

子どもの算数・数学的活動を大事にする, 湧き出させる*

高 橋 等
上越教育大学

1. はじめに

皆さんはじめまして。上越教育大学の
高橋等と申します。私の名を聞いて、何
者と思う方もいらっしゃるでしょうから、
多少、私的な事柄の幾つかをお話し致し
ましょう。先ず、住んでいる所ですが、
現在、勤め先の大学から道のりで約 6.5
キロ離れた公務員宿舎に住んでおります。

専攻は数学教育学であり、子どもは勿
論、成人が算数や数学で扱われる内容を
どのように知識構成していくか、言い換
えれば、どのような思考過程にありどの
様に概念を形成しているか、に関心をもち、
研究しております。我々人間がもつ
数学的知識とは一体どんなものか、に対
する関心が、一番の基礎にありますし、
算数・数学授業において、実際に起こっ
ていること、子どもの活動や係わり合い
の様子、さらにはどのような指導が子ども
の知識構成に効果をもたらすか、に関
心をもっております。

さて、本日の演題を、「子どもの算数・
数学的活動を大事にする, 湧き出させる」
とさせていただきます。この演題をご
覧になり、何かしら奇異に思われる先生
方もいらっしゃるでしょう。どうも、普
段、よく見かける演題と比較して、言い

回しが珍しい。「湧き出させるには」、或
いは「湧き出させること」、「湧き出さ
せることの重要性」などの演題がよろしい
でしょう。「湧き出させる」と動詞に付け
た助動詞の未然形で終わらせるとは、演
題としては常識より外れているように見
えるかも知れません。

実は、このような演題の付け方は、海
外でもなされております。例えば、2000
年に幕張メッセで開催された ICME-9
イクメ、正式な名称は、The 9th In-
ternational Congress on Mathematical
Education、日本語名では「第9回数学教
育世界会議」となりましょうけれども、
その会議で催された講演の中にも、この
種の力動的な演題があります。ICME-9
では、国内外の算数・数学教育関係者合
わせて 2074 名が参加し、海外からは
1129 名の参加でした。この会議はオリ
ンピックやサッカーのワールドカップと同
様に四年に一度、開催されますので、こ
の次は 2004 年、デンマークのコペンハ
ーゲンでの開催となります。

ICME-9 における講演の一つに、ヴィ
ットマン博士 (Wittmann, Erich Ch.),
ドイツのドルトムント大学教授で斬新な
考えをもった有名な方で、昨年、学会の
ためにオランダに出かけた際にもお目
にかかり、若干のご挨拶を致しましたが、
博士による講演(Wittmann, 2000)の演

*本稿は平成 14 年 11 月 10 日開催の第 10
回算数・数学研修会、於新潟教育会館、で行
った講演のための原稿である。

題が、「Developing Mathematics Education in a Systemic Process」で、「～ing」と動名詞から始まっているのです。この講演原稿に手を加え、論文化したものの和訳が「算数・数学教育を生命論的過程として発展させる」(湊,2000)という題目で、日本数学教育学会誌に掲載されています。この和訳におきましても「発展させる」と助動詞の未然形を和訳にあてています。

何故にこのような演題や題目の付け方をしているのでしょうか。以前からの習わしや、ものの考え方に照らし合わせても、見方によっては奇異に映るにも拘わらずに、です。物事は無難な方がまし、波風も立たないし、誤解もされない方がよいのです。

しかし、敢えて、挑戦的な言い回しをするからには、大きな理由があるに相違ありません。私が推測するには、いや、推測と言うよりも確信に近いのですけれども、「～ing」という言い回しをするのは算数・数学教育において現在、広まっているものの考え方、価値観、とは異なる価値観を根底に置いているからでしょう。今までとは異なる価値観、言い換えれば新しい価値観となりましょうが、その価値観とはどのようなものでしょうか？尤も、後で述べますとおりに、新しいと言うには多少の語弊があるのかも知れません。

本日の話は、この新しい価値観、少なくとも新しいと見える価値観、に係る見解と、この価値観が何故に着目されているかということ、この価値観による授業や学習がどのようなべきか、そのために我々教師がどのようなことを心掛けたらよいか、についてお話しします。

実は、結論は既に出ておりまして、演題そのもの、「子どもの算数・数学的活動

を大事にする、湧き出させる」が話のまとめとなっております。題目は話の最小の要約ですので、既に結論を述べてしまったことにもなります。この結論に至った理由をお聞き下さい。

2. 学習指導要領における算数・数学的活動

2.1 新学習指導要領における算数・数学的活動

ご存じの通り、算数・数学的活動とは平成10年から平成11年にかけて告示された新学習指導要領において、教科としての算数・数学の目標の鍵となった語です。平成元年からの学習指導要領と比較しますと、平成元年版では算数の目標は、「数量や図形についての基礎的な知識と技能を身に付け、日常の事象について見通しをもち筋道を立てて考える能力を育てるとともに、数理的な処理のよさが分かり、進んで生活に生かそうとする態度を育てる」(文部省, 1989a)であり、平成10年版での目標は「数量や図形についての算数的活動を通して、基礎的な知識と技能を身に付け、日常の事象について見通しをもち筋道を立てて考える能力を育てるとともに、活動の楽しさや数理的な処理のよさに気づき、進んで生活に生かそうとする態度を育てる」(文部省, 1998a)です。これらの算数の目標を比較しますと、平成10年版では、平成元年版に「算数的活動を通して」と「活動の楽しさ」とが付け加わった目標になっております。

中学校数学の目標は、平成元年版では「数量、図形などに関する基礎的な概念や原理・法則の理解を深め、数学的な表現や処理の仕方を習得し、事象を数理的に考察する能力を高めるとともに数学的な見方や考え方のよさを知り、それらを

活用する態度を育てる」(文部省, 1989b)であり、平成 10 年版は「数量、図形などに関する基礎的な概念や原理・法則の理解を深め、数学的な表現や処理の仕方を習得し、事象を数理的に考察する能力を高めるとともに、数学的活動の楽しさ、数学的な見方や考え方のよさを知り、それらを進んで活用する態度を育てる」(文部省, 1998b)です。やはり、平成 10 年版では、平成元年版に「数学的活動の楽しさ」が付け加わった目標になっております。既にお確かめのことと思います。

高校数学の目標は、平成元年版では「数学における基礎的な概念や原理・法則の理解を深め、事象を数学的に考察し処理する能力を高めるとともに数学的な見方や考え方のよさを認識し、それらを積極的に活用する態度を育てる」(文部省, 1989c)、平成 11 年版では「数学における基本的な概念や原理・法則の理解を深め、事象を数学的に考察し処理する能力を高め、数学的活動を通して創造性の基礎を培うとともに、数学的な見方や考え方のよさを認識し、それらを積極的に活用する態度を育てる」(文部省, 1999a)です。高校数学の目標は一層強烈に「数学的活動を通して創造性の基礎を培う」が付け加わっております。

学習指導要領に提示された目標で、算数・数学的活動に、新たに、しかも強く力点が置かれているわけです。学習指導要領でわざわざ述べなくとも、子どもの算数・数学的活動なしでは算数・数学教育を行うことができないだろうと考えられる方は大勢いらっしゃるでしょう。その通りなのです。

