺の長さが面積を決定するという知識が根拠となっているのだろう。また２を選択した根拠は，16 ㎝²という数値を創り出すために選んだと思われる。対象児童は直角三角形２の面積が８㎝²であることは，倍積変形によって既に求積済みである。したがって図７の面積が 16 ㎝²になるように８×２という立式をすることは可能である。

しかしここで重要なのは数値合わせで立式した・しないではなく，式の内容が辺に関する積であったという点である。対象児童は「三角形の面積＝底辺×同じ辺の本数」が正しいと考えている。つまり「図形の面積は辺の長さで表せる」という概念イメージは，「三角形の面積＝底辺×同じ辺の本数」という誤った三角形の面積概念を形成させる可能性を持つことを意味する。面積の概念を形成する上では，「図形の面積は辺の長さで表せる」という概念イメージの変容が必要であろう。

323 確認されなかった概念イメージ

筆者は敷き詰め遊びを計画することにより，子どもが鈍角三角形１や２に対して図４のような活動を行うことを期待した。

女子ペアに対する敷き詰め遊びは，図３の図形を使って自由に模様を作るというものであった。その際，女子ペアは図４のような活動を行い，**「これぴったりだったらいいな。ぴったりですよ。」「本当だ。ぴったりだ。」**と発話していた。

男子ペアに対する敷き詰め遊びの内容は「正方形を１枚，直角三角形１を３枚，直角三角形２を５枚，鈍角三角形２を２枚，鈍角三角形３を１枚，これを全部はみ出さないように正方形の台紙（１２　×１２　）の上に並べましょう。（各図形は図３のもの）」というものである。この課題は女子ペアの模様作りよりも，更に意識的に図４のような活動を行わせることが可能である。

２名の男子は５分程度で図８のように敷き詰めの課題を終わらせた。そして「この敷き詰めの課題でどこが一番難しかったか」というインタビューに対し，**「ここ 図8の○印)」の部分」**と答えていた。

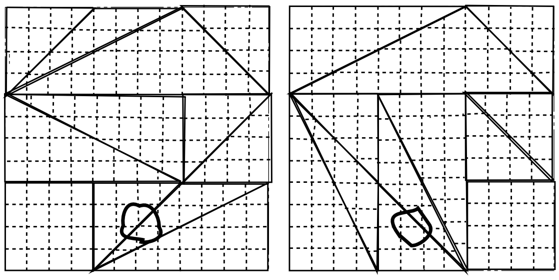


図８　男子ペアの敷き詰め遊びの結果

このように４人の子どもは敷き詰め遊びで図４のような活動を意識的に経験していたが、４人ともこの活動経験を求積活動に生かせなかった。このことから「基の形と違う形を補うと広さの数値化ができる」という概念イメージは，想起しにくいといえる。

しかしながら図９のような求積問題に対して適当な形を補って求積することは，それほど子どもにとって難しい問題ではない。このことは筆者の教職経験から明らかである。つまり求積の対象となる図形によっては，この概念イメージを想起することができるのである。したがって調査Ⅰの分析で明言できる部分は、図４のような活動が事前にあっても鈍角三角形は「基の形と違う形を補うと広さの数値化ができる」という概念イメージを想起しにくい図形であるという点にとどめるべきであろう。

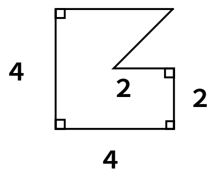


図９　適当な形を補って求積する問題

4. 面積概念の形成に必要な概念イメージ

41 面積の性質に関する概念イメージ

面積の概念を形成する場合，面積の性質に関する概念イメージを持つことが重要であることは前に述べた。一般的に面積の性質とは，次の４つを指す。

①合同な図形の面積は等しい。

②一方の図形が他方の図形に含まれるならば前者の面積は後者の面積より小さい。
③２つの図形が互いに重なり合わなければ，その２つの図形を合わせた図形の面積は，それぞれの面積の和となる。
④線分の長さをｎ倍したり，ｎ等分することができるから，単位の面積のｎ倍，ｎ分の１の面積をもつ長方形がある。これを正方形になおせる。つまり単位の面積のｎ倍，ｎ分の１の面積の正方形がある。

