上越数学教育研究，第18号，上越教育大学数学教室，2003年，pp.79-88.

数学の授業における議論の生成に関する研究

ー中学２年「文字式を利用した論証」の授業を例にしてー

尾　﨑　　誠
上越教育大学大学院修士課程２年

１　はじめに

筆者は，教職経験から，数学の授業において議論が展開されたとき，よりよく数学を学んでいる生徒の姿があると感じていた。しかし，意図的に議論を起こそうとしても，それはそう簡単なことではなかったのである。議論とは何か。議論はどのような条件の下で起こるのか。また，どのような議論が生徒の数学の学習を促すのか。これらを解明し，議論を意図的に起こしたいというのが本研究の動機である。

本研究の目的は，数学の学習を促す議論の生成に関わる諸要素を明らかにし，議論を意図的に起こすための教師の役割に関する示唆を得ることである。

２　研究の背景

2.1 議論とは何か

広辞苑によれば，議論とは「互いに自分の説を述べあい，論じあうこと(p.697)。」で，人と人とのコミュニケーションの一種であると考えられる。

では，授業における議論とはどんな状態を指すのか。例えば，教師が発問し生徒が応答するという繰り返しは議論といえるのか。

砂沢・鈴木(1960)は，授業におけるコミュニケーションの構造を，生徒のコミュニケーションへの参加の構造と思考内容の二点からみて，単純完結型，累加型，屈折深化型，集約型の四つに類型化している。そして，生徒の概念形成は，教師の発問と生徒の応答という単純な繰り返しを通して得られるものではないとし，生徒の認識の深化過程を示すコミュニケーションの類型として，屈折深化型を挙げている。屈折とは，教師の発問と生徒の応答の中に他の生徒が発話で係わっている状態である。

このように，授業における議論とは，教師の発問と生徒の応答の中に他の生徒が発話で係わっている状態であり，生徒の認識の深化が図られるコミュニケーションであると考えられる。

2.2 教育的意義

次に，議論をすることの教育的意義を，砂沢・鈴木(1960), Yackel & Cobb(1996), Lampert(1990)，Polya(1954)をもとに考察した。これらの研究から主に，生徒の概念形成がよりよく図られること，生徒の知的自律性が育成されること，生徒に科学的な探究の態度が身に付くこと，という知見を得た。

また，Sierpinska(1998)と岩崎(2001)の数学教育学における相互作用主義の立場についての考察から，いかに議論を起こすか，そして，どのように豊かな議論を実現するかということが，数学指導の本質を形成するとの知見を得た。

３　研究の視点

3.1 議論を生成するための教師の役割

次に，議論に関する先行研究を概観し，議論を生成するための教師の役割について考察した。高橋(1988)から，生徒の推測を論証す

る活動と一般化する活動とを制御すること，佐藤(1994)から，生徒が行う推測や証明の対象や根拠を明らかにすること，広瀬(1996)から,生徒の発話を共有できるようにすること,岩崎(1999)から，生徒にとって不思議さや発見がある問題を用意し，生徒の理解の状態を慎重に見極めることが議論の生成に関わる重要な要素であることが示唆された。さらに,これらの要素を，Balacheff(1990)，Lampert(1990)，岩崎(1998)，Christiansen & Walther(1986)の知見をもとに,「教師の係わり方」と「問題」という二つの視点で整理をした。

◆「教師の係わり方」の視点

・生徒の発話があった場合，それを生徒自身に実演させる。または，教師がそれを実演すること。
・生徒が見出した関係を，言葉や記号で表現させること。
・生徒の発話の真偽を評価せず，その判断を生徒たちに任せること。
・生徒が話題にしようとしていることを最優先すること。

◆「問題」の視点

・生徒が発見できる面白い関係やパターンが認められること。
・問題に発展性があり，生徒が多様にアプローチできること。

3.2 議論の生成を捉えるための視点

3.2.1 主題

McNair(2000)，Pirie & Schwarzenberger(1988)は，議論の構成要素の一つとして,「主題(subject)」を挙げている。これらの研究の指す主題とは，数学的な内容や関係について,何が話されているかということである。

