上越数学教育研究, 第 18 号, 上越教育大学数学教室, 2003 年, pp.101-110.

比の三用法を伴う小数の乗法及び除法における子どもの知識の構成過程について

上越教育大学大学院修士課程2年
高橋　裕樹

1. はじめに

小数の乗法及び除法は, 整数の乗法及び除法に, 数としての小数の難しさが絡み, 整数の乗法及び除法の内容から大きな飛躍がある。それ故に, 子どもはその問題場面から数学的内容を捉え, 解決していくことが難しい。筆者はこれまでの実践において, 具体物や活動の場を準備し, 授業を行ってきたつもりではあるが, その難しさ取り除くまでには至っていない。その理由に, 子どもの活動を促す一方で, 最終的には, 数直線やことばの式などを使いながら立式の仕方を教え込んでいたことがある。その結果, 活動によって構成された知識と, 教え込まれた知識とが遊離してしまっていた（高橋,2002 ）。子どもの既有の知識と, 子どもが新たに構成する数学的知識とがつながりをもつことが望まれる。子どもが既有の知識を用いて, 自ら小数の乗法及び除法の知識を構成する授業展開をすることが必要である。

本研究の目的は, 現実場面をもつ小数の乗法及び除法の解決を通して, 子どもが自らの知識を土台として新たな知識を構成し, 形式を用いていくまでの過程を明らかにすることである。

本稿では, 第一に, 小数の乗法及び除法に関わる先行研究の考察から, 子どもの知識の構成過程を捉えるための視点を示す。第二に, 小数の乗法及び除法の学習における, 子どものもつ, 心的構成物である, モデルの発達の過程を仮定する。第三に, その仮定をもとに単元と授業とを構想･実施し, 子どもの活動を解釈･考察する。

2. 小数の乗法及び除法に関わる先行研究

小数の乗法及び除法に関わる研究として, 整数の除法や小数の乗法, 比例の考えに関する先行研究の考察を行う。

2.1　整数の除法に関する先行研究

Takahashi et al.(1993)は, 整数の除法の理解についての調査を実施し, 包含除よりも等分除の理解が困難であることを統計的に示した。整数の等分除の難しさは, 分けるための単位がその場面に示されていないところにある（熊谷, 1998)。熊谷(1998)は, 子どもの既有の知識を基にした整数の除法の授業を構想する中で, 等分除と包含除を理解していくための視点を示した。その視点とは, 子どもに, 同じ大きさの単位で全体がつくられていることを意識させていくことである。熊谷(1998)は, 子どもが図を描く活動が, その子どもの思考の発達を促すことも示している。

2.2　小数の乗法に関する先行研究

中村(1996)は, 小数の乗法において, 数直線を子どもの活動の媒体とすることによる指導を提案している。中村(1996)は, 子どもが数直線を用いて活動することによって, 整数の乗法の同数累加の考えを割合の考えへと拡張させ, 整数や小数, 分数の乗法及び除法を統合し得ることを述べている。白井ら(1997)は, 数直線から比例関係を読み取れない子どもや, 数直線を有効に活用して解決に臨んでいない子どもが多くいることを報告している。

高橋(2000)は, 小数の乗法の授業実践を通して, 子どもがテープ図をつなげる活動から単位と

全体の関係を捉え，比例の考えを進展させていった事例を示している。小数に対して下位単位0.1 を設定したり，2量の単位を取り直したりする活動が，同数累加の考えを比例の見方へと進展させていく。子どもは比例の考えの進展と共に，テープ図を抽象化していき，数直線を構成していくようになった。

2．3　比例の考えに関する先行研究

日野(1996)は，日米の児童の「価格」と「速さ」の問題に対する応答を比較し，日本の児童には比例の考えが意識されていないことを指摘している。その原因は，日本の児童が形式的，機械的な乗除の計算を用いて解決に臨む傾向にあるところにある。日野(19996)は，子どもが，問題を解決するのために設定する単位とその単位当たり量の組を示す，ユニットを柔軟に利用していく経験が比例の考えを進展させ，小数の乗法及び除法の問題場面の解決に生かされていくことを示している。

3．子どもの活動を中心とした授業の構成に向けての理論的考察

3．1　モデルの自己発達

人間の活動としての数学，という数学観を基礎とする立場に，オランダのフロイデンタール派による現実的数学教育（ Realistic Mathematics Education ，略称 RME ）がある(高橋,1996)。RME において子どもの活動は，算数･数学を巻き込む現実的な状況における，子どもの実経験から出発する。形式的な数学は，現実的な場面に応じた，すなわち，場に応じた子どもの具体的な活動や経験から構成される[注1]。

