上越数学教育研究, 第 18 号, 上越教育大学数学教室, 2003 年, pp.143-154.

数学の授業における数学化のプロセスの評価に関する研究

日　野　昭　彦
上越教育大学大学院修士課程１年

1. はじめに

私が目指す数学の授業は、解き方を教え込んだり、暗記や反復練習だけを求めたりする形式的なものではなく、問題解決のための方法を生徒自らが模索し、問題内容を定式化する思考のプロセスに重点をおくものである。つまり、生徒が主体的に数学を創り出す活動が見られる「数学化」の場面を重視した授業である。このような授業を構成することで、生徒の多様な考え方を促し、よりよい問題解決を図る態度を養うとともに、数学的な見方や考え方をより深めることができると考える。しかし、これまでの自分の授業を振り返ると、問題解決を重視した授業において、生徒の多様な見方や考え方を引き出せなかったり、それらに直面した時でも取り上げてうまくまとめたり、さらに活動を深めていけるような手立てを講じることができずに、ただ出させるだけで終わってしまうことが多かったように思う。この原因は、数学を結果ではなく過程（対象への働きかけ方）として捉えることで、授業中に展開される子どもの思考の過程（数学化のプロセス）を見取り、それを意味づけ、再び働きかけていく一連の評価活動を行っていなかったからではではないかと考えられる。言い換えれば、生徒の数学化の展開そのものを授業で発展させるためには、生徒の数学化のプロセスを評価する必要性が必然的に生じてくるということである。このような反省から、授業の中における評価を軸にして、授業のあり方や教材の選択などを考えることは有意義なことであると考える。そのためには生徒の思考の働きや過程を評価する場として、思考する必然性が存在する切実な場面、思考する意味のある現実味のある実践的な場面などを考えることのできる場を設定することが重要であると考える。

本研究は、生徒が数学を創り出していく場として数学化のプロセスに焦点を当てて、授業の中における評価という視点から教師と生徒の関わりや、数学の授業にける評価過程の様相を明らかにし、授業の再構成を目指すものである。

2. 数学化に関する考察

2.1 H.Freudenthalの数学化

Freudenthal（1968）は、数学の学習過程について次のような主張をしている。

> 人間が学ばなければならないのは、閉じた体系としての数学ではなく、創造的な活動としての数学、すなわち、実在を数学化する過程や数学を数学化する過程である。

そして数学化（mathematizing）の意義を、Freudenthal（1970）は次のように述べている。

> 科学が単なる経験の集積から脱却するや否や科学は経験の組織化を必然的に含むものとなる。経験が算数と幾何で組織されることを示すのは難しいことではない。今日、数学的方法で実在を組織することは、数学

化と呼ばれている。しかしながら、論理的な関係がより早い進歩を約束するやいなや、数学者は、実在を無視するようになる。数学的な経験が蓄積される。その蓄積は一部が組織されることが求められる。この要求に対して、いかなる方法が使えるのか。もちろん、再び数学的方法である。これが数学自体の数学化の始まりである。

つまり、Freudenthal は、数学化を「蓄積した経験を数学的方法により組織すること」とし、その数学化には、「実在の数学化」と「数学の数学化」があると捉えている。数学化を考えることは、生徒の数学的活動を促進するという点で意義のあることである。授業の中に操作的活動や作業を取り入れていくことは、数学化のための活動の出発点となると考えられる。そして、生徒自身がこの活動の中で数学を意識し、数学的に意味のある活動をしつつ、数学を学び取っていかなければならない。すなわち、単なる操作活動レベルから数学としてのレベルへの移行（水準の移行）がなされなければならない。再発明（Re-invention）の考えの基本は、Van Hiele の思考の水準の考えが基になっている。

学習過程は水準によって組み立てられる。低位の水準の活動は、そこでの水準では組織化される活動であるが、高位の水準では分析の対象になる。低位の水準の操作上の問題は、高位の水準では対象の問題となる。生徒は数学的方法によって組織化することを学び、自発的な活動を数学化することを学ぶ。

つまり、水準の移行が行われることで、学習者が前水準の活動を意識化することができ、前水準の活動の方法を次の水準での学習の対象として見つけ出すことである。また、各水準では、考察の対象となった前水準の方法をその水準の方法で整理組織化していくことで、新しい知識や方法がもたらされる創造的活動がなされるのである。

2.2 A.Treffersの数学化

Treffers(1987)は、van Hiele の水準理論と Freudental の教授理論から漸進的数学化（Progressive Mathematisation）を提案した（図１）。Treffers は「数学化は既に獲得した知識や能力を使って、まだわかっていない規則性、関連性、構成を得るための組織的、構造的な行動である」と述べている。この数学化の特徴は水平的数学化（horizontal mathematisation）と垂直的数学化（vertical mathematisation）という２つの方向性である。

