小数除法における認知モデルの発達について

高橋　裕樹
上越教育大学大学院修士課程１年

１．はじめに

「問題の場面の様子や聞かれていることは分かるんだけど，何から始めたらよいのかわからない。」

筆者は、小数除法の学習を通して，次の様な児童の声を多く聞いてきた。

小数除法の内容は，問題場面の中に含まれている数学的内容の複雑さや小数の概念自体の複雑さ，計算の複雑さ等が絡み合い，整数除法の内容から大きな飛躍がみられる。そうした中で，児童が問題の場面から数学的内容を捉えることや，捉えた内容に対してどのような既有の知識を活用すればよいのかを判断すること，そしてその判断をもとに活動することは困難なことである。またその困難さをどの活動場面でどのように感じるかは，児童によっても様々である。

筆者は今まで､そのような児童に対して､｢いかにわかりやすく教えるか」という立場で接し、理解を深めようとしてきた。しかし、｢子ども一人ひとりがその教材に関係するものとして、どのような考えを持ち、その考えをどのように使うことができるのか」ということを把握し、それをもとに学習を進めていなかったことを反省する。教材の分析と共に、それに関わる児童の思考を捉え、児童自らが算数を創る学習を展開していくことによって、冒頭の児童の言葉に応えていきたいと考える。

本研究は，児童が日常的な場面をもつ小数除法の課題に取り組む中で，生活経験やその学習以前に自分なりに構成してきた数学的知識を生かしながら小数除法の知識を構成していく過程における，児童の認知モデルを提示することを目的とする。

本稿では，第一に、今まで筆者が行ってきた小数除法の授業場面を振り返り，その授業における問題点を挙げる。第二に，その問題点に関わる先行研究より，児童の思考をモデル化していくための手がかりを得ていく。最後に，認知モデルの発達過程を仮設し，具体的な例の解釈を試みる。

２．筆者が行ってきた小数除法の授業から考えられる問題点

以下では，筆者が行ってきた授業を想起し，そこに見られる問題点を挙げる。

まず，筆者が小数除法の授業において次のような課題を提示したときに，その課題に対して児童らが試みた解決に向けての活動を提示する。授業の流れの特徴から，４つの場面に分けて提示する。

> リボンを 2.8 ｍ買ったら，代金は 420 円でした。
> このリボン１ｍの値段は何円ですか。

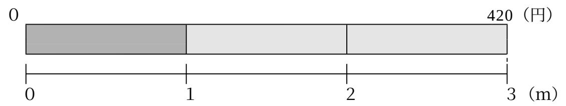
＜場面１＞

001	C1：	すぐ式を立てることができるよ。 2.8 ÷ 420 だ。
002	C2：	僕はこうだと思うよ。420 ÷ 2.8。
003	C3：	私は・・・2.8 ÷１をやって。 それから・・・・。

004　T：　いくつか考えが出たね。式はどんなふうにして立てたのかな。
005　C1：　うーん、何となくね。問題の文の通りに数字を使って・・・。
006　C2：　こういうのを前にもやったような気がするんだけど。言葉の式もあったし・・・。
007　C3：　同じ長さどうしを比べたんだけど，答えは 2.8 だった。続きがあるような気がするんだけど・・・。
008　T：　みんなは，問題を読んですぐ式を書いてしまったのかな。何か絵とか図とか，線分図とかをかいていないのかな。

＜場面２＞

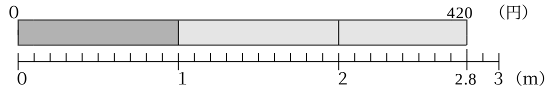
009　T：　絵とか線分図をかいてみたらどうかな。
010　C4：　・・・・。小数があると意味が分からなくなる。
011　T：　2.8 ｍを３ｍにして考えてみたらどうなるかな。
012　C4：　それなら絵が描けそうだ。この絵からだったら



・・・420 円を３等分すると１ｍの値段が出てくるね。
013　T：　これからだと式は立てることができるかな。
014　C4：　420 ÷３だ。簡単，簡単。
015　T：　それじゃあ，この考えを使ってもとの問題に挑戦しよう。同じように絵がかけるかな。
016　C4：　・・・・。
017　T：　同じように式は書けるかな。
018　C4：　「３」のところに「2.8」って書いていいのかなぁ。じゃぁ、とりあえず・・・420 ÷ 2.8 かな。