授業における相互作用には，何らかの主題が存在する。そして，その主題が少しずつ変わりながら発展していく。その移り変わりを捉えることによって，そこで何が話されているかを区別できる。本研究では，教師と生徒との相互作用の中で，数学的な内容や関係について，何が話されているかを「主題」と呼び，教師の発問や生徒の発話によって主題が明確になることを「主題が顕在化する」と呼ぶ。

3.2.2 論証と経験的な正当化

McNair(2000)は，議論が論証に向かうことが数学的にみて重要であることと同時に,その難しさを指摘している。

数学を特徴づける重要な要素が論証にあることは疑いない。すなわち，ある性質が成り立つかどうかを考えたとき，誰もが認める性質(仮定)から，論理的に結論を導くことが数学の方法である。しかし，Voigt(1998)が,「数学的な言明の妥当性は，経験的に，もしくは理論的に正当化されうる(p.200)。」と指摘しているように，数学の授業では，生徒はいくつかの場合に成り立つから必ず成り立つというように，経験的な事実や証拠に基づいて正当化する場合がある。

一方，Voigt(1998)は,「たとえ，経験的な理由が十分に思われるように見えても，理由と考えられていることを相互交渉する過程を通して，教師は理論的に理由づけることの意味を発展させるよう生徒たちを鼓舞することができる(p.201)。」と述べている。Lampert(1990)も,「推測に始まり，反証や反駁を通して，仮定の検証へと進むジグザグの道をたどる証明によって，数学は発展する(p.30)。」という Lakatos(1976)の数学的な認識が発展する過程についての見解に基づき，生徒と一緒に推論と数学的な論証に携わることを通して，この過程を生徒が数学をわかる過程として実現しようとした。その結果，生徒は推測を述べ合い，論証や論駁をお互いに交わし合うようになったと報告している。

これらの研究が示唆するように，生徒が数学的な論証の仕方を学ぶ場として議論をすることが重要なのである。本研究では，経験的な事実や証拠に基づいた正当化を「経験的な正当化」と呼ぶ。そして，経験的な正当化も，

生徒が数学的な論証の仕方を学ぶ段階, また, 生徒が帰納的に関係を発見する段階とみて, 数学的に重要な過程の一つであると捉える。

4　実験授業

4.1 概要

3.1で述べた「教師の係わり方」と「問題」の視点の有効性を検討するために，議論を意図的に起こす実験授業を計画・実施した。授業は，平成14年７月に新潟県公立中学校の２年生１クラスを対象に，文字式を利用した論証に関わる内容で計６時間実施した。

対象クラスは，男子14名，女子13名で，数学の授業のために通常の２クラスが３クラスに編制されたうちの一つである。なお，筆者はこの授業で初めて生徒たちと面識をもった。そのため，授業を進めるに当たって，生徒の考えを理解することに努め，生徒の問題意識に従うというスタンスをとった。また，各時の初めには，前時の内容を黒板で再現することから始めた。

第１時では，対称な位置にある数の和の関係を生徒に発見させることが期待でき，なおかつ，その関係を発展させることができる数表の問題を提示した。

数表の問題

１から順に数が並んでいる表があります。41を中心にして対称な位置にある数をさがしましょう。

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24			
				41				

4.2 分析と考察

授業の様子は，３台の VTR で記録した。これらをもとに授業６時間分の詳細なプロトコルを作成した。分析は，まず，各時のプロトコルにおいて,教師と生徒との相互作用を,主題を視点として分けた。第１時から第４時はそれぞれ三つ，第５時は四つ，第６時は二つ，合計18の主題に分けた。そして，主題がどのように顕在化していくのか，また，それに関わる教師の役割を中心に分析した。

4.2.1 主題が顕在化するパターン

分析の結果，主題が顕在化するのには，次の四つのパターンがあることがわかった。

①教師がどうしてそうなるのかと発問し，生徒が応答するパターン。

②教師が活動の対象となる関係を黒板で示し他の場合でもこの関係が成り立つか確かめるよう生徒に指示するパターン。

③教師が生徒に新たに発見したことを発表するよう促し，生徒が発話するパターン。

④生徒が自発的に発話するパターン。

次に，これら四つのパターンの典型的な例として主題1.2，主題3.1，主題3.2，主題3.3の分析を示す。なお，主題1.2は，第１時の２番目の主題を示す。以下，生徒の名前はすべて仮名である。