○水平的数学化（horizontal mathematisation）

…数学的問題に変換する

- 帰納を通して規則性を発見する
- 問題を既知のモデルに変形する
- 一般的文脈の中から数学的要素を同定する

○垂直的数学化（vertical mathematisation）

…数学的に処理する

- 記号を用いる
- 解法を一般化する
- 一般化されたものを形式化する
- 概念を正確に定義する
- アルゴリズムを構成する

この２つの数学化は、独立したものではなく、強く相互に関係し合っている。その進み方は一様ではなく、水準の上がり方も「細切れ」で直線的ではない。Treffers は、この２種類の数学化によって数学教育を構成しようとした（図２）。

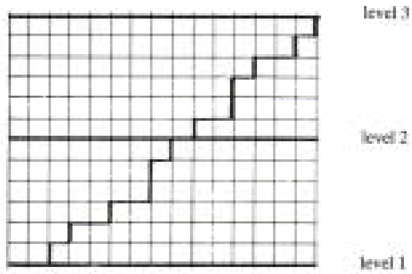


図1　Treffers(1987)

2.3 本研究の数学化の捉え

本研究の目的は、子どもの数学化のプロセスをより具体的に評価することである。数学化のプロセスは Freudenthal の「数学的方法により組織する」活動に具体的に見られると考えられる。Freudenthal の理論から学校数学における学習過程の理論化を図った磯田（1990）の数学化の捉えを、本研究の数学化の捉えとしたい。つまり、数学化を「ある現象の考察において用いた方法（操作）を対象として、新しい方法（操作）を導入、確立し、その新しい方法に基づき新しい考察ができるようにすること」と規定するものである。また授業の枠組みとしては Freudenthal の「実在の数学化」と「数学の数学化」をより理論的に具体化した、Treffers の水平的数学化と垂直的数学化を授業構成の枠組みとして考察する。

3．授業内評価に関する考察

3.1 評価に関する先行研究

生徒の思考のプロセスを評価する試みが多くの研究でなされてきたが、大きく分けると、レポートやテストなどで得た評価情報を次時以降の指導に生かす評価の研究と、授業内でフィードバック機能を果たす評価の研究の２通りに分けられる。

前者として、植松ら(1981)、植木(1984)、斉藤ら(1996)、永田(1998)などのテストの形式による評価の実践・分析の研究が挙げられる。黒土(1988)はテスト形式の他に、一人ひとりの実態に応じた評価方法で生徒の実態を把握し、指導に生かす研究を行った。伊藤(1995)は授業中の情意変化に着目し、生徒の自己評価の過程を価値判断の過程としてモデル化を試みた。二宮(1998)はルブリックという評価基準を用いた数学的 Writing の評価法の検証を行った。山中(2000)はポートフォリオ評価により、数学的な考え方の指導の改善を提案した。鈴木(2001)は Do Math の学習指導の在り方を、記述式問題による定期テストの評価の研究から明らかにする実践を行った。永田(2002)は活動を重視した授業における評価の方法を、子どもが作成したレポートを対象に具体化し、その実践における可能性を検証した。

後者として、永井ら(1982a,1982b,1983)は指導のための評価という立場から、指導へ即時的にフィードバックしていく１時間の授業過程における評価の在り方を述べた。内田(1989)は問題解決において数学を創り上げていく過程（数学化の過程）を中心にして、そこに働く数学的な考え方を取り出して、評価マトリックスを用いて評価することをねらいとして研究した。加々美(1987)は数学的な考え方を、生徒の図化する考えを中心に授業内における評価のあり方について研究した。江森(1995)は数学の学習場面におけるコミュニケーションの評価を、個人の評価と全体の評価の相互作用という視点で、評価の研究を行った。

このように評価の場に焦点を当てて先行研究を見ると、当面している指導そのものへの評価の生かし方に即時性がなく、後手の指導へのフィードバックになってしまっているという問題点があげられる。また、どのように評価するか、いかに「評定」として役立てるかということにこれまで重点が置かれていて、評価から得た情報をいかに指導に生かし、その評価によって子どものどのような変容を期待し、実際変わったのかということに関しての研究が少なかったことがわかる。授業はもちろん１時間完結型ではないので、生徒のレポートやコメントから情報を収集して次時に生かすことももちろん必要であるし、生徒に対する評価だけではなく、教師自身も自

分の授業について評価することも重要である。しかし、本研究では実際の授業づくりの中心となるであろう授業内における評価に焦点を絞って考察する。

3.2 永井ら(1982a,1982b,1983)の研究

永井らは、指導のための評価として、前述した指導への即時的なフィードバック機能と子どもの理解の質的な違いに対処することに重点を置き、１時間の授業過程における評価のあり方を明らかにする試みを行った。永井らのいう評価は、子ども達の反応に対しての解釈や推測、判断であり、この評価に基づいて次の指導が即時的に打たれることにつながる。つまり、子ども達の反応を捉えることだけではなく、まず、その多様な反応を捉えたならば、その反応がどのような考え、どのような既習の事柄をもとにしているのか、あるいはまた、どのようなつまずきの原因をもっているのかという反応の根拠となっているところを推測し、解釈し、判断することである。その上で、評価に応じて細かな手立てを打っていくのである。この評価の考え方からすれば、評価は指導に伴って絶え間なく行われ、その評価から次の発問、助言が生まれ、指導－反応の把握－評価－評価に基づく指導－反応の把握…というサイクルの学習指導が展開されることになる（図２）。