＜場面３＞

019　T：　先生と一緒に小数が入っている線分図をかいてみようか。
020　C5：　どうにかかくことはできたんだけど・・・。



021　T：　これは，どうやって見ればいいのかな。
022　C5：　えーっ，420 円を 2.8 こに分けることってできるの？

＜場面４＞

023　C6：　2.8 という小数があるから，うまくできないんだよなぁ。
024　T：　小数を整数にかえる方法があればいいんだね。
025　C6：　長さ 10 倍したら 28 ｍになるよ。
026　C7：　10 倍っていうことは，10 こ分か。だったら，リボンの値段も 10 倍して 42 00 円になるはずだな。
027　C6：　そうすると式は，4200 ÷ 28 でいいかな。
028　T：　すごいね。2.8m は他にも表し方があるんだけど・・・。
029　C8：　2.8 ｍは 280cm です。
030　T：　おっ，整数が出てきたね。そうするとどうなるかな。
031　C8：　420 ÷ 280 をやって・・・。
032　C9：　cm だから・・・１ cm の値段？
033　T：　１ cm だね。そうすると，１ｍだから・・・。
034　C9：　１ｍは 100 倍して，値段は 420 ÷ 280 × 100 でわかるよ。

この授業は，一見，児童らが活発に発表し合い，児童同士の話し合いが進む中で教科書に提示されているような解決方法が示され、スムーズに授業が展開されているように見える。しかし，児童にとってこの授業が，自らが小数除法の意味作りをしていった授業となっていたのであろうか。４つ場面に分けて考察していくことにする。

場面１は，課題に対する児童の定式的な接近が現れた場面である。児童は課題の提示と共に，見通しを持ったり具体的な活動を行ったりすることなく立式の活動を行い，教師は線分図について発言している。算数の授業の中で提示されている場面と児童の生活経験や操作などが切り離され，算数の形式を扱うことが中心となる学習が行われている。

場面２と場面３は，教師が児童の反応から，絵図または線分図などを表記させたり，整数の場合にあてはめさせたりすることによって，児童の活動を支えようとしている場面である。児童は教師の意図に沿いながら活動している。しかし，これらの活動は教師によって、児童が持っていると思われる考えを引き出すために与えられたもので，児童が生活経験や学習経験を生かし、自らが展開していったものではない。その結果，教師の意図と児童の理解にずれが生じることになり、形式にあてはめてみる操作をする児童（場面２・018）や，

線分図をかいてもそれを理解し，活用できない児童（場面３・022）が現れてきている。

場面４は，教師の助言を受けつつも、児童が課題場面の形式化に向けて話し合いを進めながら活動を行っている場面である。この授業において、児童は、4200 ÷ 28 や 420 ÷ 280 × 100 を立式し，そこから答えを求めることができている。この授業後には、児童が立式したものと 420 ÷ 2.8 の立式との関連付けが必要となろう。

以上のような４つの場面を考察していく上で、共通して考えられることは、提示した授業場面に現れてきていない児童や授業で自分の経験を生かせなかった児童，または，授業にうまく参加できなかった児童の存在である。そうした児童らにとって、彼らが参加したその授業はどのように映っていたのであろうかという疑問を持つ。

ところで、今回の授業において提示された課題場面は等分除を用いる場面であるが、除法の意味を考えた場合、この等分除の場面と共に包含除の場面がある。この授業で等分除を学習したことが、包含除の知識を構成する上でどのように反映し、関連づけられていくのか、より具体的には、自分の経験をもとに自ら活動するという点で、児童が等分除と包含除それぞれに対して持つ意味はどのように関わり、統合されていくのかを考えていくことは、小数除法の知識を構成していく上での一つの着眼点となるであろう。

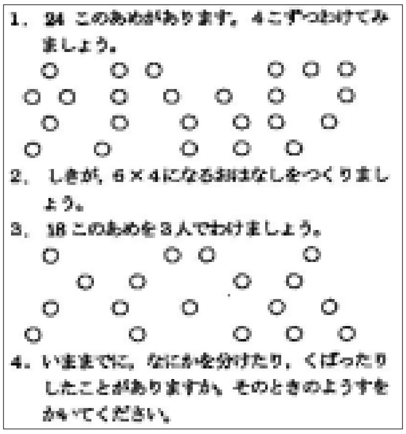
児童自らが算数を創る学習を展開していくためには、児童が自分の経験を通して構成してきた素朴な考えを生かし，小数除法の知識構成をしていく授業の構成が必要であると考える。

３．小数除法に関わる先行研究

３章では、小数除法及び小数除法に関連する研究として整数除法や小数乗法、比に関する先行研究の考察を行う。

３.１　整数除法に関わる先行研究

熊谷（1998）は，子どもの除法の理解過程の特徴を捉え，活動の系列を開発することを目的とした調査を行っている。それは、３年生 40 人を対象に，下記の調査問題によって実施された。熊谷（1998）は、描くという操作から分析を行っている。包含除の場面では４個ずつの単位が見えるような図を描くことに成功している一方で、等分除の場面では，囲みをつくる単位の大きさが初めからわからないことから，児童にとっては単位の見えるような図を描くことが容易ではなく，子どもなりの多様な図が見られる。