（新数学事典，大阪書籍より抜粋）

これらの面積の性質を理解することは，それほど難しくない。特に性質②は面積学習を行う以前から，既に日常の経験によって理解されているといえる。また性質①や③も「同じ図形なら２つ合わせると基の図形の面積の２倍になる」や「図形の面積は切り離しても変わらない」という概念イメージの内容から，子どもは理解済みであることが予想される。つまり面積の性質の関する概念イメージは，教師の特別な配慮を必要としなくとも子どもが獲得できる概念イメージといえるだろう。

42 教師の配慮を必要とする概念イメージ

しかし前出の先行研究にもあげられている「周の長いものは広い」といった概念イメージや，調査Ⅰでも確認されている「図形の面積は辺の長さで表せる」といった概念イメージについては教師の配慮が必要である。このような概念イメージを新たな概念イメージに変容させることが，面積の概念を形成させるためには必要であろう。

筆者が面積の概念の形成に必要な概念イメージとして考えているものは，「図形の面積は辺以外の長さでも表せる」という概念イメージである。「図形の面積は辺の長さで表せる」という概念イメージは，長方形・正方形の面積概念においては必要な概念イメージである。その一方で調査Ⅰにみられたような「三角形の面積＝底辺×同じ辺の本数」といった誤った概念を形成させる可能性を持つ。もちろん「三角形の面積＝底辺×同じ辺の本数」という式に対して反例を提示し，この式を否定することは可能である。しかし式の否定によって「図形の面積は辺の長さで表せる」という概念イメージが「図形の面積は辺以外の長さでも表せる」という概念イメージに変容する可能性は極めて低いだろう。この概念イメージの変容には，辺以外の数値でも図形の面積が表せることを子どもに認識させることが不可欠である。すなわち「図形の面積は辺の長さで表せる」という概念イメージを「図形の面積は辺以外の長さでも表せる」という概念イメージに変容させるためには，高さの概念を必要とする。

43 図形の面積は辺以外の長さでも表せる」という概念イメージの必要性

この概念イメージの必要性の１つは「三角形の面積＝底辺×同じ辺の本数」といった誤った概念を修正する手がかりになりうる点があげられる。しかし「図形の面積は辺以外の長さでも表せる」という概念イメージの１番の必要性は，三角形の広さの概念を面積の概念に変容させうる点にある。

子どもが長方形の広さの概念を面積の概念に容易に変容させられるのは，広さを数値化するのに必要な線分がそのまま図形を決定する要素となっているからであろう。例えば「縦４　・横５　の長方形と縦４　・横６　の長方形とががあります。どちらがどれだけ広いでしょう」といった問題があったとする。この問題に対して子どもが図10のような場面を想像できれば，即座に「後者の長方形が４　^{2}広い」と答えるであろう。

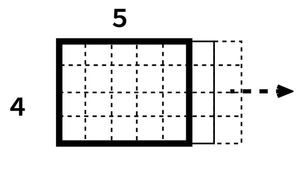


図10 長方形の面積の増加量

大きさ比べの部分を広さの概念とし，広さの違いを数値化する部分を面積の概念とすれば，この子どもの長方形の広さの概念は面積の概念に変容しているといってよいだろう。

三角形の場合，広さを数値化するために必要な線分は，必ずしも三角形の構成要素とは限らない。そのため子どもは広さの概念を面積の概念に変容させにくい。例えば子どもにとっては求積しやすい直角三角形を用いて「図11の△アイウと△エイウとではどちらがどれだけ広いですか」という問題を出したとしても，例外なく「△エイウの方が広いが，違いはわからない」と答えるだろう。長方形は図10のような場面を想像することにより，長方形の求積公式を知らなくても，広さの違いを数値化することができる。しかし三角形は図を描いても広さの違いは数値化しにくく，結局求積公式を必要とする。

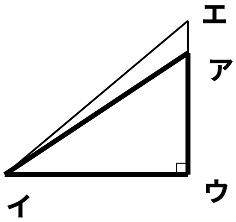


図11　直角三角形の面積の増加量

また「どうして△エイウの方が広いか」という問いに対しては，「はみでているから」という理由の他に「辺アイと辺アウより辺が長いから」という理由も多いことが予想される。図11においてこの理由は完全な誤りとはいえない。しかしこの理由を述べる子どもは「辺の長さが12.5　，13　，25　の三角形と10　，10　，12　の三角形とではどちらが広いでしょうか。」という問題に対して，安易に前者の三角形を選択してしまう可能性を持つ。前者の三角形は底辺を12.5　にした場合，高さは５　になる。後者の三角形は底辺を12　にした場合，高さは８　になり，明らかに後者の三角形の方が面積は大きい。