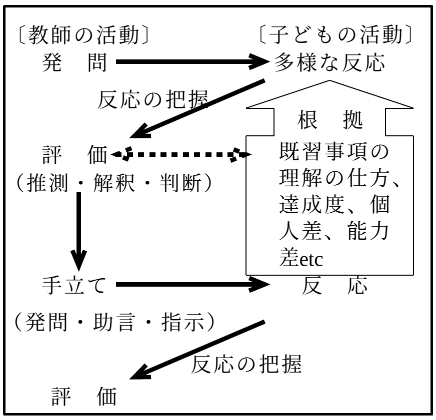


図２　永井（1983）：学習過程の評価

3.3 授業に内在化している評価の研究

小林(2001)は、授業場面における教育評価を、授業のやりとりから切り離され外在化している評価と、授業のやりとりの中に内在化している評価とを区別して、内在化している評価の必要性を強調している。形成的テストや自己評価カードなどによる評価は、教授学習と基本的には切り離された外在化している評価であり、両者をどうつなげていくかが常に問われる。それに対して内在化している評価は、教授学習と評価が同一の場で行われ、教授学習の相互作用の一部をなす評価として捉えることができる（図３）。

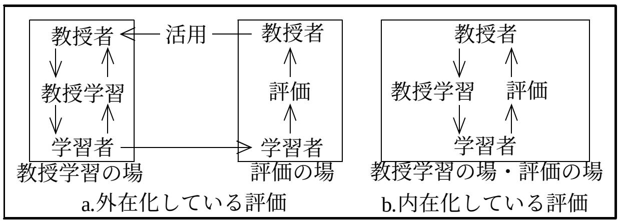


図３　小林(2001)教授者による学習者の評価

本研究で問題にしている評価の立場はもちろん後者であるが、授業のやりとりだけを取り上げることは、やりとりに参加していない生徒への評価はできないことにつながる。小林(2002)では、この問題点に対して、内在化している評価を、生徒と教師が共同して１つの評価過程を作りあげていく共同構成の場として捉えている。そこでは「公的な評価」と「私的な評価」という観点が述べられている。発言の機会を得ることができた生徒は、他者に評価されることを意識して発言し「公的な評価」を得るのだが、発言者以外の生徒は、発言者の考えを自己の内にとどめる「私的な評価」を行っている。この「私的な評価」は主に記述（言語、記号）となり「公的な評価」の対象となる。評価主体は教師であり、他の生徒であり、自分であるということになる。

3.4 本研究の授業における評価の捉え方

本研究における評価は、学習者の発達・学習を保障するという観点に立った教育的な機能を本質とする教育評価である。学習指導において、目の前の子どもに、どう発問し、どう学習を進めさせることが必要かを、指導の中で即時的に判断し指導に移していく、指導に直結した評価である。前述の永井らは評価することを、反応の根拠を推測、解釈、判断することとして捉えた。黒澤(1998)は『収集→解釈→調整』という一連の流れが評価活動の中味であるとして、その結果として次の行動（指導）が表面化すると述べている。これらの評価の考え方からすれば、授業実践は評価があって指導があるというもので、「評価→指導」の連鎖として捉えることができる。教育実践は評価実践であり、それらは同時に起こっているという認識に立つことが、評価と指導の一体化への条件である。そして森(1996)の提言にみられるように、指導の結果を評価する「過去向き」の評価ではなく、評価から得た情報に基づいて教師が実践の再構成をする「未来向き」の評価として、教育評価を捉えることが必要であると考える。評価は毎日の授業づくりの作業そのものであり、教師の指導のあり方の核となるものである。

4. 実証授業の構想

本研究で実現したい授業は、子どもが主体的に数学をすること、つまり創造的な活動である「数学化」が展開される授業である。数学を知識体系として見るのではなく創造的な活動として見ることで、結果より過程を重視しようという筆者の思いがある。結果より過程を重視しようとしたときに、生徒の自発的活動により生徒自身が数学化をすることを学ぶような学習過程が見られるように意識的に仕組む必要がある。そのような授業を実現するための手立てとして、指導に即時的にフィードバックされる評価が重要であると考える。教師の手立てによって子どもの活動がどのように進み、どのような数学化のプロセスをたどるのか、授業の構想を述べる。

4.1 課題「ビリヤードで数学しよう」

本研究で実現したい授業にふさわしい課題として、ビリヤードの玉の跳ね返る回数についての課題を設定した。事象の中に隠されている規則性を見つけていくことは、数学の重要な側面であり、小学校から規則性を発見するための様々な方法を学んできている。例えば、

- 順序よく考える
- 表にまとめて整理する
- 簡単な数の場合で調べる
- 変化する量に着目して関数関係を式に表す
- より一般的な規則を見つける
- 仮説を立ててみる
- 仮説に対して正しいかどうか実験により確かめる
- 実験で確かめられたことの根拠について考える