4.2.1.1 パターン①の例

主題1.2： 対称な数の和は中心の数の２倍に関係しているか。

主題1.1では，教師が41を中心にして，１，９, 22, 11と対称な数は何か，と順に発問し，答えを生徒と数表で確認した。黒板には教師が右のように板書していた。11と対称な数は71であることが確認された所で，町屋が挙手し,「対称な位置にある数を足すと82になる。」と発表した。生徒から賞賛の声が聞かれ，対称な数の和は82になることが定式化された。

1	9	22	11
｜	｜	｜	｜
81	73	60	71

主題1.2では，教師が次のように発問する。

1399	T	どうして82になるのかな。(沈黙 29秒)
1400	宮里	あ，82の。
1401	T	うん。
1402	宮里	中心の41は82の，２分の１っていうのが関係していると思う。

この後，宮里は中心の２倍が対称な数の和になると推測を言い直し，それがどんな大きさのマスでも成り立つと述べる。そして，黒板で，表１の５×５の場合でいくつかの例を示しながら経験的に正当化する。対称な数の

和は中心の２倍になることが定式化される。

【表１】

1	2	3	4	5
10	11	12	13	14
19	20	21	22	23
				41

町屋が４×４のような偶数マスの場合には，中心がないから定式化された性質が成り立たないことに言及する。

この場面では，教師の発問「どうして82になるのかな。」に，宮里が中心41の２倍に関係しているという推測を述べている。主題は，教師の発問に対する宮里の推測によって顕在化している。

4.2.1.2 パターン②の例

主題3.1： 対称な数の和はマスの個数の２倍に関係しているか。

教師が湯谷を指名する。湯谷は表２を用いて，縦と横のマスの個数の積(４×４＝16)が，対称な数の和の$\frac{1}{2}$になっていると説明する。教師が，３×３の場合や６×６の場合に，この関係が成り立つか個別活動で調べるよう指示する。

【表２】

1	2	3	4
10	11	12	13
19	20	21	22
28	29	30	31

大下が表３を板書し，６×６の積36と対称な数の和52が一致しないことを示す。この後，教師は，他の場合にこの関係が成り立つか，再度，個別活動で確かめるよう指示する。

【表３】

1	2	3	4	5	6
10	11	12	13	14	15
19	20	21	22	23	24
28	29	30	31	32	33
37	38	39	40	41	42
46	47	48	49	50	51

この場面では，教師が湯本の推測を活動の対象として取り上げ，他の場合でも成り立つかを，個別活動で調べるよう指示している。主題は，教師の指示で顕在化している。

4.2.1.3 パターン③の例

主題3.2： 奇数マスの場合には，対称な数の和は中心の数の２倍になるか。

主題3.1の個別活動の後，教師は新たな発見を発表するよう促し，綿崎を指名する。綿崎は表４のように奇数マスと偶数マスの場合とを区別して囲む。そして，対称な数の和は中心の２倍になるという性質が，奇数マスの場合すべてに成り立つことを，３×３，５×５，７×７の場合で経験的に正当化する。また，偶数マスの場合にも成り立つ性質があると思うが，それがまだみつかっていないと述べる。

【表４】

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	55	54
55	56	57	58	59	60	61	62	63
64	65	66	67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78	79	80	81

教師が，綿崎の奇数マスの場合の説明を確かめてみるか，それとも，偶数マスの場合に成り立つ関係を調べてみるかと発問する。大下が挙手し，５×５の場合を例にして，奇数マスの場合には，対称な数の和が中心の２倍になることを経験的に正当化する。

この場面では，教師が新たな発見を発表するよう促している。また，綿崎の説明の後，教師は，方向を示しながら生徒の発話による主題の顕在化を促している。

4.2.1.4 パターン④の例

主題3.3： 中心の四つの数の和が，対称な数の和の２倍に関係しているか。

次は，主題3.2での大下と教師とのやりとりに宮里が入ってくる場面である。

3331	大下	奇数だと絶対。
3332	T	７とかの場合でもかい。９とかの場合も。
3333	宮里	偶数でもできる。
3334	T	ん。
3335	宮里	偶数でもできる。
3336	小菅	偶数じゃ無理だろ。
3337	宮里	偶数できるよ。
3338	大下	中心の数ないじゃん。