1．24 このあめがあります。４こずつわけてみましょう。
2．しきが，６×４になるおはなしをつくりましょう。
3．18 このあめを３人でわけましょう。
4．いままでに，なにかを分けたり，くばったりしたことがありますか。そのときのようすをかいてください。

続いて、操作と計算のストラテジーについての分析も行っている。包含除の場面では，除数の個数を取り去く作業を繰り返す操作が減法的な計算のストラテジーにつながり、かたまりの数を数えた場合には，同じ大きさの数を数えているという意味で乗法的なストラテジーとなる。等分除の場面においては，２重数えの方法（18 個のおはじきを３人に分ける場面で，１，１，１と数字を横１列に並べ，それぞれの数字の上に，２，２，２その上に３，３，３と順に書いていく，それを続けて６，６，６と書いた）に、乗法，または加法の構造が見えることを述べている。

児童の除法場面に対する理解と操作の関連性に注目した熊谷（1998）の研究は、児童自らが等分除と包含除の各場面に取り組む中で用いた素朴な考えと操作を明らかにしたものである。そこで示された、アプローチの違いや、そのアプローチによる計算ストラテジーの違いは、等分除と包含除がどのような関連を持って除法の知識構成に関わるのか、また、

数学の形式としての式化へ発展していくのかという問題意識をより明確にするものである。さらには、場面の数値が小数に換わることによって、児童の操作や表記がどう変容していくかも問題点として加わることになる。

吉田（1999）は，具体物を配る操作を児童が持つ真実感としてのリアリティと捉え、それを発展させることによって筆算アルゴリズムを形式化していくという実験授業を，４学年の児童を対象に行っている。

吉田（1998）は、除法に関する子どもの理解が等分除と包含除のそれぞれの場面の解決過程に与える影響について，以下の考察を行い、除数の単位を取り去る累減の操作を児童にとってのリアリティーとし、数の乗法的な操作を数学的なリアリティーとした。

・等分除では場面と操作との間にギャップが生じている。子どもが除法に対して「等分する」というイメージを持っている一方で，等分除はその過程に「１あたり量」という等しい単位が見えにくい。
・包含除の場面は，配る単位が予め見えているが，その配るという操作によって，かけ算かわり算かという演算決定に混乱を生じさせる。

これらの考察をもとに，吉田（1999）は，活動的リアリティから数学的リアリティへと発展するプロセスを操作的リアリティとし、その構成と発展を授業構成に取り入れていった。また、筆算アルゴリズムの形式化の過程において，まとまった単位をつくる活動として，10 の構成を行っている。

吉田（1999）は、熊谷（1998）と同じく、児童自らが等分除と包含除の各場面に取り組む中で用いる素朴な考えと操作を明らかにした。その実態をもとに、基準になる単位を意識させ、構成することによって、児童の操作を筆算アルゴリズムの形式化まで発展させている。

この２つの研究から、本研究における問題点とその解決へ向けての視点が得られる。

児童の実態として、等分除では場面と操作の間に、包含除では操作と計算の間にギャップを生じているということは、除法の概念を統合していく上でのギャップとなることが考えられる。それに対して、「同じ大きさの単位」で「全体」がつくられているいうことを意識させることは、「基準となる単位」をつくることが等分除と包含除の統合へ向けての一つの共通の視点となるであろう。加法や減法計算のストラテジーを発達させたり，乗法的な構造を示すことにつながったりした、操作を図に表現する活動は、自分の思考を表記することが児童自身の知識構成の過程において大きなステップとなったことを示している。

３．２　小数乗除法に関わる先行研究

３．２．１　小数乗除法の指導に関わる先行研究

中村(1996)は，小数の除法を割合で意味づける立場に立ち，その考えを生かす教材として数直線が有用であることを述べ、「意味の拡張を意識させるためには,『ことばの式』にたよって立式せず，数直線を根拠とする」ことや「意味を割合で捉えさせるために，１とみる見方や比例する量の関係を明確に意識させる」ことを挙げている。中村(1999)は，乗除法における数直線を用いた先行研究をまとめた中で,「数直線に数量の関係を表し，比例関係を読みとって立式する。除法の場合は□を用いて乗法の関係に表し，それから除法の立式をする」ことを述べている。