Gravemeijer et al. (2000)は，RME の理論に基づき，子どもがはじめに問題場面を解釈し，解決するために用いる知識が，記号や一定の方略，標準のアルゴリズムの使用によって特徴づけられる知識へと発達していく段階を示した（図1）。知識の発達は，子どもがもつ，心的構成物である，モデルの発達に沿う。 Gravemeijer et al. (2000)は，次のようにモデルについて次のように説明している。

> モデルという言葉は，記号で表すことや表記することの方法として，課題状況や言葉の描写記号を指すことができる。（中略） RME において，モデルという語は，動的で，全体論の意味で理解されている。（ pp.240 ）

子どもは，問題を解く中で既有の様々な知識を関連づけ，心的にモデルを構成する。子どもは自ら構成したモデルを用いて活動することから，その子どもがもつモデルは，その子どもの活動の中に現れてくる。結果として，子どもの心的構成物であるモデルは，子どもの活動から読み取ることができる。

子どもが場に応じて活動する際に用いるモデル（ a model of the situation, 以下, model-of と呼ぶ）は，子どもが自ら問題を解決していくことで構成される。 model-of は，次の二つの数学化の活動を通して，数学的な関係について推理するためのモデル（a model for mathematical reasoning，以下， model-for と呼ぶ）へと発達する。一つは水平的な数学化であり，社会的文脈に影響され，インフォーマルな方略に基づき，知識が併列的に連なっていく。もう一つは垂直的な数学化であり，知識や技能，記号が抽象化，形式化され，統合されていく。

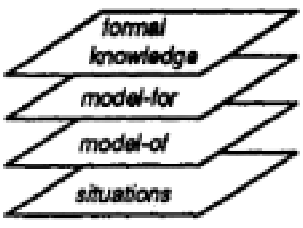

図1．モデルの段階

3．2　小数の乗法及び除法における子どものモデルの自己発達

Gravemeijer et al. (2000）の理論を基に，子どもが既有の知識を小数の乗法及び除法の知識へと発達させていくまでのモデルの自己発達を仮定した（図2）。

図2はモデルの発達の2つの段階を示す。一つ目は，小数の乗法，包含除及び等分除の各々の知識において， model-of が model-for へと発達していくことである。例えば小数の等分除の

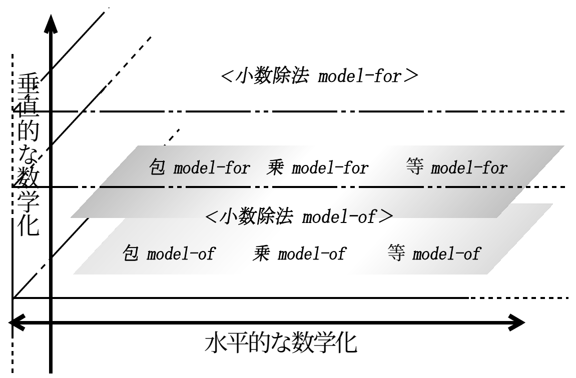

図2．小数の乗法及び除法における子どもの自己発達

問題場面において，子どもが1当たり量を求めるために，問題場面に応じて 0.1 や 0.5 などを解決のための単位とし， 0.1 当たり量や 0.5 当たり量を求める。この活動は，子どもが，既有の整数の乗法や包含除，等分除のモデルから，小数の等分除の場に応じたモデル model-of を構成することで生じる。 model-of は，様々な場に応じた解決の比較という水平的な数学化と，この比較を統合する垂直的な数学化により発達する。この発達は，1を解決のための単位とする，割合の考えに基づいたモデル model-for への発達である。この発達により， 0.1 や 0.5 当たり量を求める活動が， 0.1 や 0.5 を1と見なすことによって，1当たり量を求める活動へと移行する。

もう一つは，小数の乗法，包含除及び等分除の知識として発達した model-for が，今度は小数の乗法及び除法の知識を統合した model-for となる発達である。例えば，1を解決のための単位とする，割合の考えに基づくモデルは，乗法，包含除及び等分除において，水平的な数学化と垂直的な数学化を通して，様々な単位を1と見なす割合の考えで統合される。その結果，子どもの活動には，乗法，包含除及び等分除を互いに関連づけ，比の三用法を自由に用いる活動が現れる。

4．授業実践

4．1　研究方法

授業における子どもの活動を深く掘り下げて解釈し，考察することによって，子どもの知識の構成過程を明らかにした。データの収集と解釈，分析には，日野(1995)による，質的研究の手法を参考にした。質的研究は，授業参加者と同じ視点から，算数･数学が教えられている環境や子どもが学校で数学を学ぶ過程を理解する上で，重要な手がかりを与えるものとして有効な研究方法である（日野,1995）。