などがあげられる。この課題は、子どもがビリヤードの玉の動きを実際に図に書きながら試行錯誤することで、いくつかの簡単な規則性を発見しうるものである。しかし、さらに複雑な規則性については容易には発見できないものもある。そこで、自分の発見したパターンやパターンを見つけ出した活動それ自身を反省して、よりよい活動を模索することで、より洗練された活動へと移行できる可能性をこの課題は内包している。このような数学的な考え方の高まりは、個人レベルでは難しくても、授業における相互作用において解決が可能であると思われ、さらにその根拠にまでせまることができる課題として、子どもの数学化のプロセスを見るにはふさわしい課題であると考える。

4.2 指導計画

（１）単元目標

①方法や手順を工夫し、パターンを発見する
②発見したパターンについて、自分なりの根拠を探る
③新たな課題を設定し、解決しようとする

（２）評価の観点

磯田(1985)は数学化の見地からの創造的な学習過程の考察の中で、子どもの数学化を促す手立てとして２つのことを述べている。１つは、数学化の前提となる直観的な活動を、反省を促すことで数学化を進める手立てとなる「反省的思考」があげられている。この反省の対象として、子どもの活動が外在化するシンボルがその対象となり、この「シンボルの利用」が２つめの数学を促す手立てとして述べられている。本課題でも、図や表などのシンボルが課題を解決する際の重要な道具となることが予想され、その役割は、操作を意識させる機能やコミュニケーションの機能であると考えられる。

本研究では、このような手立てを教師の評価としてとらえ、次のような評価の観点として授業の構想を立てることにする。

観点１：何気なく行っている活動の意味を明確に明確にすることで、意識的な活動にしていく
観点２：自分の行っている活動を反省し、振り返ることで、より洗練された活動していく
観点３：つまずきの原因を明らかにすることで、より一般的な活動にしていく

（３）展開例

Treffers(1987)の漸進的数学化を枠組みとしてこの課題を捉えたときに、子どもがどういう数学化の過程をたどるのか、１つの展開例を基にして考察する。子どものたどる数学化は様々であり、その様相は複雑である。教師の意図したように進むことはまれであるし、どのような過程で困難を示すのかなど、子どもの活動から見取るためにも数学化の過程を想定しておくことで、教師の手だてを考えることができる（図４）。

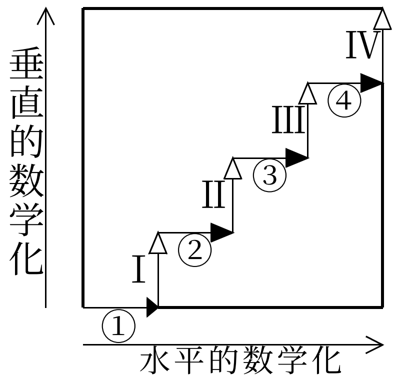


図４　本課題の数学化の過程

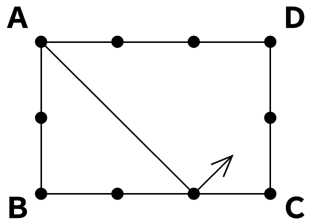
（水平的数学化）
①図に書いて考える
・簡単な場合を書きながら課題を把握する
・複雑な場合についても調べてみる
・縦と横を変えることで跳ね返る回数がどう変わるか観察する
②表にあらわす
・記録の方法を工夫する
・一方を固定することで、跳ね返る回数がどう変わるか記録する
③規則性を見つける
・集めたデータから帰納的に規則を発見する
④整理する
・一般化されたものを簡略化，統合化して整理する

（垂直的数学化）
Ⅰ数学的に処理する
・縦，横と跳ね返る回数の関係を明確にする
Ⅱ振り返る
・データや方法を振り返る
Ⅲ一般化する
・発見した規則性がどんなときにも成り立つかどうか調べる
Ⅳ形式化する
・一般化されたものを数式などに置き換えることで形式化する

4.3 具体的な生徒の活動と評価・発問

課題　右の図のようなビリヤード台があります。左上のかどから、４５度の角度で打ち出された玉は、わくにあたると４５度の角度で跳ね返り、台のかどに着くまで止まらずに転がり続けるものとします。

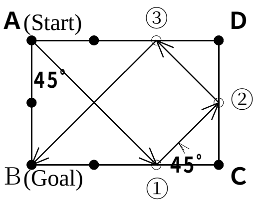
いろいろな大きさの台で、玉が止まるまでに何回はね返るかを調べて、わかったことを発表しよう。



生徒の活動	評価の観点・発問

①図を書いて考える

・跳ね返る回数とは、スタートとゴールを抜かした玉の軌跡と枠とのぶつかった点の個数のこととして捉える。



Ⅰ縦，横と跳ね返る回数の関係を明確にする

②表にあらわす

・**(表1)** 縦を固定して横を変える。

	縦	横	回
◇	1	1	0
◆	1	2	1
□	1	3	2
■	1	4	3
△	1	5	4
	1	6	5
	1	7	6
	1	8	7
	1	9	8
	1	10	9