この後，宮里は表５の８×８の場合を例に，中心にある四つの数の和は，対称な数の和の２倍になることを，経験的に正当化する。生徒から賞賛の声が聞かれる。宮里の発見はもとの性質を発展させた新たな性質として定式化された。

宮里の説明の途中で，小菅が奇数マスの場合でも宮里の性質が成り立つのではないかと述べる。小菅は黒板で，中心の四つの数の取り方を表６のように十字型に変更すれば，奇数マスの場合でも宮里の性質が成り立つこと，また，表７のようなバツ型でも成り立つことを経験的に正当化する。これは，宮里の性質を発展させた新たな性質として定式化された。

【表５】

1	2	3	4	5	6	7	8
10	11	12	13	14	15	16	17
19	20	21	22	23	24		
			31	32			
			40	41	144		
					72		
							71

四つの数の和：144

対称な数の和：72

【表６】

四つの数の和：84

対称な数の和：42

1	2	3	4	5
10	11	12	13	14
19	20		22	23
28	29	30	31	32
37	38	39	40	41

【表７】

1	2	3	4	5
10	11	12	13	14
19	20		22	23
28	29	30	31	32
37	38	39	40	41

この場面では，宮里の「偶数でもできる。」という推測によって主題が顕在化している。宮里の推測は，主題3.2で綿崎が発表した偶数マスの場合にも成り立つ性質があるのではないかという問いについての推測であった。

4.2.2 教師が果たした役割

次に，主題が顕在化する四つのパターンそれぞれについて，主題が顕在化する上で教師が果たした役割を考察した。

パターン①は，教師が発問すれば，すぐに主題が顕在化するというわけではない。教師がどうしてそうなるのかと発問する前に，生徒が関係を発見するのを促していることが，主題が顕在化する上で重要な働きをしていることが明らかとなった。このことによって，Balacheff(1990)のいう責任の移行が起こり，生徒の発話による主題の顕在化を助けていると考えられる。また，このことは同時に，取り上げた問題の重要性を示唆している。このことはパターン②，③についてもいえる。

パターン②は，生徒が発見した関係を教師が取り上げる場合である。教師の指示に対して，生徒は取り上げられた関係を経験的に正当化したり，反例を挙げたりしている。

パターン③は，パターン①，②に比べ，教師のコントロールが少ない。なぜなら，教師はただ方向を示しながら生徒の発話による主題の顕在化を助けているからである。これによって，生徒は帰納的に関係を発見し，それを経験的に正当化したり，一般化したりしている。

パターン④は，教師のコントロールなしに生徒が帰納的に関係を発見し発話する場合である。この場合も生徒は発見した関係を経験的に正当化している。

4.2.3 議論が論証に向かうこと

これらのパターンをみると，主題が顕在化しても，生徒は経験的に正当化する場合が多いことがわかる。このことは McNair(2000)が指摘したように議論が論証に向かうのは難しいことを例証している。しかし，パターン④のうち一つだけ，議論が論証に向かった場合(主題5.4)があった。

主題5.4での生徒の発話と，それ以前の生徒の発話を比較すると，生徒がどのように論証すればよいのか判断している状況と，どのように論証すればよいのかわからない状況との違いがわかってきた。このことを示すために，次に，第２時，第４時，第５時の分析を主題ごとに記述する。

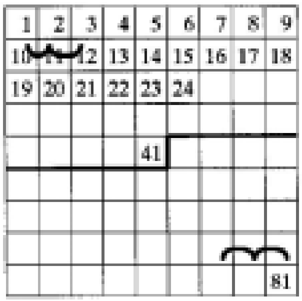
4.2.3.1 生徒がどのように論証すればよいのかわからない状況(第２時と第４時の分析)

主題2.1：　１と81を基準にすれば，対称な数の和は82になるか。

教師は第１時の，対称の数の和は中心の２倍になるという性質を取り上げ，どうしてそうなるのかと発問する。宮里が挙手し，黒板で表８のように41を境に数表を上と下に分ける。そして，１と81を基準にすると，対称な数は，増える数と減る数がいつも一緒だから，