研究の対象となったのは，秋田県内の公立小学校第5学年の1学級である。学級は，男子6名，女子 10 名，計 16 名で構成されている。

データの収集は， 2002 年6月3日から7月 12 日までの期間に，筆者が，乗法6単位時間，除法6単位時間，比の三用法3単位時間の授業を行い，参与観察することによって行った。それぞれの小単元の途中と終了時に，抽出児童に対してインタビューを行った。授業全体と抽出児童の様子を3台の VTR と ATR で記録し，子どものノートをコピーした。

4．2　単元と授業の構想

図2に示した子どものモデルの自己発達は，包含除及び等分除のモデルが乗法のモデルの発達と共に洗練されていくということや，乗法と包含除のモデルの発達が等分除のモデルの構成にかかわっているという仮定に基づく。この仮定により，単元構想においては，小数の乗法，包含除，等分除の順に小単元を配置し，最後に，比の三用法の問題場面を設定した。

問題場面としては，現実に即した具体的な場面を扱った文章題を用いた。等分除のはじめの文章題では，子どもが解決のための単位を用いる際に，包含除の取り去る操作を等分除の問題場面に適用し得るように，2量の差を単位として着目できるような数値を用いた。

4．3　授業の概要

表1は，授業で用いた問題場面である。

問題場面①から⑥は乗法，⑦･⑧は包含除，⑨から⑫は等分除の問題場面である。⑬から⑮は比の三用法の活用をねらいとした問題場面である。特に，①と⑨，⑩は，子どもが解決に必要な単位を設定する際に2量の差に着目できるようにしたものである。⑬から⑮は，小数の乗法や包

	問　題　場　面	
①	1m 80 円のリボンを 3.2 m買いました。代金はいくらになりますか。	乗法
②	1ℓのガソリンで 15km 走るバイクがあります。2.3 ℓのガソリンでは，何 km 走ることができますか。	
③	1mの重さが 20g のはり金があります。このはり金 0.8 mの重さは何gですか。	
④	1mの重さが 2.3kg の鉄の棒があります。この鉄の棒 2.8 mの重さは何 kg ですか。	
⑤	2.3 × 2.8 の筆算の仕方を考えよう。	
⑥	たて 2.3 m，よこ 3.6 mの花壇の面積は何m^2ですか。	
⑦	1人に 2.5 mずつリボンをわたしたいです。20 mのリボンから何人分のリボンを用意できますか。	包含除
⑧	8.4 ℓの灯油があります。1台のストーブに 0.6 ℓずつ入れると，何台のストーブに灯油を入れることができますか。	
⑨	2.5 mで 200 円のリボンがあります。そのリボンを3m買いたいと思います。3m買うと代金はいくらになりますか。	等分除
⑩	バケツに，2.4 ℓの砂を入れて重さを量ったら，3.6kg ありました。この砂の2ℓ分の重さは，何 kg になりますか。	
⑪	0.3 mで 7.2kg の鉄の棒があります。その鉄の棒の1mの重さは何 kg ですか。	
⑫	2.6 ℓのガソリンで，16.9km 走る車があります。1ℓでは何 km 走るでしょう。	
⑬	よしこさんのつるの長さ(2.4 m)をもとにすると，あきらくん(3.6 m)とみちこさん(1.8 m)のつるの長さは何倍になりますか。	包含除
⑭	赤い鉄の棒は5 kg です。青い棒の重さは，赤い棒の重さの 3.5 倍，黄色い棒の重さは赤い棒の 0.6 倍あります。青と黄色の棒の重さは，それぞれ何 kg ですか。	乗法
⑮	あきらさんは 63 枚のカードを持っています。これはまるこさんのカードの枚数をもとにすると 1.8 倍にあたります。まるこさんはカードを何枚を持っているでしょう。	等分除

表1．授業で用いた問題場面

含除，等分除の意味づけを，様々な単位を1と見なすことによる割合の考え（小数倍）で統合していく問題場面である。

4．4　抽出児童について

子どものモデルの自己発達の過程には，先行研究で得られた視点が大きくかかわっている。本稿では，子どもが問題場面の解決のため用いる単位とその利用の仕方，子どもがその活動に伴って描く図という観点から児童（龍太：仮名）を選んだ。

龍太は，普段から積極的に授業に参加し，授業中の発言が多い子どもである。授業実践前に行った事前調査では，整数の包含除と等分除の意味を分けて捉え，場面の様子を絵図に書き表すことができた。問題の解決にあたっては，直感的に解決を行うことが多く，ノート等に自分の考えを記入しながら取り組むことが少ない。本授業実践においては，発言を促す他に，自分の考えをできるだけノートに記入するように促しながら，活動を進めていくようにした。