	縦	横	回
◆	2	1	1
◇	2	2	0
▲	2	3	3
◆	2	4	1
▽	2	5	5
□	2	6	2
	2	7	7
■	2	8	3
	2	9	9
△	2	10	4

	縦	横	回
□	3	1	2
▲	3	2	3
◇	3	3	0
▼	3	4	5
☆	3	5	6
◆	3	6	1
	3	7	8
	3	8	9
□	3	9	2
	3	10	11

	縦	横	回
■	4	1	3
◆	4	2	1
▼	4	3	5
◇	4	4	0
★	4	5	7
▲	4	6	3
	4	7	9
◆	4	8	1
	4	9	11
▽	4	10	5

	縦	横	回
△	5	1	3
▽	5	2	1
☆	5	3	5
★	5	4	0
◇	5	5	7
	5	6	3
	5	7	9
	5	8	1
	5	9	11
◆	5	10	5

	縦	横	回
	6	1	5
□	6	2	2
◆	6	3	1
▲	6	4	3
	6	5	9
◇	6	6	0
	6	7	11
▼	6	8	5
▲	6	9	3
☆	6	10	6

	縦	横	回
	7	1	6
	7	2	7
	7	3	8
	7	4	9
	7	5	10
	7	6	11
◇	7	7	0
	7	8	13
	7	9	14
	7	10	15

	縦	横	回
	8	1	7
■	8	2	3
	8	3	9
◆	8	4	1
	8	5	11
▼	8	6	5
	8	7	13
◇	8	8	0
	8	9	15
★	8	10	17

	縦	横	回
	9	1	8
	9	2	9
□	9	3	2
	9	4	11
	9	5	12
▲	9	6	3
	9	7	14
	9	8	15
◇	9	9	0
	9	10	17

	縦	横	回
	10	1	9
△	10	2	4
	10	3	11
▽	10	4	5
◆	10	5	1
☆	10	6	6
	10	7	15
★	10	8	7
	10	9	17
◇	10	10	0

◇縦＝横（１：１）　◆縦横の比が１：２
□縦横の比が１：３　■縦横の比が１：４
△縦横の比が１：５　▲縦横の比が２：３
▽縦横の比が２：５　▼縦横の比が３：４
☆縦横の比が３：５　★縦横の比が４：５

(表2) 10 × 10 の表にまとめる

（横）

（縦）	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	1	0	3	1	5	2	7	3	9	4
3	2	3	0	5	6	1	8	9	2	11
4	3	1	5	0	7	3	9	1	11	5
5	4	5	6	7	0	9	10	11	12	1
6	5	2	1	3	9	0	11	5	3	6
7	6	7	8	9	10	11	0	13	14	15
8	7	3	9	1	11	5	13	0	15	7
9	8	9	2	11	12	3	14	15	0	17
10	9	4	11	5	1	6	15	7	17	0