何故に算数・数学的活動を大事にすべきなのでしょう。活動を大事にするというのは算数・数学教育者にとって常識ではないのでしょうか？ これまでの実践

で算数・数学的活動を大事にしてこなかったのでしょうか？

ともかく、今回の改訂で力点が置かれている算数・数学的活動を概観しておくことにしましょう。算数、中学校数学、高校数学とも学習指導要領解説で算数・数学的活動の解説がおよそなされています。平成 11 年に刊行された小学校学習指導要領解説算数編(文部省, 1999b)では、算数的活動として、作業的な算数的活動：手や身体などを使って、ものを作るなどの活動；体験的な算数的活動：教室の内外において、各自が実際に行ったり確かめたりする活動；具体物を用いた算数的活動：身の回りにある具体物を用いた活動；調査的な算数的活動：実態や数量などを調査する活動；探究的な算数的活動：概念、性質や解決方法などを見つけたり、つくり出したりする活動；発展的な算数的活動：学習したことを発展的に考える活動；応用的な算数的活動：学習したことを様々な場面に応用する活動；総合的な算数的活動：算数のいろいろな知識、あるいは算数や様々な学習で得た知識などを総合的に用いる活動(文部省, 1999b)の八つがあげられています。活動の特徴によって、手や身体を使った外的な活動と、思考活動などの内的な活動とに分けてもいます。

中学校学習指導要領解説—数学編—(文部省, 1999c)では、数学的活動を、事象を観察して法則を見つけて事柄の性質を明らかにしたり、具体的な操作や実験を試みることを通して数学的内容を帰納したりして、数学を創造し発展させる活動、と述べています。改訂の要点として、やや詳しく、数学的活動とは身の回りに起こる事象や出来事を数理的に考察する活動と述べ、さらに、観察、操作、実験など具体的な活動、ものごとの関係やき

まりを見いだしたり、得られた結果の意味をよく考えたりするなどの活動と述べています。問題解決と関連させて、日常、不思議に思うこと疑問に思うことなどを、既に身に付けた知識をもとによく観察し問題点を整理したり、見通しをもって結果を予想したり、解決するための方法を工夫したり、たどり着いた結果やその過程についても振り返って考えたり、また、事象の中に潜む関係を探り規則性を見いだしたり、これを分かりやすく説明したり一般化したりするなどの活動（文部省，1999c）と記されています。

高等学校学習指導要領解説—数学編—（文部省，1999d）では、数学的活動については、観察、操作、実験・実習などの外的な活動と、直観、類推、帰納、演繹などの内的な活動が考えられる、と述べています。

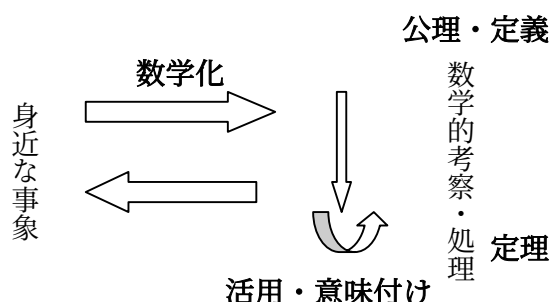


図1 高校における数学的活動

さらに、高校で数学的活動とする思考活動を図(図1)を提示しながら3つあげています。

- ・身近な事象を取り上げそれを数学化し、数学的な課題を設定する活動。
- ・設定した数学的な課題を既習事項や公理・定義等を基にして数学的に考察・処理し、その過程で見いだしたいろいろな数学的性質を論理的に系統化し、数学の新しい理論・定理等（以下「数学的知識」という）を構成する活動。
- ・数学的知識を構成するに至るまでの思

考過程を振り返ったり、構成した数学的知識の意味を考察の対象となった当初の身近な事象に戻って考えたり、他の具体的な事象の考察などに数学的知識を活用したりする活動。

高等学校学習指導要領解説—数学編—（文部省，1999d）では、生徒の数学的活動を促すための、次のような三つの力点をあげています。

- ・身近な事象との関連を一層図り、数学化の過程を重視する。
- ・主体的に様々な問題解決の方法を味わったり、問題解決の後も自らの思考過程を振り返ったり、その意味を考え、より発展的に考えたり、一般化したりして問題の本質を探ろうとするなど、数学的考察・処理の質を高める。
- ・見いだした数学的知識の意味を身近な事象に戻って味わったり、見いだした数学的知識をいろいろな場面に活用したりする。

日常性からの数学化と数学的活動をする生徒の主体性を特に大事にしています。

2.2 算数・数学的活動と数学的モデル化

これまで述べた、算数、中学校数学、及び高校数学における算数・数学的活動を数学的モデル化のサイクルに当てはめてみましょう。身近な事象との関連、日常との関連を図ると言うからには、算数・数学的活動は数学的モデル化と深く関連するのです。高等学校学習指導要領解説—数学編—（文部省，1999d）に記載された数学的活動の図は、数学的モデル化を背景とするといいでしょう。数学的モデル化の循環を表す図は幾人かの研究者によって示されていますけれども、ここではガルブレスとヘインズ（Galbraith & Haines, 1997）が提示したものに多少手を加えて用います(図2)。