中村（1996,1999）は、数直線は整数や小数、分数を同じ線分上に表すことができることから、整数や小数、分数乗除法を統合するうえでも有効的な指導法であることを主張する。他方で、数直線に、子どもの思考過程に焦点を当てた視点でアプローチしている研究もある。

３．２．２　小数乗法の児童の思考に焦点を当てた研究

高橋（2000）は,「児童の思考過程を分析し，児童の素朴な知識をもとにした創造的な活動ができる授業構成の示唆を得る」ことを目的とした研究を行っている。

高橋（2000）は，児童が今までの学習を通して、乗法を累加の考えで捉えていることによって，児童の思考と操作に制限が加わり、児童の創造的な活動による授業の構成が難しくなっていることを指摘している。数直線を用いた指導法については，中村（1996）を例に，児童の素朴な考えをもとに，比例の考えを意識させながら，数直線をつくっていく活動が必要であること述べている。そこで，児童の自然なアプローチである累加の方法が比を使った方法に移行していくための活動として，テープ模型をつなげる操作から，数値が記入されているテープ図を描く操作へと移行させていく活動を設定している。高橋（2000）は、児童が比例の考えを進展させる要因として，小数乗法を整数乗法のプロセスと同じく捉えるために下位単位（最終的には 0.1）をとっていったことや，２量の単位を取り直していった（例えば，01.m-18 円という単位を構成し，0.1 を１，0.8 を８とする）ことを挙げている。

高橋（2000）の研究は、児童が自らの知識をもとに、乗法の概念を整数の場合から小数の場合に発展させていった過程を述べているという点で、小数除法の知識構成を整数除法の発展として展開していく上での示唆を与えるものである。同時に、小数乗法と小数除法との関わりという点からも、小数乗法の知識構成が小数除法の知識構成に果たす役割は大きい。そこで、以下の２点について注目する。

・数直線等の表記は、児童自らが素朴な考えを図に表し、それが発達したものの一つの形としてとして利用されるべきであること。小数除法におけるその発達過程には，累加の考えから比例の考えへと発達する過程がある。
・下位単位を設定することや，２量の単位を取り直す活動が比例の考えを進展させる可能性を持つこと。

３.２.３　児童の比例の考えに関する研究

これまでの先行研究から、除法概念が乗法的構造の上に成り立ち、また、比例の考えによって構成されていることが示された。ここでは、児童の比例の考えに関する研究として日野（1996,1997a,）の研究を取り上げ、考察する。

日野（1996）は，乗法的構造の関する中心的な推論の１つとして，比例的推論を挙げている。「比例的推論はある日突然に獲得されるのではなく，幼少の時分に既に芽生え，学校での学習等を通して徐々に発達していくものである。」（日野,1997a）と述べられているように、比例的推論は，児童の今までの生活経験や学習経験により大きく影響を受け，その様態も様々である。

日野（1996）は，比例的推論の一つの要素として、ユニットの構成とその利用に関わる児童の能力に注目し、日米の児童を対象にしたユニットの構成の特徴に関する考察を行っている。その中で「価格」と「速さ」の問題に対する応答の反応を比較し、次の考察を与えている。

・日本の児童には，問題に扱われる数量間の乗法的な関係に着目し，乗法や除法の演算を使って答えを導く傾向が見られた。米国の児童には，数量を繰り返し足したり引いたり，あるいは問題中の数量の大小関係から答えをゲスしたりしする傾向が見られた。
・日本の児童は特定のアプローチを比較的一貫して使う傾向にある。米国の児童は，個々の問題の状況に依存して異なるアプローチをとる傾向にある。

日野（1996）はこの違がを、ユニットの複合性の認識の違いと、児童の学校数学における経験の違いによって起きていると分析している。特に米国では、乗除法についての知識が計算の手続き以上に強調して指導されてい

ない一方で，日本では、乗法構造に関わる概念や手続きの指導が中心で,(道のり)÷(時間)という形式に直結することになっていることや、速さに対してのイメージが，形式的，抽象的で，具体性を欠いていることを挙げている。

日野（1996,1997a,）の研究より，児童の比例的推論が小数除法の知識構成に果たす可能性を考察していく。

乗法的構造を持つ小数除法において，児童の比例的推論の要素であるユニットの構成とその利用は、自ら知識を構成するための素朴な考えとしてあげられる。例えば、小数乗法においては、児童が下位単位 0.1 をとることによって、２量の単位を取り直すきっかけをつくっている（高橋,2000)。除法においては「基準となる単位」をつくること（熊谷,1998. 吉田,1999）が等分除と包含除の解決に向けての、そして統合へ向けての一つの共通の視点となっている。小数除法においても、「基準になる単位」を取り、それに対応する数量に着目することによってユニットを構成していくことが、児童自らの考えにもとづく知識構成の過程を見ていく上での有効な視点となり得るのではないかと考える。