以下では，龍太の活動の解釈を提示し，考察を行う。

5．model-ofとmodel-forの視点によるモデルの発達と数学化について

5．1　龍太の活動の概要

龍太は，問題場面に応じて解決のための単位を様々に設定し，場に応じたモデル model-of を用いて解決に臨んだ。その後，解決のための単位として 0.1 に着目するようになると，0.1 から1へと単位を変換し，式の比較を行うようになった。龍太はその比較から，自ら1を単位とする割合の考えに基づくモデル model-for を構成した。龍太は比の三用法の問題場面において，様々な単位を1と見なす割合の考えに基づく解決をするようになった。

5．2　各小単元における龍太の活動の解釈

(1)　乗法

龍太は，乗法の問題場面①「1m 80 円のリボンを 3.2 m買いました。代金はいくらになりますか。」において，3.2 × 80 を立式する。龍太は

「整数と同じでやる」と発言し，3.2 × 80 の 3.2 の小数点を抜き（10 倍して），80 の０を取り（1/10 して）32 ×８として計算を行った。龍太は，既有の整数の乗法のモデルに式の保存のモデルを関連づけたモデルを，場に応じたモデル model-of として用いることによって解決に臨んだ。龍太が立式した 3.2 × 80 は１を単位とした式である。実際に計算した 32 ×８は，0.1 を１と見なすことによる整数の乗法のモデルを用いた計算である。龍太は整数の乗法のモデルを用いた解決を行うために，１を単位とする活動や，0.1 を単位とし，１と見なすことによる活動を柔軟に行っている。

問題場面③の後に行った練習問題「１mで 21kg のはり金があります。このはり金 3.4 mの重さは何 kg ですか。」に対して，龍太は 21 × 3.4 を立式し，筆算によって積 71.4(kg)を導いた。龍太は 21 × 3.4 の立式について「21 の 3.4 個分だから」と，小数を一つのかたまりとして捉える発言をした。小数 3.4 をひとかたまりの集まりとして捉えるという活動は，１に対する割合を表したものである。龍太は１を単位とする割合の考えに基づくモデル model-for を用いた解決をしている。

(2)　包含除

問題場面⑦「１人に 2.5 mずつリボンをわたしたいです。20 mのリボンから何人分のリボンを用意できますか。」において，龍太は 20 ÷ 2.5 を立式し，筆算（図３）をして答え８(人)を導いた。

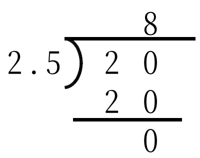

図３．龍太が行った筆算

> 小数点がない時は小数にするけれど，この場合，初めから小数だから小数にしないで，それぞれ分けてからやる。

龍太はこの様な発言をし，筆算の商が８となるように小数点を操作している。龍太は，自らがもつ整数の包含除のモデルを小数の包含除の model-of とし，20 ÷ 2.5 の立式を，既習の（小数）÷（整数）の筆算の形式にあてはめて解決に臨んでいる。

他方で，2.5 mを示すテープを８個つなげていく活動（図４）を友達が示すと，龍太はその活動を基に 2.5 ×８を立式した。

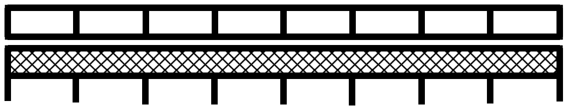

図４．（板書）
（上）2.5mを示すテープ模型を８個つなげたもの
（下）20mを示すテープ図に区切りを入れたもの

(3)　等分除

問題場面⑨「2.5 m 200 円のリボン，３m分の代金はいくらですか。」において，龍太は 2.5 m と３mの差 0.5(m)を解決のための単位とし，0.5 m当たりの値段を求める活動に取り組んだ。

龍太はその活動について次のように発言している。

> 200 ÷５をやって 40 になりました。200 を５こに分ければいいと思う。2.5 は 0.5 が５こでできているから，200 ÷５をやりました。

龍太は 0.5 mを１と見なし，2.5 mに 0.5 mが５つ含まれているという包含除の見方を等分除 200 ÷５に適用して 0.5 mの値段 40 円を求めた。龍太は，自らがもつ整数の包含除と等分除のモデルを小数の等分除の場に応じたモデル model-of として用い，解決に臨んでいる。

龍太は 2.5 mと３mの差を埋めるために 0.5 m当たりの値段 40 円を用いてた。龍太のその活動は，友達が描いた図５を図６へと進展させ‘(0.5 mの値段)×６’という比例の見方と結びつける役割を果たした。