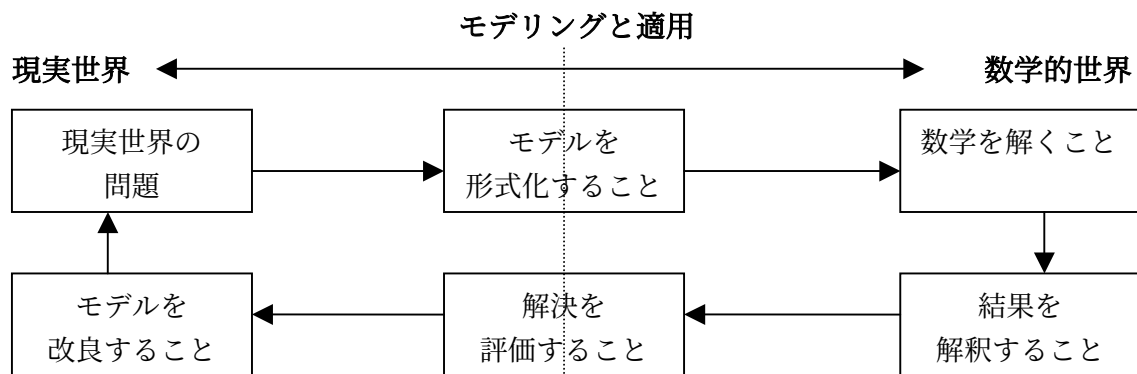


図2 数学的モデル化の循環

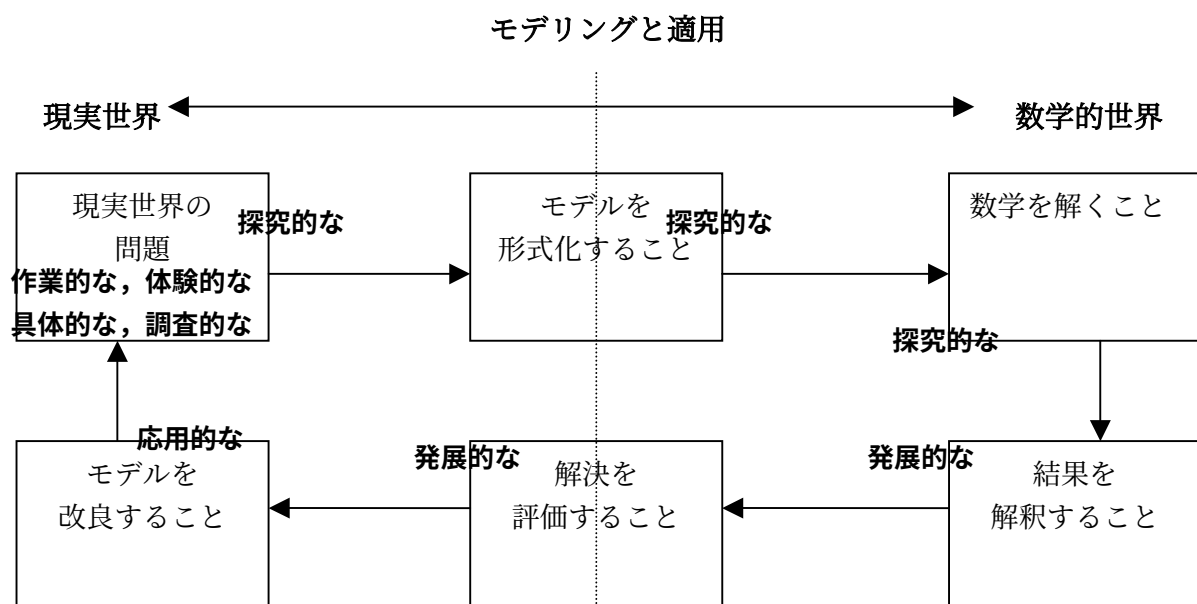


図3 算数的活動と数学的モデル化

このモデル化で、数学を解くこととは、探究すること、概念化すること、手順を用いること、手操作をすること、グラフ化すること、チェックすること、計算すること（コンピュータなどで）、手計算すること、です。

算数・数学的活動の主なものをこの数学的モデル化の過程に重ねてみましょう。

算数的活動は、子どもの発達から考えますとどうしても現実世界の問題における活動が中心になります(図3)。形式化

或いは数学を解くことといっても、学校の社会、もっと厳しく言えば学術的な社会で約束された数学的言語・記号を用いての形式化というのではなく、子どもなりの形式化や数学を解くこと、になるでしょう。子どもなりの形式化と数学を解くことを発展させたもの、教室の中での同意に行き着いたものとして、例えば、算数での計算の手続きを工夫したり、中学校の正の数・負の数の計算で線分図を利用する場合があるでしょう。

中学校数学における数学的活動を数学的モデル化の過程に重ねてみますと、次のようになります(図4)。

中学校数学、次いで高校数学の数学的

活動となれば、念頭による操作、思考への重みが強くなってまいります。高校の数学的活動の場合は次です(図5)。

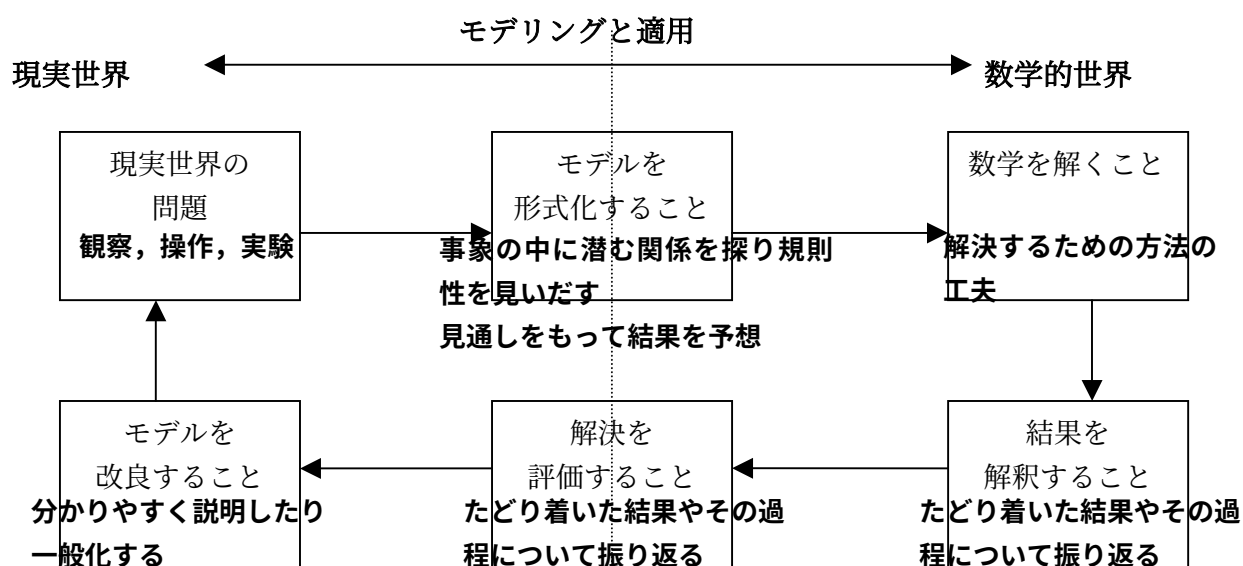


図4 中学校の数学的活動と数学的モデル化

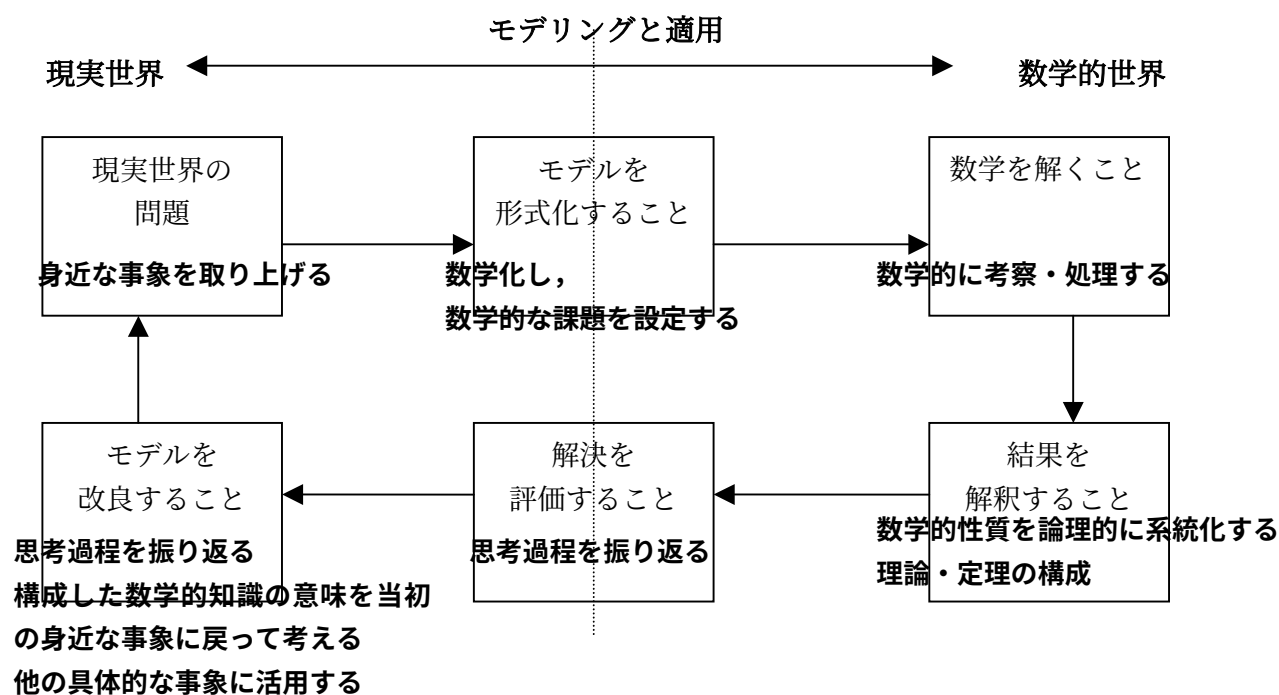


図5 高校の数学的活動と数学的モデル化

この数学的モデル化の過程は、図示のされ方こそ違いますが、高等学校学習指導要領解説—数学編—(文部省, 1999d)で図示された数学的活動(図1)と殆ど同じ過程を示します。