４　自ら知識を構成する過程に着目した研究

熊谷（1998）や吉田（1999)、高橋（2000）の研究は、日野（1996,1997a）と同じく、児童のインフォーマルな考えをもとに、フォーマルな考えへと発展させていく研究である。そこで、児童の素朴な気づきに目を向け，それを自己発達させていこうとする研究として，Gravemeijer,K.(1997）や Gravemeijer,K. and Cobb,P. at al(2000)を考察する。

Gravemeijer.（1997）は，数学教育における問題の多い論争の一つとして，生徒らにいかに抽象的な数学的な知識を教えるかという疑問を挙げている。そこで、インフォーマルな知識と方略が，抽象的な数学的知識を発達させるための起点であるべきであるという RME 理論によるモデルの自己発達というアプローチを提示した。このアプローチは，教師が抽象的な数学的知識を移行（伝達）する「トップーダウン」のアプローチに対比して，「ボトムーアップ（数学化)」と特徴づけられるアプローチであり，自己発達したモデルに基づく，具体的観念と抽象的観念の間を調停するためのアプローチである。Gravemeijer.（1997） は，インフォーマルな知識とフォーマルな数学とのギャップを埋める役割を果たすモデル（model-of，model-for）を位置づけ，そのモデルの発達の過程を，図１に示す４つのレベルで表している。この４つの活動の型は厳密に定められた階層で区別されてはいない。

ここでモデルという言葉は，記号で表すことや表記することの方法として，課題状況や言葉の描写記号を指すというよりは，動的で全体的な意味で捉えられる。モデルは，児童自身によって開発され，問題を解決する際に自ら発達させるものである。

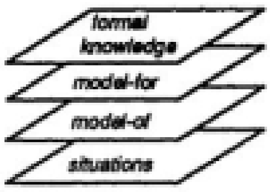


図１

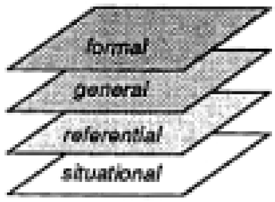


図２

このモデルは，より多くの一般的な言葉を用いて記述されてもいる（図２)。それは次のような状態を表す。

・situation ー状況のレベル

状況的な知識と方略が，その状況（主として学校外の状況）の文脈の中で使われる領域にあるレベル。個人の特定の領域の状況的な知識や方略をもってきて，その状況にそれらを応用する。

・referential ー参照的レベル

model-of が，（主に学校の中の）教育活動において記述される状況を参照するところに関連したレベル。学校の授業の中で，課題として提示されるようなものに対しての活動。まだ解決プロセスには至っていない。

・general －一般的レベル

model-for が状況に特有のイメージに独立し，解釈と解決の上で数学的な焦点が文脈の参照を支配する一般的なレベル。数学的な関係に気づき，数学的見地からの方略に焦点が当てられる。

・formal －フォーマルなレベル

model-for の数学的な活動の支援に依存しない，人が従来の手続きや表記法を使って作業をするフォーマルな算数のレベル。正式化された記号や一定の手続き，標準のアルゴリズムの使用によって特徴づけられる。

Gravemeijer.（1997） は，RME 理論において,「数学は主としてプロセス，人間の活動と見なされると要約できる」と述べ，数学化をの過程を捉えている。それは、数学的問題の数学化に焦点を合わせるプロセスとして、フォーマルな記号化，および解決手続きの系列において反映される「垂直的な数学化」と，あまり目に見えにくい社会的文脈の中にある問題とインフォーマル方略に関係のある「水平的な数学化」という２つの視点からなる。Gravemeijer.（1997） は，垂直的な数学化が、水平的な数学化により支えられながら段階を上げていく（level-raising）ことを述べている。それは次の４つの特性による。

・一般性：一般化（類似を調べること，分類すること，構造化すること）
・確実性：反省，正当化，証明（組織的なアプローチを用いること，推測を詳しく述べること，試みること）
・正確さ：モデル化，シンボル化，定義（解釈を制限することと妥当性）
・簡潔さ：シンボル化と図式化（基準となる手続きや表記法を発達させること）

児童が数学的な知識を広げたり，技能や記号表現などを発達させる「垂直的な数学化」は，児童がその数学的内容に対しての一般性や確実性，正確さや簡潔さを改善することによって段階を上げていくことを示している。それは常に，児童自身の生活経験や学習経験に基づく現実の問題に関係した小さな発見や気づき，体験的で操作的なものに関連づけられる「水平的な数学化」によって支えられていることになる。モデルの自己発達というアプローチは、「水平的な数学化」と「垂直的な数学化」の相互関係を表しているとも考えられる。