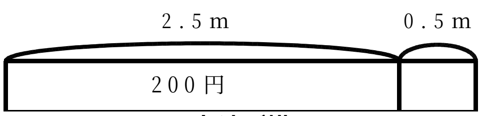

図５．友達が描いた図

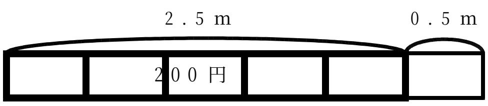

図６．龍太の活動によって描き加えられた加えた図

問題場面⑨後のインタビューにおいて，龍太は，問題場面「 1.6 mで 4.8kg のはり金があります。このはり金1mの重さは何 kg でしょう。」に取り組む。龍太は初めに 1.6 mと1 m の差 0.6 mに着目し， 48 ÷8を立式する。その後 48 ÷~~8~~6＝0.6 とし，続いて 4.8 － 0.6 ＝ 4.2 を行った。龍太は 0.6 を解決のための単位として用いられないことに気づくと， 0.1 を解決のための単位とし，4.8 ÷ 16 ＝ 0.3 ， 0.3 ×6＝ 1.8 ， 4.8 － 1.8 ＝3(kg)を行った。龍太は問題場面⑪，⑫において， 0.1 当たり量を 10 倍して1当たり量を求める活動を行うようになった。龍太は「1当たり量を直接求める式も書けるが， 0.1 当たり量を求める考えの方が分かりやすい」という友達の意見に賛同した。龍太は， 0.1 当たり量を求める解決に臨む中で，1を解決のための単位とする，割合の考えに基づくモデル model-for を構成し，1当たり量を求める活動を理解している。

龍太は，等分除の学習後のインタビューにおいて，問題場面「 3.8 mで 13.3kg のはり金，1mの重さは何 kg でしょうか。」に取り組む。龍太は初めに 0.1 を解決のための単位とする解決 13.3 ÷ 38 ＝ 0.35 ， 0.35 × 10 ＝ 3.5 を行った。教師に他の解決を求められると，龍太は1を単位とした解決 13.3 ÷ 3.8 ＝ 3.5 を行った。龍太は，0.1 m当たりの重さを求める式 13.3 ÷ 38 と1m当たりの重さを求める式 13.3 ÷ 3.8 を比較し，単位の大きさ(0.1 ，1)の変化による除数と商の変化から，1を単位とする解決を説明した。

(4)　比の三用法

包含除の問題場面⑬に取り組んだ龍太は，2.4 を1と見なすことによる，割合の考えに基づく包含除の model-for を用いた解決に臨んだ。龍太は黄色い棒の重さを求めた解決 1.8 ÷ 2.4 ＝0.75 に対して「 2.4 の 0.75 倍が 1.8 」と発言した。龍太は包含除の場面を割合の考えに基づく乗法の model-for を用いて捉え直している。

乗法の問題場面⑭において，龍太は，割合の考えに基づく乗法の model-for を用いた解決を行う。龍太は，青と黄の棒の長さを求めた計算5× 3.5 ＝ 17.5 ，5× 0.6 ＝3に対して，それぞれ 17.5 ÷ 3.5 ＝5，3÷ 0.6 ＝5を行う。龍太は，小数の等分除の model-for を用いて乗法の問題場面を捉え直し，基準とした大きさを求め返す活動を行っている。

等分除の問題場面⑮において龍太は，未知数(まるこさんのカードの枚数)を1と見なし，割合の考えに基づく等分除の model-for を用いて， 63 ÷ 1.8 ＝ 35 を立式した。続けて，龍太は， 35 × 1.8 ＝ 63 を立式し，「昨日の式の時，検算にしたやつだから」とノートに記述している。

龍太は，等分除の問題場面を乗法のモデルを用いて捉え直したり，その逆を行ったりしている。龍太は小数の乗法と等分除を統合したモデル model-for を構成して，比の三用法の問題場面の解決に臨んでいる。

5.3　考察

龍太は，小数の乗法の問題場面をはじめとする現実的な場面に対して，既有の知識を基に，場に応じたモデル model-of を用いて解決に臨んだ。龍太はそのモデルを自ら発達させることによって，数学的な関係について推理するためのモデル model-for を構成していった。龍太のモデルの発達は，子どもが活動の中で自らのモデルを発達させていったという点で， Gravemeijer et al.(2000)が示すモデルの自己発達の過程に沿っているといえる。

龍太は比の三用法の問題場面において，基準になる大きさと比較量，割合を示す数量の関係を，式の変換を通して捉え直す活動をした。この活動は，乗法と包含除，等分除とを互いに関連づけた活動であり，龍太が小数の乗法と除法を統合したモデル model-for を構成し，用いることによって生じたものである。

龍太は，乗法の問題場面において， 0.1 を単位とする解決と1を単位とする解決を場に応じて行ったことによって，1を単位とする割合の考えに基づく小数の乗法の model-for を構成するまでに至った。

包含除の問題場面において，龍太は，整数

の除法の筆算や乗法のモデルとのかかわりから活動を行った。龍太は包含除の問題場面において，小数の包含除の model-of をさらに発達させていった過程を示していない。しかし，比の三用法の包含除の問題場面においては，割合の考えに基づく包含除の model-for を用いた解決を行っている。この解決では，割合の考えに基づく乗法の model-for を用いて問題場面を捉え直している。龍太の小数の包含除の model-of は，乗法の model-for との比較という水平的な数学化を通して，垂直的な数学化に向かっている。この数学化により，小数倍という，割合を求めることとしての包含除の model-for が発達した。この発達により，龍太の包含除の model-for と乗法の model-for が統合した。