3. 緑表紙教科書期における算数・数学的活動

学習指導要領と指導要領解説とにおける算数・数学的活動を概観してまいりましたが、我が国の算数・数学教育において、算数・数学的活動に特に力点を置いた時期がありました。算数、当時の呼び名では算術ですけど、尋常小学算術、いわゆる緑表紙教科書が使用された時代です。それ以前、明治六年に出版の小学算術書もペスタロッツ流の直観主義に基づくため、子どもの活動を引き出すものだったでしょう。緑表紙教科書は、数学教育改良運動の影響下で編纂されています。昭和10年(1935年)に第一学年の上下、その後毎年上下巻が刊行され、昭和15年まで使用されました。残念ながら、この教科書の使用は六年間のみです。昭和16年に国民学校令が発令され、一、二年ではカズノホン、三～六年では初等科算数、いわゆる青表紙教科書が刊行されます。青表紙教科書は緑表紙教科書を踏襲しておりますけれども、戦時下の影響が文章題などにも見られます。

数学教育改良運動は、1901年(明治34年)に英国の王立理科大学の教授で力学と数学とを専門としたジョン・ペリー(Perry, J.)による英国学術協会年会における講演、「The teaching of mathematics」を契機とした数学教育改良運動の思想的影響を受けたものでした。世界中にこの運動が広まり、米国では、ムーア(Moore, E. H.), ドイツではクライン(Kline, F.), フランスではボレル(Borel,

E.) が呼応しました。一言で言えば、ペリーは、有用性を狙いとして子どもの経験や、子どもが発見する活動を重んじる算数・数学教育への改革を主張したのです。関数、微分・積分、立体幾何などが新たに教材となりましたし、教材を統合的に扱うことが提唱されました。それまでの算数・数学教育では、代数や幾何など明確に分けておりました。

緑表紙教科書の編纂は、当時の文部省図書監修官であった塩野直道が中心となり、進められました。数理思想と日常生活の数理的訓練とが緑表紙教科書編纂における柱となっております。塩野直道は、数理思想を、「数理を愛し、数理を追究把握して喜びを感じる心を基調とし、事象の中に数理を見出し、事象を数理的に考察し、数理的な行動をしようとする精神的態度」(塩野, 1970)と述べています。

塩野直道はさらに、日常生活の数理的訓練を「算術を生活に役立てることの必要から、現実即した観察、実験、実測等によって数量、空間に関する知識を与え、これを処理する方法、即ち計算の技術とか、量の測定方法とかを指導し、これを数理的に整理し、妥当な解釈をし、判断をし、進んで調査研究することを指導し、場合に応じて対処する途を見出し、実際の行動をとる訓練をする意味である」(高森, 1987)と述べています。自然現象、社会現象、精神的現象を対象とすること、現実即した観察、実験、実測などに力点を置くことなどは、これまで述べてきた算数・数学的活動の幾つかの性格と一致します。

緑表紙教科書編纂における根本的な理念は、算術的活動、即ち算数・数学的活動を通して概念、原理に至ることです。当時、実際に提唱された実践には、先ずもって子どもの直観から始める直観算術、

実験や実測によって探究する実験算術，子どもによる問題作りを推し進める作問算術，さらに，生活経験に根ざした生活算術があります。これらの算術は先ほど述べました算数的活動の幾つかと一致します。作問算術は，今回の算数的活動には入っておりませんが，小学校の先生方は文章題の指導などで，時折，取り入れているものでしょう。

今回，改訂された学習指導要領で鍵となる算数・数学的活動とは，数学教育改良運動の影響下にあった昭和 10 年から 15 年にかけて目指していた算数・数学教育の復古的な性格を見て取ることができるのです。数学教育改良運動がデューイ (Dewey, J.) の経験主義的教育論，児童中心，児童の生活を中心とした教育理論であり実践，の台頭に後押しされ，このデューイの理論が後に，米国では 1930 年代から，我が国では 1950 年代後半からの生活単元学習の基盤となったことを考えれば，今日の総合学習までの流れが我々の過去の経験を踏襲していると言えるでしょう。過去の復古的な性格があるからといって，同様の結末であっていいというのではない。同様の精神をもつからこそ，今回は成功をなすのでなければならぬのです。

4. 現代化における算数・数学的活動

4.1 数学教育改良運動と数学教育の現代化における算数・数学的活動

数学教育改良運動と同じく，算数・数学教育の改革を目指した大きな動きに，ご存知のように数学教育の現代化がありました。この現代化においても，子どもの算数・数学的活動を促すことが目指されております。ただし，現代化における算数・数学的活動は，改良運動の場合とは異なります。数学教育改良運動の場合

と比較してみます。

数学教育改良運動の場合は，これまで見ましたように，いわゆる日常性が算数・数学的活動の出発点でした。例えば数学的な世界で数学的言語・記号を運用するのだとしても，その活動は現実世界に根ざすものであり，現実世界に適用し得るものであることを目指しました。しかし，数学教育の現代化の場合は，必ずしも日常性と関連させた算数・数学的活動を目指した訳ではありません。日常性に関連させないとしても，全くに人間離れた算数・数学的活動というのでもありません。心理学や教育学の飛躍的な発展によって支えられた算数・数学的活動でした。勿論，心理学や教育学のみならず，数学教育の現代化では，数学の発展や科学・技術の発展に支えられましたし，急激な科学・技術の発展に伴い産業構造が変化した経済社会からの切実な要求があったわけです。1957 年にロケット打ち上げで当時のソ連邦に先を越された米国の事情，スプートニク・ショックと言われます，もありました。

心理学や教育学の発展では，現代化のこの方面での主導者であるブルーナー (Bruner, J.) による働きが大きいです。ブルーナーは，ピアジェ (Piaget, J.) の認識論，発達理論を心理学的手法によって，確かめる研究も行い，その研究成果として E I S 原理を理論化しました。E I S 原理とは，我々の認知発達，活動的表象 enactive representation，次いで映像的表象 iconic representation，最後に記号的表象 symbolic representation の順に進む (Bruner, 1966) というものです。大人は記号的表象によってものを考えます。活動を通して考えることや，絵を使って考えることは，子どもが得意ですね。大人が記号的表象によって認知

する場合であっても、難しい問題を解くときなどは、絵図を用います。ピアジェの発達理論のように、後戻りできないような明確な段階に分かれているのではなく、三つの表象は、各々、発達の力点です。ただ、ブルーナーが発達について段階 stage という語を用いることは、あります(Bruner, 1963)。ブルーナーは彼の有名な仮説、「どの教科でも、知的性格をそのままにたもって、発達のどの段階のどの子どもにも効果的に教えることができる」という仮説からはじめることにしよう」(Bruner, 鈴木&佐藤訳, 1963), によって知識の構造を保ったまま子どもにも教えることができたのです。