ここで、２章において提示した授業場面を取り上げてみる。場面１においては、児童が問題の文脈においてその学習以前に持っている知識，または，気づきや発想をもとにした活動が必要であった。場面２から場面４にかけては、児童の思考を model-of から model-for への自己発達という観点から捉えることが必要であった。そうすることにより，児童の思考や操作が発達したものとしての表記が現れ、その表記が形式化されていく過程において立式も行われていたであろう。提示した授業場面に現れてきていない児童や授業で自分の経験を生かせなかった児童，または，授業にうまく参加できなかった児童にとって，彼らが参加したその授業は situation から出発しているものではなく，formal-general，あるいは formal-general-referential のなかで行われていた授業だったとも言える。これでは，日常の生活とはかけ離れたものになり，また，数学化という点からも児童にとっては意味のあるものとして行われていなかったことになる。

PEM 理論にもとづく、Gravemeijer.(1997) や Gravemeijer. and Cobb. at al(2000)の研究から，児童自らの考えや活動をもとに授業を構成していくための多くの視点が得られる。

５．具体的観念と抽象的観念の間を調停するためのモデル　－小数除法におけるmodel-ofとmodel-forの捉え－

以下では，上記の先行研究から得られた示唆をもとに，特に Gravemeijer.（1997）や Gravemeijer. and Cobb,P. at al(2000)の研究を中心に小数除法におけるモデルの自己発達（model-of と model-for）の枠組みを検討

する。

熊谷（1998），吉田（1999)の研究から，児童が小数除法の知識構成を行っていく上でのギャップと、等分除と包含除を関連付け、統合するするための共通点となり得るものが示された。ギャップとは、児童がインフォーマルな考えを用いることにより、等分除では場面と操作の間に，包含除では操作と計算の間にずれを生じさせることであり、共通点とは、等分除と包含除が共に基準の単位の構成を必要とすることである。

児童の等分除や包含除の自己発達の過程を、場面理解（situation）－操作表現（model）－計算（formal）という段階で捉えたとき、等分除と包含除のギャップは、段階を上げる別々の過程において生じていることになる(図３)。そこで、筆者は、Gravemeijer.（1997）の「水平的な数学化」と「垂直的な数学化」に着目し、等分除と包含除の知識構成がお互いの発達を支え合うことによって行われていくと考えることによって、ギャップを解消するための活動が設定できると考える。その活動は、等分除においては model-of の活動であり、包含除においては model-for の活動である（図４)。基準単位の必要性は、その水平的な数学化を通して、一般性や確実性，正確さや簡潔さを改善していく「垂直的な数学化」の過程において生じたものである。

児童自身が持っているインフォーマルな方法が垂直的な数学化を支えるというということを小数除法の数学化という大きな枠組みで捉えると，包含除と等分除の知識構成において行われる垂直的な数学化は，互いに水平的な数学化を伴いながら，小数除法の知識構成へと発達し，統合されていくと考える。

以上のことから，筆者は図５のような，小数除法の学習に関するモデルを設定する。包含除や等分除における model-of は，各々の場面状況・文脈に依存している考え方である。この model-of が自己発達することにより，等分除と包含除各々の model-for になる。さらに小数除法という大きな枠組みで考えた場合，等分除と包含除の model-for は小数除法の model-of となり，それらが自己発達したものが小数除法の model-for となることを示している。