龍太は等分除の問題場面に取り組み，解決のための単位を様々に用いる中で， 0.1 を単位とする場に応じたモデル model-of を発達させていった。龍太はこのモデルを基に，単位を変換することによる式の比較を行うようになる。龍太はこの比較から数学的な関係を見出し，1を単位とする小数の等分除の model-for を構成した。龍太は1を単位とする等分除の model-for を洗練させていないことから，自らは1当たり量を求める解決を行おうとしなかった。龍太は，比の三用法の乗法の問題場面において，基準の大きさ5を1と見なす，割合の考えに基づく乗法の model-for を用いた解決を行った。この解決を確かめるために，龍太は，等分除の model-for を用いた活動を行った。続く，比の三用法の等分除の問題場面においては，等分除の model-for を用いた自らの解決を，乗法の model-for を用いて確かめた。龍太は，乗法と等分除を関連づけ，乗法と等分除を統合した model-for を構成した。

6． 単位と単位当たり量の組の利用と比の三用法の活用について

6．1 龍太の活動の解釈

龍太は等分除の問題場面⑨において， 2.5 と3ｍの差 0.5 ｍの値段 40 円を求め，その値段を 2.5 ｍの値段 200 円にたして，3ｍの代金 240 円を構成した。この解決において， 0.5 ｍ当たりの値段を求める活動は，小数部分を解決するために用いられている。問題場面⑩において，龍太は，２ℓと 2.4 ℓの差 0.4 （ℓ）を解決のための単位とし，解決に臨んだ。龍太は 0.1 を解決のための単位とするようになると， 0.1 当たり量を求める活動を，求める数量全体を構成するために行うようになる。

龍太は，比の三用法の乗法の問題場面⑭において，基準の大きさである赤の長さ5を1と見なし，青，黄の棒の長さをノートに表した（図7）。

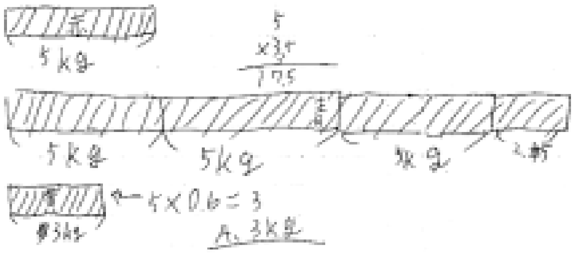

図7．龍太のノートから

龍太は，基準の大きさが 0.6 倍されることによって数量が小さく変化する様子を，広げた手を縮めることによって表した。広げた手を縮める動作は，手の幅を一定に固定し，いくつ分あるかを数えるというような累加の考えを表したものではない。その動作は，基準の大きさを1と見なすことによる割合の考えを表したものである。

比の三用法の等分除の問題場面⑮において龍太は， 1.8 倍の表す意味について，あきらとまるこのカードの枚数を比較した線分図（図8）に，線(本稿では点線部分)と数値を記入した。

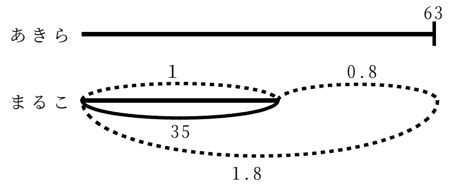

図8．龍太が1.8倍を説明するために用いた数直線

> 63 は 35 が 1.8 倍だから，1個と 0.8 倍の大きさだから（手のひらを広げて，各々の長さに合わせるようにして），ここ(1)と，ここ(0.8)で 1.8 倍になると思います。

龍太はこの様に発言し，基準の大きさ 35 を1と見なし，その1に対して増えた分を 0.8 倍分とし

て捉えた。龍太は 1.8 倍の意味を全体の数量 63 を表すものとして捉えている。龍太は 35 を1と見なし，割合の考えに基づいたモデルを用いて活動を行っている。

6．2　考察

龍太は比の三用法の問題場面において，様々な単位を1と見なす割合の考えに基づくモデルを用いて解決を行っている。龍太が乗法と包含除，等分除を関連づけて活動するようになっていった背景には，次の2点がある。一つは，小数の乗法及び除法の問題場面において，解決のための単位を自由に設定して解決に臨んだことである。もう一つは，解決のための単位を1と見なし，その単位と単位当たり量の組を柔軟に利用していく活動を行ったことである。