「図形の面積は辺以外の長さでも表せる」という概念イメージを持つためには図12のような場面を設定して，三角形の面積は底辺と高さで決定すること，そして底辺や高さが１　変わると面積も規則的に変わることを認識する必要があろう。このような場面の設定により長方形の図10に相当する図が三角形においても認識されることにより，三角形の広さの概念を面積の概念に変容させることが可能と考える。

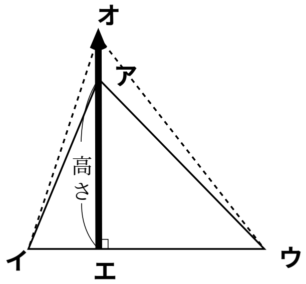


図12　高さの増加と面積の増加

三角形の底辺と高さは直交関係にある。このことを学習する意味は，長方形の面積概念の拡張と再認識のために必要である。この場合の拡張とは次のとおりである。長方形や正方形の広さを数値化するために必要な長さとは，図形の構成要素である辺である。しかし三角形・平行四辺形・台形・ひし形は辺以外の長さを調べないと広さを数値化できない。この図形の構成要素以外の要素が加わる点が拡張である。また再認識とは数値化に必要な線分の位置関係をあらためてとらえ直すことを指す。図 13 における図形の広さの数値化に必要な２本の線分は，すべて直交関係にある。

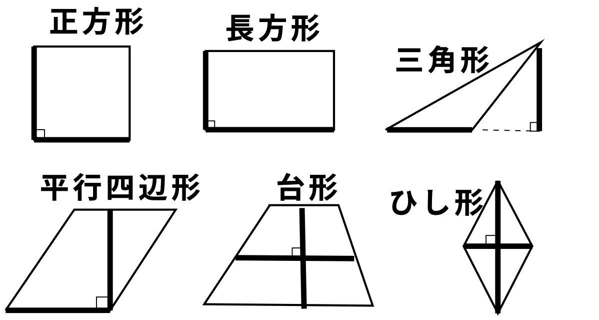


図13　各図形における広さを数値化するために必要な線分とその位置関係

長方形・正方形の面積学習の際にこの直交関係に目が向けられないのは，広さを数値化するために必要な線分が既に直交関係にあるためであろう。この線分の位置関係に焦点を当てるには，位置関係が一見してもわからない図形の面積学習が必要であり，この学習を経て初めて位置関係に着目できると考える。

4.4 高さの概念と概念イメージ

高さの定義は平行四辺形と三角形の面積学習（どちらも小学５年生）において取りあげ

られている。しかし子どもにとって通常の授業で三角形の高さを認識することは困難であることが，先行研究によって明らかにされている（小野寺，1989；川嵜，1995；高垣，1999等）。これらの先行研究から子どもの持っている三角形の高さについての概念イメージとは図 14 のような「高さは内部にあるもの」と考えられる。

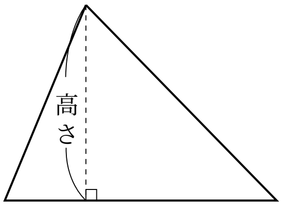


図14　高さのイメージ

子どもが「高さは内部にあるもの」という概念イメージを持つ原因の１つは高垣(1999)のプリコンセプションの研究にみることができる。子どもは三角形の面積学習以前から，日常生活において既に高さの概念を持っている。この概念がプリコンセプションである。日常生活においては高さは物の長さと同意語に使う場合があるため，高さは必ずしも底辺に対して直角でなく，物の中心部分の長さを測ることがある。高垣は教科書の記述が，こういったプリコンセプションを補強する場合のあることを指摘している。

例えば現行の教科書（平成８年度版　小学５年生算数科用教科書）では，図 15 のような図を添えて高さを定義している。高さが外部にある場合も図を添えて定義づけをしているが，順序は内部にある方が先である。そのためプリコンセプションの補強の可能性は否定できないであろう。