ブルーナーの共同研究者にディーンズ(Dienes, Z. P.)がおります。ディーンズ・ブロックの発明者としても、有名でしょう。ディーンズは、ブルーナーと共同で、寧ろ主導的に、算数・数学学習のための教材を開発し、主に小学生の算数的活動を研究しております。ディーンズは、彼の学習理論において、遊びから始まり、算数・数学的活動を通して、一般化と抽象化とを行い、数学化する過程を示しています(Dienes, 吉田&赤監修, 1977)。次の①から⑥の数学的学習の六段階は、ディーンズが示した学習の過程です。

① 自由遊び

子どもが積み木など多くの物理的素材と最初に出くわす時期。

② ゲーム

子どもが環境の中に規則性、ルールがあることを気付く時期。

③ 共通性の探究

経験した幾つかのゲームから、共通の構造を見出す時期。

④ 表象・表現

子どもが抽象した構造の共通性を自分で知り得るような表し方をする時期。

⑤ 記号化

子どもが自分なりの表し方で記述しようとし、最終的に共有している記号体系に導かれる時期。

⑥ 形式化

記述したことに順序性をもたせる時期。基本的性質から出発し、他の性質に到達するための規則を見付ける。

(Dienes, 吉田&赤監修, 1977, pp.63-68)

4.2 数学的構造と活動例

教材例を取り上げましょう。青四角 □, 赤四角 ■, 青丸 ○, 赤丸 ●の四つのカードを用意し、これらのカードに次のルールを与えます。青四角□には何も変えない, 赤四角■には色のみを変える, 青丸○には形のみを変える, 赤丸●には色と形の両方を変える, というルールです。

左／右	青四角 □	赤四角 ■	青丸 ○	赤丸 ●
青四角 □	青四角 □	赤四角 ■	青丸 ○	赤丸 ●
赤四角 ■	赤四角 ■	青四角 □	赤丸 ●	青丸 ○
青丸 ○	青丸 ○	赤丸 ●	青四角 □	赤四角 ■
赤丸 ●	赤丸 ●	青丸 ○	赤四角 ■	青四角 □

(Dienes, 吉田&赤監修, 1977, pp.171-174)

図6 カードによる群の演算結果

これら四枚のカードを使って演算を行うのです。子どもが計算を行うときは、被演算数に対して演算数を作作用させますので、今回も二枚のカードを並べて右側のカードを左側のカードに作用させるようにしましょう。赤四角を左、青四角を右とすれば、 $\blacksquare\square$ 、演算の結果は、赤四角 $\blacksquare$ となります。この演算を四枚のカードを使って行い得る限り行うのです。少々考えてみてください。

演算を行ってみましょう。表を作るとどうなりますか。

結果はこのようになります(図 6)。お気づきと思いますけれども、これら四枚のカードを用いた演算は、位数が四の群をなしております。青四角が単位元となっておりますし、青四角が演算の結果となるような逆元も存在します。結合法則が成り立つのは明らかでしょう。この演算は、四枚のカードを用いなくとも、アルファベットにルールを与えても、行うことができます。回転による変換でも群を考えることができるでしょう。四枚のカードを使った操作では、表し方、表象が活動というだけで、数学的言語・記号を用いる場合と同じ構造を構成したのです。こちらは数学的言語・記号を用いて記述した群の定義です。[OHP 略]

数学教育の現代化においては、小学生程の子ども達にも活動的表象を通して数学的構造、今の場合は代数的構造ですが、を構成させることを目指したのです。実は、この教材と同じものを講義で扱い、学生や院生の方に解決してもらったところ、かなり不評でした。日常的でない、実感が湧かない、という感想が届きました。恐らく、ここにおられる先生方も同様の感想をおもちではないでしょうか。子どもの認知発達に適したとされる活動的表象ですので、大人である大学生や院

生の方の認知には不適であるとも考えることができますけれど、そうではありません。例え、活動的表象で表し、算数・数学的活動を通したとしても、代数的構造を殆どそのままに心的に構成することには無理があるのです。数学教育の現代化において求められた活動の限界と、限界の原因、新たな方向の幾つかについては、以前から進めていた研究結果を踏襲しながら、能田伸彦先生の筑波大学退官記念論文集(高橋、印刷中)で発表しました。その論文集でも一部は述べましたけれども、日常的でない、実感が湧かない、という感想は全くその通りなのです。

ディーンズ式、ブルーナー式の算数・数学的活動では、表象を変えてはいても数学的構造をそのままに保っており、その構造が我々人間のもっている本質的な認知の性格とは整合的でない場合があるのです。例えば、我々が両腕を左右に伸ばした場合の釣り合い、方向性、カタカナでバランスと言う向きもあるでしょうが、が認知の基本となる場合もあるのです。1996 年より、隠喩、メタファーにおける釣り合いと方向性、暗黙知を理論的視点として、子どもの活動を解釈し、発表してきております(高橋、1996)。

5. 数学的構造と文脈

数学教育の現代化の当時のブルーナーやディーンズは結局、始めに知識の構造ありき、数学の構造ありき、という立場からは、抜け出しておりませんでした。勿論、人間の認知過程も研究していたのですから、学習に適した面があります。二次方程式の説明にタイルを使ったりするのは数学教育の現代化の成果です。現代化の当時の教材に適した子どももいるでしょう。彼らの理論や実践を全くに否定することはできません。成果は成果と

してあります。

さて、構造に力点を置いた立場から前進した理論や実践が幾つかあります。現実世界における人間の活動に着目した場合もその一つでしょう。現実世界の、特に、日常性のある文脈や場への着目です。ブルナーも晩年には文脈や場に着目しています(Bruner, 1999)。この文脈や場は、子どもの学習に無視できないほどの影響を及ぼすのです。

ブルナーの理論から出発し、日常性の子どもの理解への影響を明らかにした研究の一つに、実は、恥ずかしながら、私の修士論文(高橋, 1989)とそれを発展させた研究(Takahashi, Minato & Honma, 1993)があります。今、進行させている研究の基となったものです。その研究では、文章題の場面を具体的な場面と抽象的な場面とに分け、さらに、文章題で用いる数を具体物の絵、ドットなどの絵、数字で表して、小学校二、三、四年生を対象として、理解の有様を統計的手法によって調べました。調査問題の作成から、念入りに統計にかけ、極めて客観的に行った研究です。例えば、このような問題を作成したわけです。[OHP 略] 現在は質的研究を行っていますので、多少、懐かしい気がします。

この研究で最も平均点が高かったのは具体的場面の絵の問題、二番目が抽象的場面の絵の問題、その次が具体的場面の数字の問題、最も平均点が低かったのが抽象的場面の数字の問題です。

ブルナーの EIS 原理で言われるように、子どもには映像的表象の方が記号的表象よりも理解に優位です。この点では当然の結果でしょう。驚くべきことは、少なくとも当時は驚いたのは、具体的場面と抽象的場面との間の思いがけない差でした。映像と記号との間の差ほどでは

ないものの具体物で表した方が抽象的な場合よりも子どもにとって有利なのです。算数学習において日常性は、小学校低学年にとっては、極めて大きな影響、よい影響を及ぼすのです。統計的に識別できないまでも、先ほどの代数的構造を扱った際の学生や院生の方の実感から見ても、日常性は我々の算数・数学的活動に影響を及ぼすのです。