和は82のままで変わらないと説明する。教師は，宮里が例示した上と下が２個ずつずれるという関係を，次のように板書する。

【表８】



この場面では，教師は対称な数の和は中心の２倍になることを論証させようとしているが，宮里は82になることを説明している。

対称な数は
減る数　と　増える数
－２　　　　＋２
－２＋（＋２）＝０
だから変わらない。

主題2.2：　41を基準にすれば，対称な数の和は82になるか。

教師が39－41－43という例を示し，うまく説明できないかと発問する。宮里は，次のように板書して，41を中心にすると，39は２増えていて，43は２減っているから数は変わっていないと説明する。

41－39　　41－43
＝２　　　＝－２

この後，小菅が宮里の説明を，41から対称な数を引くのではなく，対称な数から41を引けばよいと修正する。教師が宮里を指名して小菅の修正をどう思うかと問うと，宮里が同意する。そして，教師が82になることを説明したかと発問すると，小菅がぼそっと「してない。」と答える。

39－41　　43－41
＝－２　　＝２

この場面でも，教師は対称な数の和は中心の２倍になることを論証させようとしているが，宮里は数は変わっていないと説明している。

主題2.3：　１と81を基準にすれば，対称な数の和は82になるか。

教師がどうして82になるのかと発問する。宮里は教師が提示した12－41－70という例で再び１と81を基準にして説明しようとする。そして，右のように板書して，12と70はそれぞれ１と81から11ずつ離れていると説明する。

12－１　　70 －81
= 11　　　= －11

すると，小菅が「82になることの説明ではないんじゃないか。」，「さっきやったのと同じじゃないの。」と反駁する。次は，反駁を受けた宮里が，別の例を挙げて経験的に正当化しようとする場面である。

2513	宮里	何て言えばいいのかな。上が，６増えたとき，下が６減れば，そのとこ同じ数だから。
2514	T	うん。
2515	宮里	その何て言うのかな（首をかしげる）。
2516	T	うん，そうか，そうか。じゃあ宮里くん，もうちょっと考えてみて。
2517	宮里	っていうか，説明の仕方がわからん。

第２時では，教師の発問が，どうして中心の２倍になるのか，うまく説明できないか，どうして82になるのか，という形で行われている。そのため，何をどうやって説明すればよいのかが曖昧なまま授業が進んでいる。また，教師が宮里の説明の評価を行っていないため，宮里は説明の仕方がわからないと述べている。

主題4.1：　十字型の五つの数の和は中心の数の５倍になるか。

教師は，第４時の導入として，表９のカレンダーを提示する。そして，十字型の五つの数の和（８＋14＋15＋16＋22＝75）が，中心15の５倍で求められることを確認する。教師が五つの数の和はどうして中心の５倍になるかわかるかと発問する。大下が「なんとなくわかる。」と答える。次は，教師に指名された大下が答える場面である。

【表９】

日	月	火	水	木	金	土
		1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

4083	大下	宮里くんが，何か，何か，そっちの，点対称の数が何か，あの２個進むと，プラス２になって反対の方がマイナス２になるから，そのプラスマイナスゼロだと零

		だから，何か，そういうなのと似たような関係。
4084	T	そういうのと似たような関係。大下くんごめん。もう一回。
4085	大下	だから，その中心の数から。

この後，大下は次のように説明する。

> 中心15から，16は１増えていて，14は１減っているから，16の１を14にもっていく。22は15から７増えていて，８は15から７減ってるから，22の７を８にもっていけば，15が五つできる。

教師は個々に生徒を指名して大下の説明をどう思うかと問う。生徒はうなずいたり，「わかります。」と答えたりする。教師は十字型が他の所でも同じように説明できるか，個別活動で確かめるよう指示する。教師が机間指導をすると，大下が教師を呼び，次のような論証をみせる。

> x + x+7 + x-7 + x+1 + x-1
> = 5x

この場面では，教師は大下の論証を全体に示さない。

主題4.2： マスの個数や形に関係なく同じように説明できるか。

主題4.1の個別活動の後，教師は生徒の発表を促す。宮里が挙手し，「９マスでも，何マスでもできる。」と述べ，表10のような枠を書き，17×９＝153と板書する。そして，大下と同じように説明する。すると，大下が「普通の３×３の場合でもできますよ。」と述べ，表11を板書し，同じように動かせば，17×９になると説明する。

【表10】

日	月	火	水	木	金	土
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	⑰	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34