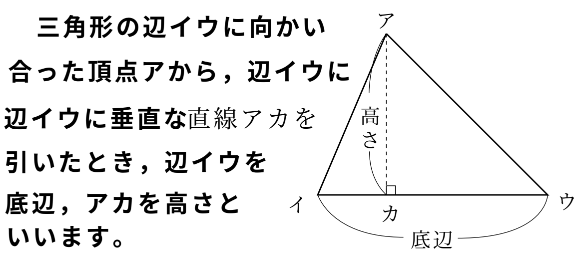


図15　鋭角三角形の高さと底辺の定義

もう１つの考えられる原因は村上(1995)の次の指摘に見つけることができる。

「視覚能力においては，相等とその否定である不相等，内部とその否定である外部を区別するが，ある数学的概念形成においては，これらの区別を取り払わねばならず，そこでは多くの場合，認識論的障害が発生する。」(p.126)

つまり高さという概念を形成する際，「高さとは内部にあるもの」という不必要な情報が子どもに獲得されてしまうと，外部に高さをもつ鈍角三角形は否定的に認識される可能性をもつ。このことが村上が後述している「視覚能力が定義の一般性を阻害する例」(p.126)といえる。本質とは関わりのない情報が，本質であるかのように子どもに認識される例はWilson(1986)の「属性の研究」にも見られる現象であるし，子どもがプロトタイプに影響されやすいことは戎(1997)の研究によって明らかである。戎の研究にあるように，学習者が鋭角三角形を三角形のプロトタイプとするなら，高さについても鋭角三角形の高さがプロトタイプになる。

しかしここでの論点は，教科書の記述の仕方ではない。面積概念の形成という視点で見たとき，高さの概念を教師がどのようにとらえるかを論ずるべきであろう。そして筆者は高さの概念は，「図形の面積は辺の長さで表せる」という概念イメージから「図形の面積は辺以外の長さでも表せる」という概念イメージへの変容に必要な概念であるというとらえをしているのである。

5. 導入課題の工夫

5.1 高さを認識させる方途

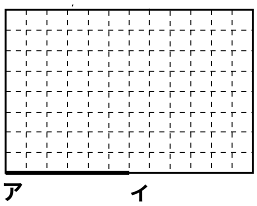
先行研究にあるように子どもにとって高さが認識しにくい概念であるならば，高さの認識を助けることを目的とした導入課題の工夫が必要である。

子どもに最初に高さについて認識させなければならないのは，高さが面積に関係する長さであるという点である。この点が日常的に使う高さの概念と大きく異なる点である。

子どもに，三角形の高さが面積に関係する長さであるということ，また辺の長さだけが面積に関係するわけではないということを認識させるには，次のような導入課題が必要であると考える。

導入課題

右の作業用紙の中に面積が一番大きくなるような△アイウを描くには，どこに点ウを打てばよいでしょう。ただし，辺アイを動かしてはいけません。



（方眼は１　で作成）

調査Ⅰによれば学習者は三角形の面積と辺の長さを関係づける傾向がある。したがってこの導入課題に対しては，図16の△アイオのような三角形を描くことが予想される。それは頂点の上右端に頂点を打った場合が，一番辺を長くとれるためである。

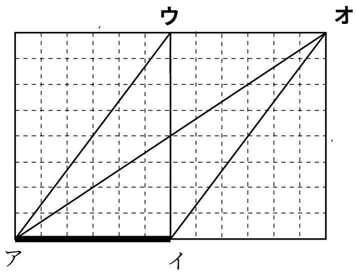


図16　導入課題に対する予想される解答

しかし△アイオの面積は△アイウと等しい。この事実は三角形の面積は辺の長さに依存しているという認識を持っている子どもを葛藤場面に追い込むであろう。葛藤が新しい学習活動の動機付けとなり，概念形成に有効に働くことは多くの研究者の述べるところである（例えば稲垣，1982；手島，1995）。そしてこの新しい学習活動によって高さに着目させることが，この導入課題のねらいである。

52 面積の増加の規則性を認識させる方途

この導入課題のもう１つのねらいは，高さの変化に伴う面積の変化の規則性に着目させる点にある。前述のとおりこの認識が「図形の面積は辺の長さで表せる」という概念イメージを「図形の面積は辺以外の長さでも表せる」という概念イメージに変容させる。この概念イメージの変容は三角形の広さの概念を面積の概念に変容させるために必要である。