○図に書いて考えているか

（観点１）図の中で何を数えれば解決につながるのか？

（観点２）図に書かなくてもわかる場合はどんな時か？

（観点３）どれくらい調べればよいのか？

○表に書いて考えているか

（観点１）図以外の方法はないか？

（観点２）パターンが見やすい表はどんな表か？

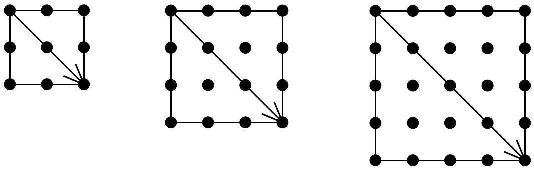
（観点３）パターンが適用できないのはどんな時か？

Ⅱデータや方法を振り返る

③規則性を見つける

○**規則１**＊縦＝横（正方形）の時は跳ね返る回数は０回（対称性・相似）

〔２，２〕　〔３，３〕　〔４，４〕



○正方形になる事例を取り上げようとしているか

「なんで正方形の時は跳ね返る回数は０回なんだろう？」

○**規則２**＊縦と横を交換しても、跳ね返る回数は同じ（対称性）

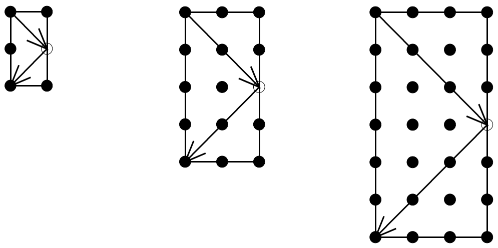
〔３，４〕＝５　〔４，３〕＝５

○縦と横を交換しても回数が同じ事例の特徴を捉えて、あげようとしているか。

「縦横を交換してもいいのかな？」

○**規則３**＊縦：横の比が同じ時は、跳ね返る回数は同じ（相似）

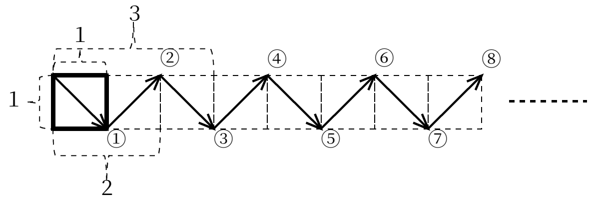
〔２，１〕　〔４，２〕　〔６，３〕



○縦：横の比が同じ事例を実際の図と結びつけて、あげようとしているか。

「大きさが違うのに、跳ね返る回数が同じ場合はありませんでしたか？」

○**規則４**＊縦が１のとき、横が１増えると跳ね返る回数も１増える



○連続性に注目しようとしているか。

「連続して変わるところはありませんか？」

「もっとも規則的に変化するのはどこだろうか？」

○跳ね返る回数が不連続になるところがある

縦１　0→1→2→3→4→5→6→7→8→9　〔連続している〕
縦２　1→$\boxed{0}$→3→$\boxed{1}$→5→$\boxed{2}$→7→$\boxed{3}$→9→$\boxed{4}$　〔２つおきに不連続〕
縦３　2→3→$\boxed{0}$→5→6→$\boxed{1}$→8→9→$\boxed{2}$→11　〔３つおきに不連続〕
縦４　3→$\boxed{1}$→5→$\boxed{0}$→7→$\boxed{3}$→9→$\boxed{1}$→11→$\boxed{5}$　〔２つおきに不連続〕
縦５　4→5→6→7→$\boxed{0}$→9→10→11→12→$\boxed{1}$　〔５つおきに不連続〕
縦６　5→2→1→3→9→0→11→5→3→6　〔不連続〕
縦７　6→7→8→9→10→11→$\boxed{0}$→13→14→15　〔７つおきに不連続〕
縦８　7→$\boxed{3}$→9→$\boxed{1}$→11→$\boxed{5}$→13→$\boxed{0}$→15→$\boxed{7}$　〔２つおきに不連続〕
縦９　8→9→$\boxed{2}$→11→12→$\boxed{3}$→14→15→$\boxed{0}$→17　〔３つおきに不連続〕
縦10　9→4→11→5→1→6→15→7→17→0　〔不連続〕

○連続的に変化するところと、連続性がとぎれるところに注目しようとしているか。

「数字の変わり方で、連続性が途切れるところはありますか？」

「どんなところで連続性がとぎれると思いますか？」

○ **(表3)** 規則的に予想ができるところ省略して、そのほかの事例についての規則性について考える

（横）

（縦）	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		1	2	3	4	5	6	7	8	9
2			3		5		7		9	
3				5	6		8	9		11
4					7		9		11	
5						9	10	11	12	
6							11			
7								13	14	15
8									15	
9										17
10										

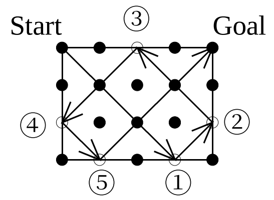
○発見した規則性を利用できるところと、利用できないところを分類しようとしているか。
○単純化して、さらに規則性を見つけようとしているか。
「これまでに規則性が見つかっている場所はどこですか？」

〔1,2〕=1 〔1,3〕=2〔1,4〕=4〔1,5〕=4〔1,6〕=5
〔1,7〕=6〔1,8〕=7〔1,9〕=8〔1,10〕=9〔2,3〕=3
〔2,5〕=5〔2,7〕=7〔2,9〕=9〔3,4〕=5〔3,5〕=6
〔3,7〕=8 〔3,8〕=9 〔3,10〕=11〔4,5〕=7 〔4,7〕=9
〔4,9〕=11〔5,6〕=9 〔5,7〕=10〔5,8〕=11〔5,9〕=12
〔6,7〕=11〔7,8〕=13〔7,9〕=14〔7,10〕=15〔8,9〕=15
〔9,10〕=17