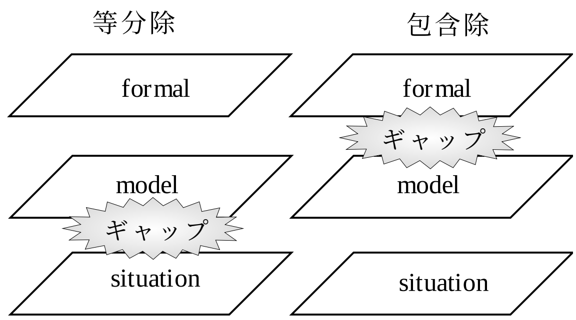


図３

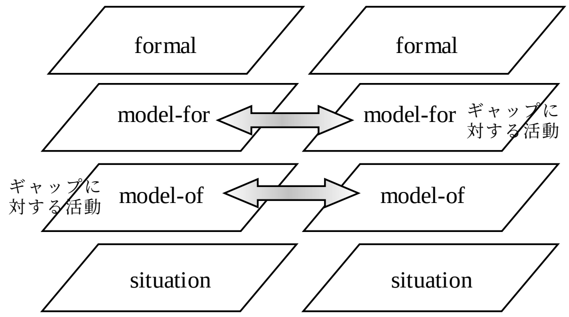


図４

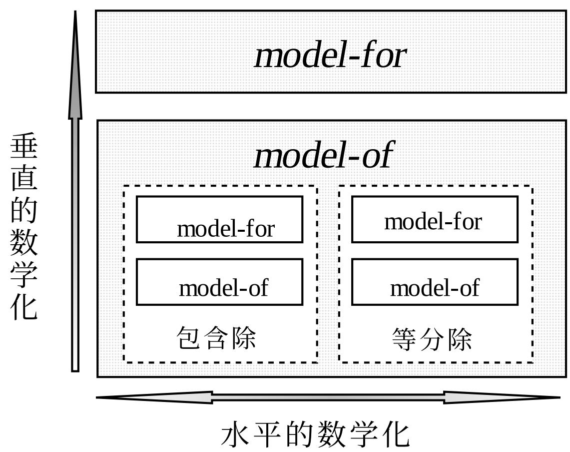


図５ 小数除法のモデル

以下では，等分除と包含除の model-of と model-for にあたるものと小数除法 model-of と model-for にあたるものについて具体的な例を挙げて考察する。

（１）包含除の場合

400 ｇの薬を１人に 2.5 ｇずつ分けます。 何人に分けることができますか。

問題文中にある数値のみを用いて，取り除く操作が包含除の model-of となる。例えば次のようになる。

400 ｇから 2.5 ｇを１つずつ取り除く。
400 － 2.5 ＝ 397.5　→１人目。
397.5 － 2.5 ＝ 395　→２人目。
395 － 2.5 ＝ 392.5　→３人目。
・・・
５－ 2.5 ＝ 2.5　→ 159 人目。
2.5 － 2.5 ＝０　→ 160 人目。

この包含除の model-of は, 10 人分（10 倍）, 100 人分（100 倍）などの人数分の薬の「あつまり」をつくり，それを 400 ｇから取り除いていくという簡略した操作が用いられることによって，model-for へと発達する。そこでは，比の考えが導入され，主に数の操作を扱った活動になる。また，筆算の形式も導入される。具体的には次のようになる。

10 人で 25 ｇ，100 人で 250 ｇになることから，400 － 250 ＝ 150
100 人分が取れたが, まだ 150 ｇ残っている。
20 人で 50 ｇだから，150 － 50 ＝ 100
さらに 20 人分取れたが，まだ 100 ｇ残っている。
40 人で 100 ｇだから，100 － 100 ＝０
さらに 40 人分取れて，残りがなくなった。よって,
100 ＋ 20 ＋ 40 ＝ 160（人分）

これを筆算の形式にすると，右記のようになる。

```
          4 0
          2 0
        1 0 0
2 . 5 ) 4 0 0
        2 5 0
        1 5 0
          5 0
        1 0 0
        1 0 0
            0
```

（２）等分除の場合

2.5kg で 350 円の塩があります。 １ kg ではいくらになりますか。

等分除の model-of は，問題文中にある数値を分解して，割り当てる操作が用いられる。具体的には次のようになる。

2.5kg と 350 円を次のように分解する。
2.5kg（１ kg ＋１ kg ＋ 0.5kg）
350 円（100 円＋ 100 円＋ 100 円＋ 50 円）
・・・・・
$\boxed{１ kg}$　$\boxed{１ kg}$　$\boxed{0.5kg}$
<u>100 円</u>　<u>100 円</u>　<u>50 円</u>
（まだ 100 円残っている。）
<u>20 円</u>　<u>20 円</u>　<u>10 円</u>
（まだ 50 円残っている。）
<u>20 円</u>　<u>20 円</u>　<u>10 円</u>
よって，１ kg のねだんは 140 円になる。

等分除の model-for は，重さを２倍，３倍，４倍・・・することによって、小数の操作から整数の操作へ移行する。数の操作の中に、より発達した比の考えが導入される。その結果，小数の計算も整数の計算へと展開する。具体的には次のようになる。

2.5kg で 350 円なので，５ kg は,
350 × 2 ＝ 700(円)
よって，１ kg のねだんは,
700 ÷ 5 ＝ 140(円)

または,

2.5kg で 350 円なので，５ kg は,
350 × 2 ＝ 700(円)
7.5kg は，350 × 3 ＝ 1050(円)
10kg は，350 × 4 ＝ 1400(円)　になる。
10kg で 1400 円なので，１ kg のねだんは,
1400 ÷ 10 ＝ 140(円)

包含除と等分除では上記で示したような発達が各々の model-of から model-for への過程でみられる。これらは，包含除や等分除の各々の状況や場面に依存した解決であり、操作的な活動によって、減法、加法、乗法の計算ストラテジーが多く用いられる。基準になる単位は様々である。