この高さの変化に伴う面積の変化の規則性は，求積活動に伴う他の規則性から発見が期待できる。例えば作業用紙の最上段に頂点がある場合，面積は全て 24 ㎝²になる。これは頂点を平行に動かしても面積は変わらないという規則性である。この規則性から子どもは，頂点を１段下げた場合の三角形の面積も全て同じになるだろうという推測をたて，確かめを行うであろう。そして頂点を１段下げた三角形の面積は全て 21 ㎝²になることから，今度は高さが１　減ると面積は３㎝²ずつ減るという規則性を発見するだろう。

しかし作業用紙を用いて面積の変化の規則性を発見しても，三角形の面積の変化の規則性が完全に認識されたとはいえない。それは導入課題によって底辺が固定されているため，底辺と面積の関係に着目しにくいからである。子どもは全ての三角形に対して高さが１　減ると面積は３㎝²ずつ減ると考える可能性がある。同時に高さについてもも作業用紙の補助線が，実際の高さの認識を妨げる可能性がある。そのため補助線のない三角形に対する求積活動を組み込む必要がある。

以上述べたような学習の流れは子どもの自発的な学習活動であることが望ましいが，ある程度の教師の介入（例えば鈍角三角形に対する図４のような求積方法の提示）があっても差し支えがないと考える。それはこの導入課題のねらいが単なる求積方法の発見ではなく，いろいろな三角形を求積することによって面積の概念を形成することをねらっているからである。つまり求積方法の提示といった教師の支援は面積の概念を形成させるための手段として位置づけられると考えられよう。

6. 導入課題の効果

6.1 調査　の概要

対象児童

新潟県公立小学校５年生４名(男１女３名)

＊本稿では紙幅の都合上，永井（仮名・男子）についてのみ考察。加藤（仮名・女子）は永井のペア。両者の算数の成績は概ね上位。面積の学習は長方形・正方形のみ終了。

調査期間

平成 13 年６月５日〜平成 13 年６月８日
（＊永井・加藤に対する４回の調査）
平成 13 年６月 13 日，19 日，20 日
（＊他の２名に対する３回の調査）
調査は放課後 60 分を上限として行った。

対象児童の抽出方法

最初に事前調査を行った。事前調査の主な内容は，直立した木と傾いた木を図示し，高さを測るとしたらどの部分を測るかを問う内容と，過去に塾等で三角形の求積公式を学習したことがあるかを問う内容である。この事前調査により，傾いた木の高さについては斜辺を測り，求積公式については全く知らないと答えた児童を数人抽出した。その中から学級担任により「自分の考えを表現するのが苦手でない児童」を４人抽出して頂いた。

調査計画

導入課題の工夫については前述のとおりである。導入課題以降の学習課題は求積だけでなく，学習者が疑問に感じたこともとりあげる。それは導入課題によって発生した子ども自らの問いは，学習活動の大きな動機付けになるからである。

62 調査　の分析結果

三角形の広さの概念イメージが見られた場面

調査の初日，永井は導入課題に対する解答を図 17 の△アイエとした。△アイオを選択しなかった理由は「**長くすれば長くするほど面積が狭くなるからギリギリのところを選びました。**」というものである。△アイウは加藤が面積最大の三角形として描いたものである。永井は加藤の選択した直角三角形に対して「**もうちょいと（点ウが）ここまで（点エまで）よってくれば，面積が少しでも多くなるかなって**」と発言した。つまり永井のいう「**ギリギリ**」とは，頂点をウの位置より１つ右にずらしたところという意味であり，それより頂点を右にずらしていくと，△アイオのように狭くなるという，微妙なバランスを表現している。これらの表現から永井の三角形の広さに関する概念イメージは「太い三角形は広い」であると推測される。

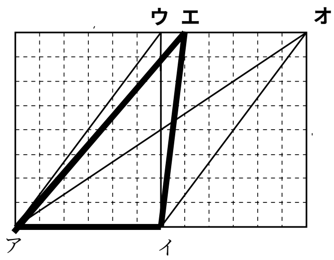


図17　導入課題に対する永井の解答（△アイエ）

太さに関する変容が見られた場面

加藤は△アイウに対して「太い」という表現を使い，永井も△アイオに対して「狭い」という表現を使った。そのため教師も「太さ」という表現を用いて，三角形はどこが太いと面積は広くなるのか，という介入を行った。この介入に対して永井は最初，底辺アイを指でなぞって太さを表現したが，図 18 の△アイエと△アイカの太さはどこかという介入後は，この２つの三角形の太線部分に太さを修正した。この修正理由は，△アイエと△アイカの底辺が等しいにもかかわらず，面積は全く違うことがわかったためであろう。