○互いに素である３１個の事例に共通している規則を見つけようとしているか。
「残った組について何か気がつくことはありますか？」
「共通することは何ですか？」

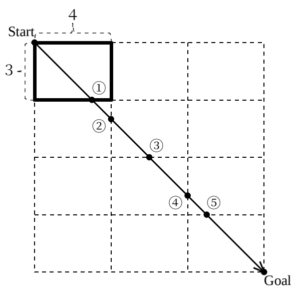
Ⅲ一般化する

○玉の軌跡の記述を工夫する



○発見した規則性の根拠について考えようとしているか。
「規則を発見したけど、どんな場合でも成り立つのかな？」

・正方形の利用 Start から Goal までの玉の軌跡を正方形の対角線とし見て、その対角線が正方形の中の格子とぶつかっている数を調べる。



○複雑に動く玉の軌跡の記述の方法を工夫しようとしているか。
「どうしたら玉の軌跡が捉えやすくなるかな」

・横に延ばして、辺の比を１：□の形式にする

３：12＝１：４

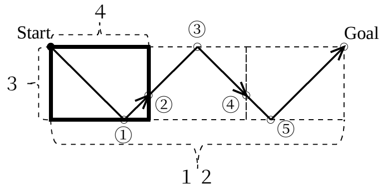
１：４の場合は跳ね返る回数は

４－１＝３

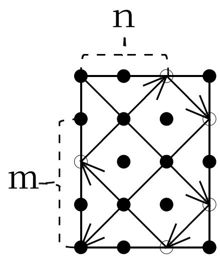
縦の格子とぶつかる点の　数は

３－１＝２

よって



○もっとも連続的に変化した（１：□）のパターンに帰着しようとしているか。

（３－１）＋（４－１）＝５ 〇玉が枠にあたる点の特徴から考える  ｍとｎが互いに素のとき、玉が枠にあたる点は、Start、Goal も含めて、１つおきになっている。点の数は、 （２ｍ＋２ｎ）÷２ ＝ｍ＋ｎ Start、Goal は数に入れないので　ｍ＋ｎ－２ **④整理する** 一般化されたものを簡略化，統合化して整理する **Ⅳ形式化する** 一般化されたものを数式などに置き換えることで形式化する	〇図に表したものから、点の特徴に注目しているか。

4.4 評価の観点と手立て

数学化が特徴的に見られる場面の評価基準を教師はあらかじめ考えておく必要がある。「今、子どもたちが単元全体の中のどういう位置にある活動をしていて、一人一人の子どもがそれぞれどの段階にいるのか、どこで迷っているのか、どのように発展する可能性があるのか」などを解釈しなければならないからである。例えば、個々の事例を書き出す活動は、よくわからない現実の場面の問題を、課題を把握しながらより数学的な問題へと数学化する導入部分として、重要な場面である。子どもたちはこの課題にどういう関わり方をするのだろうか。「４５度の角度で」、「かどに着くまで止まらずに」、「何回跳ね返るか」など課題の意味がわからない子もいるだろう。実際に玉の跳ね返る様子を図に書くことで課題を把握していくことになる。図に書くにしても、「課題を把握する」ために書くことと、「規則性を見つける」ために書くことでは、その方法は違ってくるはずである。前述の３つの評価の観点から次のような発問により、子どもの数学化が促す手立てとなるのではないかと考える。

（図を書く活動）

観点１：図の中で何を数えれば解決につながるのか？

観点２：図に書かなくてもわかる場合はどんな時か？

観点３：どれくらい調べればよいのか？

ここで注意しなくてはならないのは、数学を創っていくのは子ども自身であるということである。このような段階を教師が考えたからといって、「次はこれができるように」というように教師が押しつけてしまっては、子どもの自発的な数学化は望めないのである。あくまでも子どもの活動に教師が寄り添い、支援することで子どもの数学化を促すことが本研究の評価活動である。そのための発問としての条件は、子どもの思考過程に即していて、なおかつその思考の助けをするものでなければならない。

図に書くことで、現実の場面の問題を対象

化していく活動が展開されるが、その活動を反省的に捉えることで、図からさらにデータとして残るような数字を記述する活動に発展することが予想される。その記述の仕方も、ただ書くだけでは規則性は見えてこない。変化の様子が見て取れるように、表にする活動が図を書く活動と同時並行に進むか、あるいはある程度図に書いてから表にする活動が起こるか、いずれにしてもここで質的に違う活動がみられるのである。図に書くという対象への関わり方から、より規則性を発見しやすい方法として表にあらわすという方法への移行は、垂直的な数学化のプロセスと考えられ、さらによりよい表のあらわし方や、表から読みとれる規則性について反省的に水平的な数学化が展開されると考えられる。

Trefers の水平的数学化、垂直的数学化を授業の枠組みとして、数学化のプロセスを評価するという視点で授業の考察を述べてきたが、実際の子どもの活動は双方の数学化が複雑に関係しており、水平的数学化の活動の中にも垂直的数学化の活動が見られたり、行ったり来たり、進んだり戻ったりの複雑な進み方をすると考えられる。ビリヤードの課題における活動も「図→表→規則性の発見」という単一方向に進む活動ばかりではなく、「規則性の予想→図」なども考えられる。帰納的な活動にしても、数学的対象を創り出す最初の場面でしか見られないというものではなく、必要に応じて見られる活動であろう。子どもの活動を中心に据えて、授業の展開を見ようとしたときに、従来型の時系列に沿った指導案では表現しきれないのではないか。「この場面とこの場面ではこういう活動が見られる」というような、より子どもの活動を見取り、働きかけるのに役立つ指導案の必要性を感じる。

5. 研究の成果と今後の課題

これまで述べてきたことは研究の途上であり、さらに反省の余地があると考えている。研究の成果として挙げられることは、「子どもが数学を創る」というプロセスを評価するという観点から授業を見直すことで、より子どもの活動を具体的に捉える試みがなされたということである。そして実証授業の構想として、前章の最後で述べた実際の授業に役立つような評価の観点や手立ての考察を推し進めたことである。授業実践に役立つ指導案として、子どもが数学化のプロセスをたどるときの特徴をより一般的な形として取り出すことができれば、さらに研究テーマに迫れるものと考える。

研究の方向として定まらない部分は、授業における評価を考えたときに、個に返す評価なのか、全体に返す評価なのか、ということである。評価のターゲットとして両者を考えたときに、関連する部分と分けて考えるべき部分があるように思うが考察には至っていない。また、その他、次のようなことを今後の課題とする。

＜今後の課題＞

- 数学化の授業の枠組みについての検討
- 実践可能な課題の精選、授業構成の検討
- 評価規準の設定
- 授業実践による考察
- 局所的な数学化と、大局的な数学化の相互関係

【引用・参考文献】

黒沢俊二（2000）なぜ「算数的活動」なのか：『数学的な考え方』を育てる実践の一般化を目指して．東洋館出版社.