龍太は，等分除の問題場面において，解決のための単位を 0.1 へと移行させた後， 0.1 当たり量を，求める数量全体を構成するために用いるようになった。高橋(2000)は，小数の乗法において，下位単位 0.1 の設定が，比例の見方を進展させ，小数の乗法の立式を可能にすることを述べている。龍太の活動の解釈からも同様の考察が得られる。

熊谷(1998)は，ある同じ大きさの単位で全体ができていることを意識させることが包含除と等分除の共通の視点であることを述べている。また，日野(1996)は，子どもらが柔軟に単位と単位当たり量の組を利用していく活動を通して，比例的な考えを発達させていくことを述べている。龍太は乗法の問題場面①において，1を解決のための単位として 3.2 × 80 を立式した。しかし，実際には 0.1 を1と見なすことによって 32 ×8を計算した。包含除の問題場面においては，整数の包含除や乗法とのかかわりから，部分と全体とを捉える活動をしている。等分除と包含除を融合させた問題場面⑨においては，差そのものを解決のための単位として設定し，解決に臨んだ。これらの龍太の活動には，一つは，全体からある単位を見出すこと，ある同じ大きさの単位で全体ができていることを捉える活動がある。さらに，常に解決のための単位とその単位当たり量の組を意識し，場に応じて柔軟に利用しながら解決に取り組む活動が見える。

7．　子どものモデルの発達とテープ図の表記の変容について

7．1　龍太の活動の解釈

龍太は等分除の問題場面⑩において，「 3.6 は 0.4 が6個ある数だから 3.6 ÷6になって。」と実際に発言した。龍太は，2ℓと 2.4 ℓの差 0.4（ℓ）を解決のための単位とした図9を描いた。

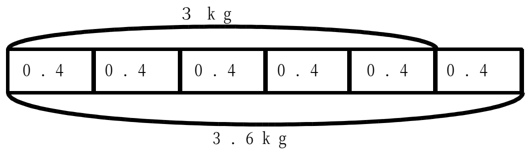

図9．0.4を解決のための単位とした図

比の三用法の問題場面に取り組み終えた龍太は，等分除の問題場面「10.8 mの赤いテープがあります。赤いテープは青いテープの長さをもとにすると 2.4 倍だそうです。青いテープの長さは何mですか。」に取り組んだ。龍太は 10.8 ÷ 2.4 を立式し，筆算によって，商 4.5 を得た。龍太は自らの解決を確かめるために 4.5 × 2.4 ＝ 10.8 を立式する。その後，基準にする大きさ 4.5 を1と見なし，数量関係を捉える図 10 を描いた。

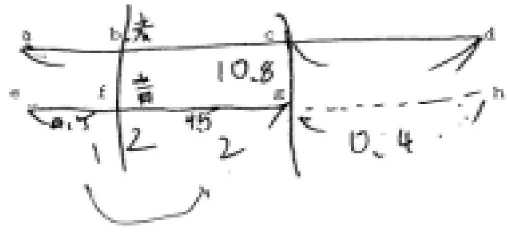

図 10．龍太が 4.5 を1と見なして描いた図

龍太は再度，等分除の問題場面「 2.4 mで 8.4kg のはり金，1mの重さは何 kg ですか。」に取り組む。龍太は， 8.4 ÷ 24 ＝ 0.35， 0.35 × 10 ＝ 3.5 を行った。龍太は問題場面を線分図

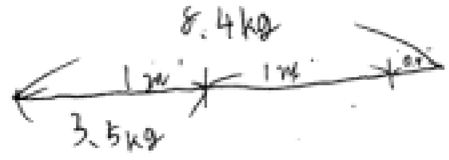

図 11．龍太が 3.5 を1と見なして描いた図

（図 11 ）で表すと，その線分図から乗法と包含除の式 3.5 × 2.4 ＝ 8.4 と 8.4 ÷ 2.4 ＝ 3.5 を立式した。龍太は線分図を描き，数量の関係を捉え直すことによって， 3.5 を1と見なし，割合の考えを用いて全体を捉えるという解決を行った。

7．2　考察

子どもが描く図は，子どものモデルの現れであり，子どものモデルの発達と共に，数量の関係を抽出した，抽象化された図となっていく。

等分除の問題場面で龍太が描いた図9には，0.4 が 2.4 の中に6個含まれていることと， 2.4 ℓ を6等分した一つ分（ 0.4 ℓ）の重さが 0.6kg であること，が示されている。龍太は 0.4 を 1 と見なし，包含除的な操作によって図を描いている。図9は，その図に用いられている数値は小数である。しかし，その構成は，龍太が既有の整数の包含除や等分除，乗法のモデルを組み合わせ，場に応じたモデルを用いることによって描いた図となっている。

小数の乗法と除法の統合されたモデル mode-for を用いた解決に臨むようになった龍太は，様々な単位を1とする，割合の考えを表す図（図 10 , 図 11 ）を描くようになった。テープ図から線分図への変化は，龍太のモデルの発達と共に，授業における他の子どもの影響を受けている。多くの子どもがテープ図を簡略化して線分を用いて描くようになっていった。