【表11】

9	10	11
16	17	18
23	24	25

この後，教師は違う説明はないか，新たな発見はないかと生徒の発表を促す。生徒から枠が５マスの場合について，いくつかの例が挙げられる。教師が挙げられた例を，５マスの場合と９マスの場合に分けようとすると，宮里が「マスの数ぶんだけ，かければいいんでしょ。」と述べる。そして，「マスの数×中心の数」で対称な数の和が求められることが定式化される。

主題4.3： 十字型の五つの数の和は中心の数の５倍になるか。

教師はどうしてそうなるのかと発問し，大下を指名する。大下は「え，あれでいいんすか。」と答え，次のように板書する。そして，中心の数を x として，文字式にあてはめて計算すると5x になると説明する。

> 中心の数を x
> x + x - 1 + x + 1 + x - 7 + x + 7
> = x + x + x + x + x + 1 - 1 + 7 - 7
> = 5x

教師は，主題4.1の机間指導の際に，大下の論証を確認していた。しかし，その時点で大下の論証を取り上げなかったため，大下は「え，あれでいいんすか。」と答えている。

4.2.3.2 生徒がどのように論証すればよいのか判断している状況(第５時の分析)

主題5.1： 対称な五つの数の和は中心の数の５倍になるか。

教師は，主題4.3の大下の論証を黒板に提示し，大下に再度，説明をするよう促す。大下は15と x，14と x-1，16と x+1，８と x-7，22と x+7が対応することを示す。

	8	
14	⑮	16
	22	

この後，教師が他の場合を考えてみようと述べ，石本を指名して例を挙げるよう促す。石本は「点対称だったらどこでも。」と述べ，17を中心にして８，12，22，26という例を挙げる。宮里が「85でなる。」，大下が「12が５少なくて，22が５多くて。」と説明する。教師は「点対称の五つの数をたすと，中心の数の５倍になる。」と板書し，他の場合でも成り立つか個別活動で確かめるよう指示する。

主題5.2： バツ型の四つの数の和は中心の数の４倍になるか。

個別活動に移ると，綿崎が「何か書いてあった。考えみたいなやつ。」と述べる。教師が発表するよう促すと，綿崎は表12のように

十字型を置き，そのまわりの四つの数の和（２＋４＋16＋18＝40）が，中心10の４倍になると述べる。これに対して，大下と宮里が，それは以前に小菅が述べたバツ型の説明と同じではないか，また，中心を入れていないだけで第４時の５マスの場合の例と同じではないかと反駁する。教師が綿崎に他にわかったことはあるかと問うと，綿崎は大下の論証を次のように評価する。

【表12】

2	3	4
9	10	11
16	17	18

> 表とか関係なしに思ったのは，大下くんの言ったこういうふうに，文字に置きかえてやると，数をそこにあてはめるだけで，何か答えが出てくるから，わかりやすくていいなと思った。

この場面では，綿崎の発話によって大下の文字式による論証のよさが評価されている。

主題5.3： マスの中の数の和は，マスの個数や形に関係なく，「マスの個数×中心の数」で求められるか。

教師が生徒の発表を促すと，宮里が「別に３個でもいい。」と述べる。そして，黒板で，11,17,23と５,17,29を例示し，三つの数の和が中心17の３倍になることを経験的に正当化する。すると，綿崎が「もしかしたら，マスの数だけ倍になってるんじゃない。」と述べ，四つのときには中心の４倍，五つのときは中心の５倍になったからと経験的に正当化する。教師がこれまでに学習した性質を振り返るよう促すと，主題4.2の「マスの数×中心＝マスの中の数の和」という性質が再び定式化される。

この後，宮里が「何でもいい，どんな形でもいい。」と述べ，教師に表13のように枠を置くよう求める。そして，中心17の９倍で，153になると述べる。教師は宮里に黒板で別の形を作るように指示する。宮里は表14のように枠をかき，９×17＝153と板書する。すると，大下が６と28を除いて宮里のかいた枠の外側でもできると述べ，23×17＝391と板書する。

【表13】

日	月	火	水	木	金	土
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	

【表14】

日	月	火	水	木	金	土
	1	2	3	4	5	
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	⑰	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
	29	30	31	32	33	