若き認知心理学者の会著(1996)認知心理学者教育評価を語る：北大路書房

東京学芸大学教育評価研究会(1993)評価から始めよう－新しい学力観の創造－

古藤怜編著(1995)小学校算数実践指導全集１２、多様な考え方を生かした指導：日本教育

小林敬一(2001)授業の中の評価：静岡大学教育学部研究報告（人文・社会学篇）第 51 号(pp271-284)

小林敬一(2002)授業に内在化している評価過程の共同構成：静岡大学教育学部研究報告（人文・社会学篇）第 52 号　(pp279-292)

両角達男(2002)評価観の転換－授業の中での評価の必要性－：指導と評価６月号(pp40-43)

植松茂暢・香川稔・深石博夫(1981)数学的な考え方の評価について：日本数学教育学会誌第 63 巻 10 号, pp2-8

植木行宏(1984)数学科における評価－とくに形成的評価－：日本数学教育学会誌第 66 巻 5 号，pp34-39

斉藤昇・大島正秀(1996)観点別学習状況の評価の問題点とその解決策：日本数学教育学会誌第 78 巻 3 号, pp4-13

永田潤一郎ほか４名(1998)新しい観点からの評価問題とその評価のあり方について：日本数学教育学会誌第 80 巻 5 号，pp2-7

黒土正司(1988)生徒ひとりひとりの実態に応じた、指導と評価－「関数」領域を主として－：日本数学教育学会誌第 70 巻 7 号，pp2-15

内田洋一(1989)数学的な考え方の評価－問題解決における数学化の過程について－：日本数学教育学会誌第 71 巻 3 号，pp2-10

伊藤史子(1995)数学授業における生徒の自己評価の様相に関する一考察－情意変化に着目した、中学生の価値判断行為の実態調査から－：日本数学教育学会誌第 77 巻 11 号，pp8-16

二宮裕之(1998)算数・数学教育における Writing に関する研究(2)－数学的 Writing の評価について－：第 31 回数学教育論文発表会論文集，pp235-240

山中優(2000)自ら学び、自ら考える力を育てる学習指導の改善のために－ポートフォリオ評価・導入素材の収集と開発－：日本数学教育学会誌第 82 巻 2 号, pp11-14

鈴木明裕(2001)中学校における Do　Math の学習指導についての研究－評価を中心に－：日本数学教育学会誌第 83 巻 3 号，pp12-19

永井宏(1982a)学習指導の過程における評価と手立ての研究：日本数学教育学会誌第 64 巻 4 号，pp19-22

永井宏・難波光子(1982b)学習指導の過程における評価と手立ての研究：日本数学教育学会誌第 64 巻 8 号, pp37-42

永井宏・渡辺直美(1983)子どものつまずきを生かした学習指導－学習過程の評価と手立てを踏まえて－：日本数学教育学会誌第 65 巻 4 号，pp20-25

加々美健一(1987)数学的な評価のあり方－図化する考えを中心に－：日本数学教育学会誌第 69 巻 8 号, pp18-23

江森英世(1995)数学の学習場面におけるコミュニケーションをどのように評価すればよいのか：第 28 回数学教育論文発表会論文集，pp125-130

永田潤一郎(2002)数学でみる活動を重視した授業の構成（３）－評価の視点の具体化について－：日本数学教育学会　誌第 84 巻 1 号，pp2-12

大谷実(2002)学校数学の一斉授業における数学的活動の社会的構成．風間書房.

礒田正美(1984)数学化の見地からの創造的な学習過程の構成に関する一考察－ H.freudenthal の研究をふまえて－：筑波数学教育研究第３号（pp60-71）

礒田正美(1985)数学化と反省的思考に関する一考察－数学化の見地からの創造的な学習過程の構成（Ⅱ）－筑波数学教育研究第４号（pp86-100）

CRECER12(1995)生涯学習につなげる選択教科としての数学：ニチブン，pp142-147

CRECER14(1995)思考を深めるためのコンピュータの活用：ニチブン，pp133-139

A.Treffers(1987)Three Dimensions-A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction-The Wiskobas Project/D.Reidel.Pub.Com,pp239-252

H.Freudenthal(1968)Why to teach Mathematics so as to be useful/Educational Studies in Mathematics 3-8

H.Freudenthal(1973)Matheamtics as an Educational Task /D.Reidel.Pub.Com

H.Freudenthal(1991)Revisiting Mathematics Education/ Kluwer Academic Publishers