6. RME 理論

6.1 算数・数学的活動と RME 理論

構造のみならず、文脈が、この場合は日常的な文脈ですが、算数・数学的活動に影響を及ぼすことは、客観化されていないまでも経験的に知られていました。寧ろ、そう信じられていたと言っているでしょう。数学教育改良運動において日常性に基づく算数・数学的活動を目指したのは、子どもを取り巻く日常性こそが、活動の原点であると当時の算数・数学教育者が考えたからです。

日常性の文脈からカリキュラムや教材を始め一派があります。オランダのフロイデンタール (Hans Freudenthal (1905-1990)) の流れを継承するチームです。フロイデンタールは数学者としてトポロジー、幾何学あるいはリー群に係る研究において業績を残した後、数学教育者として現実的数学教育 Realistic Mathematics Education (略称 RME) を開発、創始しました。フロイデンタール教授から今日に至る遺産として 1971 年に創設されたフロイデンタール研究所 Freudenthal Institute があり、その研究所のチームが世界的に目覚ましい働きをしております。2001 年、昨年ですが、にユトレヒト大で行われた第 25 回国際数学教育のための心理学会 25th Conference of the International Group for the

Psychology of Mathematics Educationで研究発表をし、その学会に合わせて開かれた夏期講習会 PME25 Summer Institute (略称 PSI) に参加してまいりました。

RME 理論はフロイデンタールによる、人間の活動としての数学、という思想を根底に置いております。子どもが現実世界における算数・数学的活動を通し、算数や数学を経験し、知識を構成することを、フロイデンタール派の数学教育者は目指しているのです。彼らの理念の鍵は、活動と現実場面、数学化の三つです。フロイデンタール派のグラフマイヤー達は、現実場面の問題は日常生活を伴うものとし、さらに、今正に取り掛かっている数学それ自体もまた現実的と述べています (Gravemeijer, K., Cobb, P., Bowers, J. & Whitenack, J., 2000)。

フロイデンタール派による現実主義的数学教育の理念が、数学教育改良運動のものと重なることにお気づきでしょうか。実は、フロイデンタール派は、数学教育の現代化に大きくは巻き込まれることなく独自の立場を貫いていたのです。寧ろ、数学教育改良運動の影響を引き継いできたと言ってよいでしょう。

今回の改訂された学習指導要領で算数・数学の目標の鍵が算数・数学的活動であり、算数・数学的活動が数学教育改良運動の復古的な性格を少なからず有しているのであれば、フロイデンタール派の仕事は、我々に何らかの参考資料をもたらすでしょう。

6.2 RME 理論の理念

RME 理論を始め、フロイデンタール研究所から発信される情報には、以前から着目し、紹介もしてきました(高橋, 1996)。皆さんにお配りした資料もその一

つです。フロイデンタール派の理念、開発されたカリキュラム、教材について、幾つかを見てみましょう。

RME 理論が、現実場面における人間の活動として数学を捉えていることは先に述べました。この数学観に教師が立つからこそ、子どもは算数・数学的活動を通して算数や数学を経験することができます。RME 理論で言う算数・数学的活動は、現実世界における問題探しや問題解決などを含みます。現実世界は子どもにとって親しみのある場面であり、多くの場合、日常的な現実性をもちます。

さらに、RME 理論では、子どもの算数・数学的活動は、子どもが自ら数学を生成し構成するのでなければなりません。我が国風に言えば、主体的に、です。この生成や構成は現実世界を数学化することでもあります。数学化は、一般化：一般化すること（類比を探ること、分類すること、構造化すること）；確実性：反省すること、正当化すること、証明すること（組織的な取り組みを用いること、精緻化し試みることによる推測、など）；正確性：モデル化すること、記号化すること、定義すること（解釈と妥当性に制限を加えること）；簡潔性：記号化すること及び図式化すること（標準の手続きと表記法を発達させること）、を特徴とします (Gravemeijer, K., Cobb, P., Bowers, J. & Whitenack, J., 2000)。この一般化の過程で創造的発明がなされるということです。

学習指導要領を取り上げた際に、数学的モデル化を考察しましたね。RME 理論で言う数学化も、数学的モデル化と共通点がありませんか？ もっとも、RME 理論ではモデルという語をもっと特別に用い、このような図で説明したりもしています。[OHP 略] ここではこれで留めます。

6.3 RME 理論と MiC プロジェクトのカリキュラム

RME 理論を抱えるフロイデンタール研究所と米国ウェスコンシン大とが共同で文脈の中の数学 The Mathematics in Context というプロジェクト、俗に MiC プロジェクトと言いますが、を行い、カリキュラムと教材を開発しました(MiC, 1998a)。RME 理論では、代数や幾何、統計、関数などを統合してカリキュラムを編むことを目論んでいますし、MiC でもそうです。カリキュラム編纂の視点も、数学教育改良運動のものと似ていますね。お手元の資料(高橋, 1996)では RME 理論と共に MiC プロジェクトを論じてお

ります。

MiC プロジェクトで開発したカリキュラムを紹介します。[OHP 略] 網の目のようなカリキュラムでしょう(MiC, 1998a)。子どもの活動を中心とし、領域を統合しながら、学習が進んでいくのです。

MiC プロジェクトで開発した教科書に掲載されている教材です(MiC, 1998b; MiC, 1998c)。[OHP 略]

他に、フロイデンタール研究所のホームページ <http://www.fi.uu.nl/en/welcome.html> に掲載されているコンピュータを利用した一次関数の教材例も紹介しましょう(図7)。

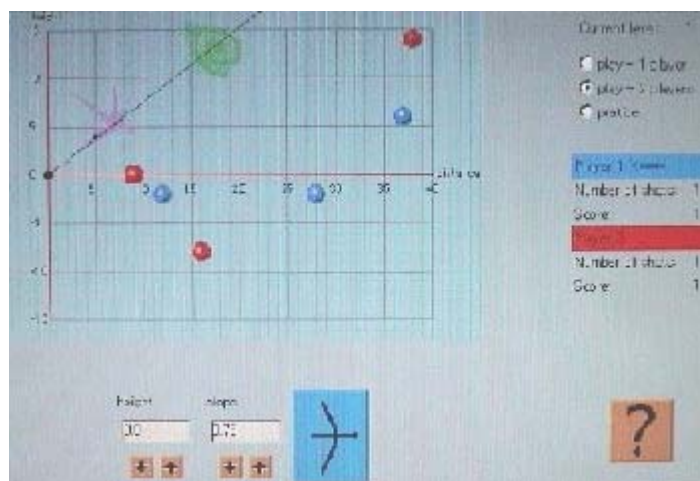


図7 フロイデンタール研究所が開発した一次関数の教材

この教材はグラフ上に置かれた球を弓矢で射るというゲームです。弓を射る方法には四つの水準があって、水準1では地面に相当する x 軸からの弓を射る角度が分かるように、原点から $x=5$ の軸までに予め線分が引いております。その線分の延長線上にある球をめがけて矢を射ます。図7の下の方の真ん中にある弓の絵のついたボタンを押して矢を射ることになります。矢は線分の延長を軌跡として進み、球に当たるとファンシーな絵柄

が弾ける様に出現します。ボタンの左にある二つの箱、左の箱に $x=5$ の時の高さ(y の値)を、右の箱に傾きを表示します。これらの箱の下にある矢印の付いたボタンにより箱の中の数値を上下させ、矢を射る角度を調整することもできます。