この場面では，宮里と綿崎の推測から，「マスの数×中心＝マスの中の数の和」という性質が定式化され，それが経験的に正当化されている。

主題5.4： 中心の数が偶数だとマスの中の数の和は偶数になるか。

大下が９マスの場合の式(９×17＝153)と，23マスの場合の式(23×17＝391)の積，153と391が奇数であることを指摘し，「中心が奇数だと答えも奇数になる。」と述べる。宮里が「偶数だと答えが偶数。」と述べると，大下が「中心が奇数か偶数かわかれば，答えも奇数か偶数かわかる。」と言い直す。教師が中心が偶数だと答えが偶数になるかと発問すると，生徒が口々に例を挙げて経験的に正当化しようとする。小菅が８,16,24という例を挙げる。３×16＝48で，中心が偶数だと答えが偶数になることが経験的に正当化される。

この後，宮里がぼそっと「2x プラス１かける。」と述べる。教師が聞き返すと，宮里は「何か, 文字式で説明できそうなんだけど。」と答える。この発話をきっかけに，中心が偶数の場合にはマスの中の数の和は偶数になること（奇数×偶数＝偶数）が，右のように論証される。この論証について，綿崎が奇数と偶数を表す文字は同じでよいのかと指摘する。この発話をきっかけに，論証が右のように修正される。そして，大下が「２かける何かの

奇数　偶数
$(2x+1)\times 2x$
$= 4x^2+2x$
$= 2(2x^2+x)$

修正

奇数　偶数
$(2x+1)\times 2y$
$= 4xy+2y$
$= 2(2xy+y)$

形になっているから絶対偶数になる。」と述べる。

この場面では，中心が偶数だと答えが偶数になることが経験的に正当化されている。そして，宮里の発話をきっかけに，生徒が論証を始める。また，この場面では，どのように論証をすればよいのか，最終的にそれでよいのかという判断を生徒が行っている。

4.2.3.3 生徒の論証への係わり方の違い

生徒の論証への係わり方の違いを示す典型的な発話が，次の①，②である。

・<u>どのように論証すればよいのかわからない状況</u>

第２時 主題2.3

①宮里「説明の仕方がわからん。」

第４時 主題4.3

②大下「え，あれでいいんすか。」

↓

・<u>どのように論証すればよいのか判断している状況</u>

第５時 主題5.4

①宮里「何か，文字式の説明ができそうなんだけど。」

②大下「２かける何かの形になっているから絶対偶数になる。」

・①について

主題2.3で，宮里は１と81を基準にして対称な数の和が82になることを説明する。宮里の「説明の仕方がわからん。」という発話は，小菅が82になることの説明になっていないんじゃないかと反駁し，教師が宮里にもう少し考えてみるよう促したときの応答である。

一方，主題5.4では，「マスの数×中心＝マスの中の数の和」について，「奇数×偶数＝偶数」という関係が経験的に正当化された後，宮里は「何か，文字式の説明ができそうなんだけど。」と述べている。主題2.3で「説明の仕方がわからん。」と述べたことと比較すると，文字式を使えば説明ができそうだという論証への係わり方の違いがみられる。

・②について

主題4.1で，大下は，カレンダーの五つの数の和が中心の５倍になることを説明し，その後の個別活動で，教師を呼び，中心をｘとした論証をみせている。教師は大下の論証をすぐに全体に提示しなかった。主題4.3で教師が大下を指名すると，大下は「え，あれでいいんすか。」と答えている。

一方，主題5.4では，「奇数×偶数＝偶数」という関係が文字式で論証された後，大下は「２かける何かの形になっているから絶対偶数になる。」と述べている。主題4.3で，「え，あれでいいんすか。」と述べたことと比較すると，論証が正しいことについての認識の違いがみられる。

4.2.3.4 授業への示唆

①，②のような論証への係わり方の違いをもたらしたものは何か。

それは，生徒に論証をするための文字式という道具があったからだと考えられる。また，主題5.1で，教師が大下の論証を取り上げている。大下は論証とカレンダーとを関連づけて説明している。そして，主題5.2で，綿崎が大下の論証を，文字に置きかえてやると，数をあてはめるだけで答えが出てくるからわかりやすくてよいと評価している。このように，説明するとはどういうことか，どのような説明が認められるのかということについての理解ができたからだと考えられる。