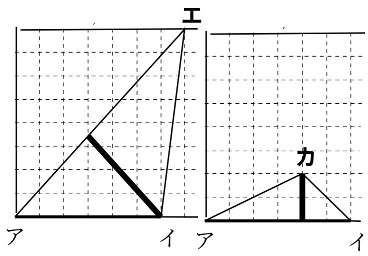


図18　永井の示した三角形の太さ

概念定義が想起された場面

永井が最終的に面積最大のものとして描いた三角形は，図 19 における△アイキである。求積方法は斜辺に接する１㎝×１㎝の正方形にならない形（以下，端形）を２つで１㎠とする

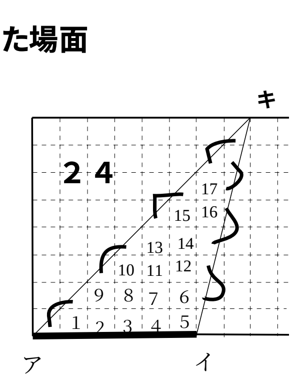


図19　永井の描いた面積最大の三角形

やり方である。しかしこの求積方法は，「端形が奇数の時には使えないことに永井自身が気がついたこと」「端形は１㎝×１㎝の正方形に形を整える必要があるという教師の介入」の２点によりすぐに棄却された。この後，永井は１㎝×１㎝の正方形を意識し始める。

高さの認識ができつつある場面

２日目に永井は，調査Ｉの図５のような求積方法や倍積による求積方法を用いて，底辺６㎝・高さ８㎝の鋭角三角形のいくつかと直角三角形の面積が 24 ㎠になることを発見した。また作図ミスにより 24 ㎠にならない鋭角三角形に対して何度も計算し直した。このことから永井は「頂点が作業用紙の上端にある場合，面積は全て 24 ㎠になるだろう」という推測を立てたことが伺えた。しかしこの時点ではなぜ面積が全て 24 ㎠になるのか，についての理由は見つけられなかった。

３日目に永井は底辺６㎝・高さ８㎝の鈍角三角形の求積活動を行った際，突然図 20 を描いて次のように発話した。**「こっち（頂点が作業用紙の上端にある場合）が全部 24だったから，こっち（頂点を1段下げた場合　図 21参照）も全部同じように 21かなと思って。高さは全部同じだから。」** 永井はこの発話の後，底辺６㎝・高さ８㎝の鈍角三角形の求積活動を一端中止して，図 20 の直角三角形を求積した。ここで永井は教師が１度も使っていない高さという表現を初めて使った。永井は後に「高さ」を「幅」とも言い換えている。「幅」という表現は作業用紙に縦の長さを指し，ある程度の直行関係を認識しているためプリコンセプションによるものではないと考えられる。しかし同時に長方形の縦の長さという性格が強いため，三角形の高さを完全にイメージしているとも言い切れない。また面積の増加の規則性には気づいていないため，完全に高さが認識できたとはいえないだろう。

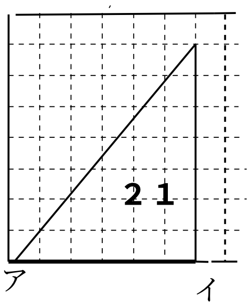


図20　頂点を１段下げた三角形

永井が図 4の活動を取り入れた場面

教師は求積の支援として図４の活動を永井と加藤に対して１日目の後半に提示した。しかし２人とも２日目の活動の最初の段階では全く使わなかった。加藤は２日目の後半で試行錯誤の末，「わかった」と発話して図４の活動を取り入れた。永井は２日目に加藤から図４の活動を説明されても，鈍角三角形に対しては端形を１　×１　の正方形に揃える求積方法に固執した。永井が図４の活動を取り入れたのは頂点を１段下げた三角形の面積は 21 ㎠になるだろうという推測を立てた時である。底辺６㎝・高さ７㎝の鈍角三角形に対して，１　×１　の正方形に揃える求積方法を行うと，永井の計算では面積が 22 ㎠になってしまう。何度計算しても面積が 22 ㎠になってしまうため，永井は図４の活動を取り入れた。その結果面積が 21 ㎠になり，これ以降永井は鈍角三角形に対して図４の活動を行うようになった。