水準2では、原点から $x=5$ の軸までに予め引いていた線分の高さ(y 切片の値)と傾きとを左下の箱の数値を動かすことによってのみ調整できます。

水準3では、原点から $x=5$ の軸まで

の線分は表示されず、原点に大きめの点を打っております。矢を射る方向は水準2と同じく箱の中の数値を調整して決めます。

水準4では、原点に置いた点もなく、箱の中の数値を頼りに矢を射る方向を調整することになります。水準2, 3, 4では、試行錯誤的な接近もできなくはないでしょうけれども、球が位置する座標を手掛かりに、矢を射る方向を考える活動が必要になります。

この一次関数の教材におけるゲームには三種類があります。練習、一人用のゲームおよび二人によるゲームです。練習では各水準において、とにかく球に向かって矢を射ます。一人用のゲームでは矢を射た回数に対しての球に当たった回数が得点として表示されます。二人用のゲームでは各自が赤球か青球かを持ち球とし、交互に矢を射ることになります。

RME 理論では伝統的な講義伝達型授業からの転換を図っています。彼らの求める授業は、子どもにとって日常的で現実的な場面において、子ども同士と教師とが相互作用し、共同で数学化を押し進めるというものです(MiC, 1998a)。個人による知識の構成を伴いつつ学級全体で知識を構成する、我が国の理想的な授業実践に近い方向を彼らはもっています。

夏期講習会 PSI に参加した際、演習の時間でこのゲームを行いました。コンピュータの台数と参加者数との関係から、私はギリシャから来られたミツオリス博士と組になりました。

二人で話し合いながら一次関数のコンピュータソフトの仕組みを確かめ、二人用のゲームをしました。ゲームは楽しく進み、後攻の青球、ミツオリス博士の勝ちになりました。私が「ああ、あなたの勝ちだよ」、と何気なく言ったところ、ミ

ツオリス博士は、「このゲームで勝敗に価値があるのか、我々は協力してコンピュータソフトの使い方を確認し、ゲームを楽しんだ、それで一次関数の新しい教材を経験することができたんだ、我々は協力者なんだ」、と言いました。その瞬間、私の方は、ああそんな気持ちで言ったんじゃないのに、と思った一方で、もしかしたら競い合いに対する妙な意識が身に付いているのではないか、という思いに至ったわけです。競い合いに対する誤った解釈と実践とが我が国には蔓延しているように思いませんか？今後、教育実践で標識となるであろう共生なる語の真意をミツオリス博士の言葉に垣間見た気がしました。教室での相互作用、我が国風に言えば練り合い、練り上げは、RME 理論に基づく実践においても、大いに目指されています。練り合い、練り上げがなければならない、と言っていいのです。

さて、余談ですが、二人での共同学習で意気投合した後、街の食堂でミツオリス博士夫婦と夕食を共にしました。その際に博士は彼の名の由来を説明し、彼の人生がその名に少なからず影響を受けていると述べておりました。博士の名前を英語で綴るとこうです。Dr. Christos Mitsoullis, ギリシャ語でホライトスという発音ですけれど英語綴りを見れば一目瞭然の通り、彼の名はキリストです。奥さんの名はマリアと聞きました。私は宗教にはさほどの関心はもっていませんけれども、ミツオリス博士夫婦との会話をしみつつ、お二人の不思議な縁に妙に気を巡らしていました。

7. 算数・数学的活動を促す、湧き出させる

残り時間も少なくなってきました。これまでの話の骨子を述べますと、学習

指導要領の改訂に伴って算数・数学的活動を大事にすることが求められている、算数・数学的活動は数学的モデル化という活動を含む、今回の算数・数学的活動と緑表紙教科書の編纂の際の理念を基に目指した実践とに共通するものがある、数学教育の現代化においても算数・数学的活動に力点が置かれたものの数学的構造が活動に先立っていた、オランダのフロイデンタール派による RME 理論も算数・数学的活動に力点を置き数学化を目指している、しかも数学教育改良運動を踏襲している、ということでした。

これで、今日、我々算数・数学教師に望まれている、子どもの算数・数学的活動を促すべきことの歴史的で理論的な背景、さらに海外での取り組みをご紹介できたわけです。

最後に、では実際に我々はどのように子どもの算数・数学的活動を促し、授業で湧き出させればよいのか、について考えを述べます。考えを述べますと言ったところで、絶対的な考えではないことをご承知おき下さい。凡そこの世に絶対、必ず、などということはありませんし、こうすればこうなるなどと子どもを一律に機械仕立てのように見ることもできません。こういう教材を与えれば、こういう手順で教えれば子どもは必ず理解する、などということはありません。次の考えを一つのアプローチとしてお認めください。

第一に、算数・数学的活動を促し、湧き出させるには、我々が子どもが自ら活動し、互いに係わり合いながら、算数・数学的知識を構成し得る、いわゆる主体性をもつ存在であると信じる、その主体性を保証すること、に尽きるのです。我々の立場は暗黙的に子どもに浸透します(高橋、2000)。我々がこの立場に立つ

ことによって、授業も自力解決と練り合いや練り上げの場になります。

この第一として述べたことを言うまでもないこと、当然のこととしてください。その上で、第二には、やはり、よい教材を用意することです。今、RME 理論や MiC プロジェクトにおける教材としてご紹介したものには、開発した国や土地のものの考えが潜んでおり、直接使うには何かしら違和感を伴います。我々風に調整して用いるのも手でしょう。

文脈を伴った幾つかの教材をご紹介します。一つには、ハノイの塔がごございます。今年の二月に湊三郎先生よりご講演をして戴きましたが、その際にご紹介いただいたものです(湊、2002)。湊先生の講演録は、昨年の上越数学教育研究に掲載させていただきました。ハノイの塔は、1883 年にフランスのパズル研究科であるリュカ (Lucas, E.) が考え出したゲームです。今、紙片をお配りいたします。試してみましょう。ルールは、上の皿が下の皿よりも小さいようにして、この地点から他の二つの地点の何れかに、一回の動作で一枚動かすとして、最小何回で移動できるかということです。数学化できるでしょうか？ 表を作って考えるとどうでしょうか。最小の回数は、どうなりますか、皿が 1 枚のとき、2 枚のとき、3 枚のとき、4 枚のとき、5 枚のとき・・・ n 枚のときでは？ $2^n - 1$ 。

では、この問題はどうでしょうか？ 認定講習や市民講座の際に同じような問題をご紹介しましたら、極めて好評でした。

碁石を使って、自然数列 $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ の和を求めよう、奇数列 $\{1, 3, 5, \dots, 2n-1\}$ の和を求めよう、偶数列 $\{2, 4, 6, \dots, 2n\}$ の和を求めよう、等差数列 $\{3, 8, 13, \dots, 5n-2\}$ の和を求めよう、平方数列 $\{1^2,$

$2^2, 3^2, \dots, n^2$ } の和を求めよう、立方数列 $\{1^3, 2^3, 3^3, \dots, n^3\}$ の和を求めよう、です。

ここでご紹介した教材は、小学生であっても、中学生、高校生、さらに成人であっても取り組むことができ、算数・数学的活動が引き出されるものでしょう。子ども同士で練り合うことによって、さらに洗練された算数・数学的活動が湧き出てくるでしょう。高校生や成人であれば、数学的言語・記号により、数学化する場合もありましょう。次元を進めることもできるでしょう。問題を作ってもいいわけです。