以上の考察から，議論が論証に向かうようにするためには，生徒が論証をするための道具を作っていくことと，説明するとはどういうことかについての理解を作っていくことが必要であることが示唆された。

５　結語

本研究では，議論を生成するための教師の役割をもとに，実験授業を計画・実施し，その分析・考察を行った。その結果，教師と生徒との係わりで，主題が顕在化する四つのパターンを特定できた。そして，教師が生徒の発見を促していることが，主題が顕在化する上で重要な働きをしていることが明らかとな

った。このことは同時に，授業で取り上げた問題の重要性を示唆している。

　また，議論が論証に向かうようにするためには，生徒が論証をするための道具を作っていくことと，説明するとはどういうことかについての理解を作っていくことが必要であることが示唆された。

　今後の課題は，文字式を利用した論証以外の学習内容において，本研究の示唆に基づいた実践を行い，結論を更に検討し，精緻なものにしていくことである。

引用・参考文献

新村　出(編)．(1991)．広辞苑 第四版，岩波書店．

砂沢喜代次，鈴木秀一．(1960)．北海道大学教育学部紀要，*7,* 木村謙二(他編)．北海道大学教育学部．

Yackel，E.，Cobb，P.（1996）．Sociomathematical Norms，Argumentation，and Autonomy in Mathematics，*Journal for Research in Mathematics Education*，*27*(4)，458-477．

Lampert，M.（1990）．When the Problem Is Not the Qestion and the Solution Is Not the Answer: Mathematical Knowing and Teaching，*American Educational Research Journal*，*27*(1)，29-63．

Polya,G.（1954）．Induction and Analogy in Mathematics : Volume 1 of mathematics and plausible reasoning，Princeton University Press．

Sierpinska，A.（1998）．Three Epistemologies，Three Views of Classroom Communication: Constructivism，Sociocultural Approaches，Interactionism，H．Steinbring，M.G.B．Bussi，A．Sierpinska（Eds.）．*Language and Communication in the Mathematics Classroom，* NCTM，pp.30-62．

岩崎　浩．(2001)．数学の授業における相互作用と学習との間の関係に関する考察－一人の生徒からみた授業がもつ社会的側面の意味－．数学教育学研究，*7,* 51-67．全国数学教育学会．

高橋雄一．(1988)．数学的 Discussion とその構造．数学教育研究，*3,* 69-78．上越教育大学数学教室．

佐藤智子．(1994)．推測と証明のジグザグを視点とした算数の授業構成に関する考察．数学教育研究，*9,* 105-114．上越教育大学数学教室．

広瀬直子．(1996)．算数・数学の授業における効果的な議論に関する研究．数学教育研究，*11,* 81-90．上越教育大学数学教室．

岩崎　浩．(1999)．｢余韻の残る授業｣についての一考察．上越数学教育研究，*14,* 21-28．

Balacheff，N.（1990）．Towards a Problèmatique for Research on Mathematics Teaching，*Journal for Research in Mathematics Education*，*21*(4)，258-272．

岩崎　浩．(1998)．｢メタ知識｣を視点とした授業改善へのアプローチ－「指示の文脈」と「記号体系」との間の相互作用－．数学教育学研究，*4,* 83-103．全国数学教育学会．

Christiansen，B.，Walther，G.（1986）．Task and Activity，B．Christiansen *et al*.（Eds.）．*Perspectives on mathematics education*，Reidel Publishing Company，pp.243-307．

McNair，R．E.(2000)．Working in the Mathematical Frame: Maximizing the Potential to Learn from Student's Mathematics Classroom Discussions，*Educational Studies in Mathematics*，*42,* 197-209．

Pirie，S．E．B.，Schwarzenberger，R.L.E.（1988）．Mathematical Discussion and Mathematical Understanding，*Educational Studies in Mathematics*，*19,* 459-470．

Voigt，J.（1998）．The Culture of the Mathematics Classroom: Negotiation the Methematical Meaning of Empirical Phenomena，F．Seeger *et al*.（Eds.）．*The Culture of the Mathematics Classroom，* Cambridge University Press，pp.191-220．

Lakatos，I.（1976）．Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery，J．Worrall，E．Zahar（Eds.），Cambridge University Press．