面積の減少の規則性を認識した場面

永井は図４の活動が鈍角三角形の求積に有効であることに気づき，底辺６㎝・高さ７㎝の三角形を全て 21 ㎠と求積することができた。そして先に自分が調べた底辺６㎝・高さ８㎝の三角形の面積が 24 ㎠であったことから，高さが１　減ると面積は３㎠ずつ減少するだろうという推測を立てた。このことは次の会話が裏付けている。

T9　ちなみに（底辺は６　）高さが６　だったら面積はいくつになりそうですか？

C10　予想だと思うけど１８［その後，実際に底辺６・高さ6　の直角三角形を描いて求積する］。

C11　18でした！予想通り。

T12　予想通りだね。そうしたらここは？［底辺６　・高さ5　に当たる部分を示す］

C13　だと15。

しかし永井はなぜ面積の減少の値が３㎠

なのかについてはわからなかった。そのため底辺５㎝・高さ８㎝の直角三角形の高さが１㎝減少したときの面積の減り具合が 2.5 ㎝^{2}になったことに対しては困惑した。

その後教師は「底辺２㎝・高さ６㎝の三角形と，底辺３㎝・高さ４㎝の三角形とではどちらが大きいか」という介入を行った。永井はどちらも６㎝^{2}であり大きさは変わらないという解答を得たにもかかわらず，その後も考え続けていた。しかし突然，永井は次のような発言をした。**「これが辺が 6の場合だと3ずつ減っていって 5の時は 2．5ずつ減っていくのは 1段ずつ下がると0．5ずつ減る数が減って・だから辺が 2というのは 0．5が 2個で 1個…」**ここでテープが切れたため，永井の考えを補足すると次のようになる。底辺２㎝は面積１㎝^{2}に相当する。そして三角形の面積はこれに高さをかけたものである。この後，教師は永井に対していくつか三角形の求積を行わせたが，永井は全ての三角形に対して「底辺÷２×高さ」という計算を行った。この考えを用いれば，高さが１　減ったときの面積の減少具合の３㎝^{2}や 2.5 ㎝^{2}という違いについて説明できる。この時点で永井は面積の変化の規則性を完全に認識したといえる。

高さの認識の不完全さが露呈した場面

最終日に教師は図 21 のような目盛りのない三角形の求積活動を行わせた。永井はこの切り抜きの三角形に対して，底辺を６㎝にした場合と８㎝にした場合については，永井独自の求積公式を用いて面積を求めた。しかし底辺を 10 ㎝にした場合については，高さの位置を正確に測定したのにもかかわらず，10 ÷２×６や 10 ÷２×８といった計算を繰り返した。

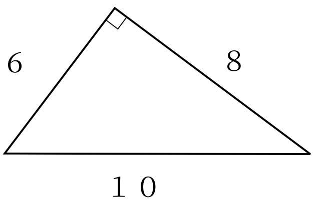


図21　切り抜き三角形

高さの認識が完全にできた場面

図 21 で底辺を 10　にした場合を，永井の求積公式に当てはめた式は「10 ÷２×高さ」になる。そのため教師は「５に何をかければ 24 になるのか」という介入を行った。この介入により永井は自分が測った高さに 4.8 という数値があったことを思い出した。永井が高さの数値として 4.8 を得た場面というのは，正確な高さの位置を測ったときである。永井が５に 4.8 をかければ 24 になることと自分が測った高さに 4.8 という数値があったことが結びついたときに高さの認識ができたといえよう。

次に教師は図 22 にある切り抜きの鈍角三角形の求積を行わせた。最初に永井は図 23 の太線部分を高さとして**「高さは…高さが…あれ？…高さがまた微妙だ。高さ3.3かなぁ。」**と発話した。しかしすぐに**「あ，そうか，ここじゃねんだ。こうだ。」**と発話し，正しい高さの位置を測り始めた。正しい高さは 4.8　であり，再び面積は 24　^{2}になった。その後，永井は図22の切り抜き三角形の３組の高さの位置を正確に測ることができた。そして高さを**「1番上の場所から直角に下ろした場所です。」**と表現した。