これらの教材は、課題学習においても使えますし、総合的な学習とも関連させられるでしょう。

8. おわりに

算数・数学的活動を湧き出させるための第一として子どもの主体性を保証することを述べました。主体性を保証し、授業を自力解決と練り合いや練り上げの場としなければなりません。よい教材を用意することは欠かせないことであり、幾つかの教材もご紹介しました。さらに、活動を促す条件として加えることがあるとすれば、次の3点になります。

- ・子どもの言うことがわかること：このことは子どもにストレスを溜めさせないこと、学級崩壊などを未然に防ぐことにもなります。

- ・子どもに任せられること：このことは子どもとの良好な人間関係、互いの信頼を必要としますし、子どもに何時でも応じられるという教師の自信を必要とします。

- ・子どもが話すのを待てること、子ども同士の係わり合いを優先すること：このことも子どもに何時でも応じられるとい

う教師の自信を必要とします。

ところで、主体性という語は、かなり曖昧で、元は実存主義からの語とされます(湊&浜田, 1994)。主体性は我が国で独自の使われ方をしてきてもあります。自主性、自発性などどこが違うのでしょうか。これらの語の違いを研究することが必要でしょう。何れにしても、これらの語が算数・数学的活動を押し進める情意的性格を含むことは疑いなくでしょう。先の学習指導要領では、よさという語が鍵となっておりました。このよさという語にも、情意的性格が入っているのです。このことは前回の小学校指導書算数編(文部省, 1989d)で述べられています。今回の学習指導要領では、活動の楽しさがこのよさから強く取り出され、明確化されたのかも知れません。この小学校指導書算数編には、「よさ」が分かることは、算数の学習が価値あることを児童なりに感じとることができるようにするために必要なことである、算数は人間によって生み出された価値あるものである(文部省, 1989d), との記載があります。

ただ、どうも、算数・数学が楽しければいいのか、などという誤解が生じているらしい。よさも活動の楽しさも、算数や数学を行うことなしでは生じ得ないのです、実感し得ないのです。算数や数学をすること、その中にこそ、よさや活動の楽しさがあるのです。同時に、算数や数学のよさを味わうこと、楽しむこと、よさを知り、楽しむからこそ算数や数学を行い得るのです。算数・数学的活動が湧き出すのです。

丁度、予定の時刻となりました。先生方にお願ひがあります。算数や数学の時間が少なくなってきた、多少、不利なところもございますけれども、どうか充分に子どもの算数・数学的活動を促し、湧

き出させ、算数や数学を学習する本当のよさ、楽しさを経験させてください。本日はどうもありがとうございました。質問がございましたら。

文献

- Bruner, J.S. (1960). *The process of education*. Harvard Univ. Press: Cambridge.
- Bruner, J.S. 鈴木祥蔵 & 佐藤三郎 訳 (1963). *教育の過程*. 岩波.
- Bruner, J.S. 田浦武雄 & 水越敏行 訳 (1966). *教授理論の建設*. 岩波.
- Bruner, J. 岡本夏木 他 訳 (1999). *意味の復権—フォークサイコロロジーに向けて*. ミネルヴァ.
- Dienes, Z.P., 吉田耕作 & 赤攝他 監修 (1977a). *算数・数学学習の実験的研究*. 新数社.
- Dienes, Z.P., 吉田耕作 & 赤攝他 監修 (1977b). *算数・数学学習の創造的学習*. 新数社.
- Galbraith, P. & Haines, C. (1997). Some mathematical characteristics of students entering applied mathematics degree courses. S.K. Houston, W. Blum, I. Huntley & N.T. Neill (Eds.), *Teaching & Learning Mathematical Modeling* (pp.77-89). Albion Publishing Limited: Hartonlls.
- Gravemeijer, K., Cobb, P., Bowers, J. & Whitenack, J. (2000). Symbolizing, Modeling, and Instructional Design. In P. Cobb, E. Yackel & K. McClain (Eds.), *Symbolizing and Communicating in Mathematics Classrooms* (pp.225-273). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- MiC. (1998a). *Teacher resource and implementation guide*. Cicago: Britannica.
- MiC. (1998b). *Reflections on number*. Cicago: Britannica.
- MiC. (1998c). *Triangles and beyond*. Cicago: Britannica.
- 湊三郎 (2002). 授業三型論に基づく教師の数学的資質. *上越数学教育研究*, 17, 1-20.
- 湊三郎 & 浜田真 (1994). プラトン主義は子どもの主体的学習を保証するか—数学観と数学カリキュラム論との接点の存在—. *日本数学教育学会誌*, 76, 3, 2-8.
- 文部省 (1989a). *小学校学習指導要領*. 大蔵省.
- 文部省 (1989b). *中学校学習指導要領*. 大蔵省.
- 文部省 (1989c). *高等学校学習指導要領*. 大蔵省.
- 文部省 (1989d). *小学校指導書算数編*. 東洋館.
- 文部省 (1998a). *小学校学習指導要領*. 大蔵省.
- 文部省 (1998b). *中学校学習指導要領*. 大蔵省.
- 文部省 (1999a). *高等学校学習指導要領*. 大蔵省.
- 文部省 (1999b). *小学校学習指導要領解説算数編*. 東洋館.
- 文部省 (1999c). *中学校指導要領解説—数学編—*. 大阪書籍.
- 文部省 (1999d). *高等学校学習指導要領解説—数学編—*. 実教出版.
- 塩野直道 (1970). *数学教育論*. 振興出版社啓林館.
- 高橋等 (1989). 児童の能力とさまざまな場面、書式をもつ数量に関する問題の理解との関係. 修士論文.
- 高橋等 (1996). 数学的知識の獲得を促す比喩の役割. 筑波大学教育学研究科, 中間論文.
- 高橋等 (1996). 21世紀に向けてのカリキュラム開発プロジェクト. *教育科学数学教育*, 468, 97-100.
- Takahashi, H., Minato, S. & Honma, M.

(1993). Formats and situations for solving mathematical story problems. In I.Hirabayashi & N.Nohda et al.(Eds.) *Proceedings of the 17th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. II -191 – II -198), Tsukuba: Japan.

高橋等 (2000). 成人のもつ数学的知識の様態：算数・数学を専門としない教師を調査参加者としてのグループ・ディスカッション法による調査から. 上越数学教育研究, 15, 19-28.

高橋等 (印刷中). 数学的知識の比喻性に着目した算数・数学学習への接近.

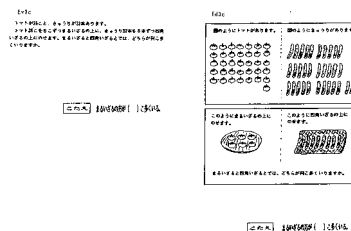
能田伸彦, 清水静海&磯田正美(編), 算数・数学教育の新世紀. 東洋館.

高森敏夫 (1987). 第二次世界大戦前・戦中の算数・数学教育 小学校算数教育の概観. 日本数学教育学会編著, 中学校数学教育史 (pp.15-35). 新数社.

Wittmann, Erich Ch.(2000). Developing Mathematics Education in a Systemic Process.

Wittmann, Erich Ch. 湊三郎訳 (2000). 算数・数学教育を生命論的過程として発展させる. 日本数学教育学会誌, 第 82 巻, 第 12 号, 30-42.

資料



左/右	青四角	赤四角	青丸	赤丸
青四角	青四角	赤四角	青丸	赤丸
赤四角	赤四角	青四角	赤丸	青丸
青丸	青丸	赤丸	青四角	赤四角
赤丸	赤丸	青丸	赤四角	青四角

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$$