（３）　小数除法の model-of と model-for

小数除法の model-of は、小数除法場面の文脈に即した活動として等分除と包含除に共通した思考が用いられる。その共通の思考とは、課題の場面や状況に応じて、比の考えを用いながら児童自らが基準になる単位を決定し、ユニットを構成していくことである。

この小数除法の model-of に相当する児童の考えが小数除法の model-for へと発達するきっかけとなるのは、児童が基準になる単位として 0.1 を用いる（高橋,2000）ことであると

予想される。基準単位として 0.1 を用いることによって、等分除と包含除どちらの場合にも 10 倍や 100 倍を用いることによってユニットの構成ができる。そうして構成されたユニットは、小数と整数の対応を捉え直すことによって、減法、加法、乗法の計算ストラテジーから、既習の除法の計算を用いる活動へと発達することが期待される。

６．まとめと今後の課題

本稿では，まず，今まで筆者が行ってきた小数除法の授業場面から，その授業における問題点を挙げ，その問題点を小数除法の関わる先行研究や子どもの思考に関わる先行研究と照らし合わせることで，その解決の手がかりとなるものを得てきた。そして，児童一人ひとりが自分の生活経験や学習経験を通して構成してきた数学的知識を生かしながら，小数除法の意味づくりをしていくまでの認知モデルの発達過程を設定した。

筆者はこの認知モデルの自己発達の過程を，Gravemeijer. and Cobb. at al（2000）のモデルの自己発達という立場から設定した。そして，小数除法の学習に有効に働く児童のインフォーマルな考えとして，日野（1996,1997a）の比例的推論とその一つの要素であるユニットの構成・利用に着目し，除法の等分除や包含除のモデルの自己発達について，さらには小数除法のモデルについて考察した。

その考察の中で得られたことは以下の通りである。

・等分除や包含除の model-of では場面に即した操作的な活動が用いられる。

・等分除や包含除の model-for では，model-of での操作がより簡略化され，数値的な操作によって解決が進む。その操作には比例的推論によるユニットの構成と、場面や状況に応じた基準単位の設定が含まれている。

・上記の２点をもとに構成される小数除法の model-of は，基準単位 0.1 を用いることによって、小数除法の model-for へと自己発達していく可能性を持つ。

今後の課題として，次のことが挙げられる。

・小数除法における児童の思考としての model-of と model-for の結びつきとその発達の過程をさらに考察する。特に、基準単位 0.1 を用いるきっかけとなる活動を考察する。

・児童の乗除法の場面理解についてや比の考えについて，小数の概念についての実態調査を行い、小数除法の単元構成を行う。

・教授実験を行い、その分析と考察を行う。

５．主な引用参考文献

Gravemeijer,K.(1997).Mediating Between Concrete and Abstract. In Nunes,T & Bryant,P(eds.) ,*Learning and Teaching Mathematics* :An International Perspective(pp.315-345) .UK: Psychology press.

Gravemeijer.K., Cobb.P. & Bowers.J., Whitenack,J.(2000).Symbolizing, Modeling, and Instructional Design. In Cobb,P., Yackel,E., & McClain,K (eds.), *Symbolizing and Communicating in Mathmatics Classroom*(pp.225-273). Mahwah NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

熊谷光一(1998).３年除法の導入に関する教授実験における授業計画のための示唆. *筑波数学教育研究,17.* pp.95-104.

高橋久誠(2000).小数の乗法の授業構成に関する考察－比例の考えをもとにして－. *上越数学教育研究,15.* pp.85-94.

中村享史.(1996). 小数の乗法の割合による意味づけ. *日本数学教育学会学誌,78(10).* pp.7-13.

中村享史.(1999). 乗除法の指導における数直線の教育的役割. 杉山吉茂先生ご退官記念論文集編集委員会(編). *新しい算数・数学教育の実践をめざして―杉山吉茂先生ご退官記念論文集―.* pp.87-95. 東洋館.

日野圭子.(1996). 比例の問題の解決において構成されるユニット: Well-Chunked Measures を含む問題に対する日米児童の応答の分析. *筑波教育数学研究,15.* pp.15-24.

日野圭子.(1997a). １人の児童を通してみた数学的表記の内化の過程の分析－比例的推論との関わりにおいて－( ). *日本数学教育学会誌,79(2).* pp.2-10.

吉田 享.(1999).子どものリアリティーを基盤とした活動の構成－第４学年・除法の筆算アルゴリズムの形成を目指した教授実験を目指して－. *上越数学教育研究,14.* pp.99-110.