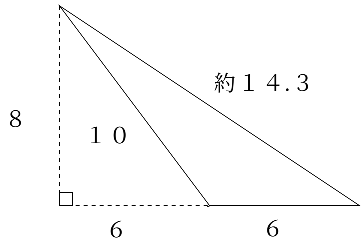


図22　切り抜きの鈍角三角形

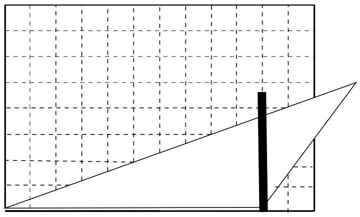


図23 永井が最初に高さと考えた部分

6.3 調査　に対する考察

以上のとおり永井は高さの認識と，高さの変化に伴う面積の変化の規則性を認識した。つまり「図形の面積は辺の長さで表せる」という概念イメージは「図形の面積は辺以外の長さでも表せる」という概念イメージに変容したといえるだろう。この概念イメージが変容したということは永井の三角形の広さの概念も面積の概念に変容したといえる。

これらの変容は永井が太さとは何かを再認識したことが大きな要因である。永井が最初に太さと思った位置は底辺であった。しかし図 18 の場面で水平方向の長さだけでは三角形の面積は決められないことに気づいた。そのため永井は図 18 の太線部分のように水平以外の長さに着目した。また頂点が最上端にある場合，三角形の面積は全て 24 ㎠になったことから「面積が同じのはどこの長さが同じだからなのか」という点に思考を向けることができた。それが永井の「**高さが同じから**」という発話に表れている。このような太さの再認識は「一番大きな三角形を描く」といった導入課題の効果といえよう。また永井が鈍角三角形に対しても直交関係を強く意識することができた。このことから通常の実践に見られる鈍角三角形の高さの認識という問題に対しても，この導入課題は有効といえよう。

しかしこの導入課題の効果だけが概念イメージの変容を招いたわけではない。完全に高さや面積の増加の規則性が認識できたのは，切り抜きの三角形の求積場面である。つまり導入課題の作業用紙の補助線が，高さの認識を妨げる可能性を持っていたことを配慮する必要があろう。

7. 結語

今回の調査においては，面積の性質に関する概念イメージが子どもにとって持ちやすい概念イメージであることがわかった。概念イメージの持ちやすさでは「図形の面積は辺の長さで表せる」という概念イメージも子どもにとっては持ちやすいといえる。面積の概念形成に必要な概念イメージは，この「図形の面積は辺の長さで表せる」という概念イメージを変容させたものが重要であった。そのため辺が長くても面積が変わらない場面が提示される本稿の導入課題が，面積の概念形成に有効に働いたのだろう。今後は概念イメージの持ちやすさ，持ちにくさは何に起因するのかという研究を進め，導入課題以外の概念形成に関わる要因を調べていきたい。

【引用文献】

稲垣佳世子.（1982）. メタ認知とモニタリング. 波多野誼余夫（編），認知心理学講座４：学習と発達（pp.14-20）. 東京大学出版会.

戎弥須恵.（1997）. 図形の概念形成における分類活動の位置づけに関する研究. 上越数学教育研究，*12,* 49-60

小野寺淑行.（1989）. 小学生における「高さ」概念の形成. 熊本大学教育学部研究紀要，人文科学，38，235-249.

梶外志子.（1983）. 子どもの面積と周りの長さ認識について. 数学教育学論究，39・40, 49-66

川嵜道広.（1995）. 情報処理システムによる図形の認知過程の考察（Ⅲ）. 日本数学教育学会 第 27 回数学教育論文発表会論文集，17-22.

高垣マユミ.（1999）. 高さ概念におけるプリコンセプションの変容に関する研究. 日本数学教育学会　第３２回数学教育論文発表会論文集，251-256.

高野陽太郎.（1987）. 傾いた図形の謎. 東京大学出版会

手島勝朗.（1994）. 知的葛藤を生み出す算数の授業. 明治図書.

長谷川順一・岩田貴宏.（1996）. 等周長の正方形と平行四辺形に対する小学生の面積判断. 日本数学教育学会誌, *78.(4)*, 4-9

村上一三.（1995）. 図形指導における図の認識の発達過程について. 日本数学教育学会　第２７回数学教育論文発表会論文集，125-130.

Vinner, S.（1991）. The role of definition in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall（Ed.），*Advanced mathematical thinking,*（pp.65-81）. Kluwer Academic Publishers.

Wilson, P.S.（1986）. Feature frequency and the use of negative instances in a geometric task. *Journal for Research in Mathematics Education, 17*（2），130-139.