龍太は線分図を描くことによって，自らのモデルを発達させている。等分除の問題場面において，龍太は1を単位とする割合の考えに基づくモデルを構成しながらも， 0.1 を単位とする解決に強く依存していた。しかし，線分図（図 11 ）を描く活動を通して，比の考えを用いて全体を捉え，1を単位とした解決を行うようになった。熊谷(1998)が子どもが描く図の役割を述べているように，龍太の活動においても，自ら図を描く活動がモデルの発達を促している。

8．　指導への示唆

場に応じたモデル model-of は，子どもの素朴な考えであり，モデルが発達しても根強く残っているものである。抽出児童である龍太は，1を単位とする割合の考えに基づくモデル model-for を心的に構成しながらも， 0.1 を単位とする場に応じたモデル model-of に強く依存しながら活動をしていた。また， model-for を用いた解決をする中で，場に応じて model-of を用いた解決も行っている。本授業実践では，対象学級の多くの子どもたちが，既有の整数の乗法及び除法のモデルを積極的に用いて解決に臨んでいた。

授業設計者及び教師が授業を構想していく上で必要なことは，まず，子どもの場に応じたモデルとは何かを見抜くことである。その上で，場に応じたモデルをどのようなモデルへと発達させていくのか，という視点をもつことである。以下では，子どもが既有の知識を用いて，自ら小数の乗法及び除法の知識を構成する授業に向けての示唆をいくつか示す。

第1に，子ども自らが，解決のための単位を自由に設定し，1と見なすこと，また，その単位と単位当たり量の組を柔軟に利用していく経験を豊かにしていく必要がある。

小数の等分除において， 0.1 当たり量を求める活動は，子どものモデルの発達に伴い， 0.1 を1と見なし，1当たり量を求める活動へと進展していく。比の三用法の問題場面において，1当たり量を求める活動は，様々な単位を1と見なすことによって，単位当たり量を求める活動へと進展する。高橋(2000)は，小数の乗法の立式ができるようになるまでの過程に，下位単位 0.1 を設定し，2量の単位を取り直す活動を位置づけている。小数の乗法の学習を終えた子どもたちは，包含除や等分除の問題場面へとさらに学習を進めていく。その学習では，解決のための単位として 0.1 に着目させる他にも，様々な単位を1と見なし，柔軟に利用していく活動が必要となる。この活動を通して，ある同じ大きさの単位で全体ができていることを意識させていくことができる。

本研究では，2量の差を解決のための単位として等分除と包含除の関連性が見出せる問題場面を設定した。この問題場面は，子どもが解

決のための単位を設定し，1と見なすこと，その単位と単位当たり量の組を柔軟に利用していく経験をするために有効である。

第2に，子どものもつモデルは，授業を通して自己発達していく。龍太は授業において他の子どもの考えや活動に接し，自らの活動と比較したり，他の子どもに自らの考えを説明したりすることによって，自らのモデルを発達させていった。

龍太はテープ図を描く活動を，友達の活動の影響を受けることによって，自ら，線分図を描く活動へと進展させていった。龍太が場に応じて描いたテープ図は，数の関係を抽出した，抽象化された線分図となっていった。子どもの活動やその活動によって描かれた図は，子どものモデルの現れである。龍太のこの活動は，モデルが洗練されていった典型的な事例である。授業において，子ども一人ひとりの活動を重視し，互いの考えに触れ合う機会を多く設けることで，子どものモデルは自己発達していく。

9． おわりに

本研究の授業実践において，抽出児童である龍太は，解決のための単位を様々に設定することによる場に応じた活動のモデルを，様々な単位を1と見なすことによる割合の考えに基づくモデルへと発達させていった。子どもが自らのモデルを発達させ，小数の乗法及び除法の知識を構成していく授業をしていくために必要なことは，まず，子どもの場に応じたモデルとは何かを見抜くことである。その上で，場に応じたモデルをどのようなモデルへと発達させていくのか，という視点をもつことである。

質的研究によって得られた結果は強い妥当性をもつ（日野， 1995）。本研究における事例とその考察は，今後の実践の参照となると考える。

注 1) 上越地域の算数･数学教育誌に掲載された「高橋等.(2001).和蘭フロイデンタール研究所における数学教育の理論と教材.平成13年度研究と実践」による。

【引用･参考文献】

Gravemeijer.K., Cobb.P. & Bowers.J., Whitenack,J.(2000).Symbolizing, Modeling, and Instructional Design. In Cobb,P., Yackel,E., & McClain,K(eds.), *Symbolizing and Communicating in Mathmatics Classroom*(pp.225-273). Mahwah NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

熊谷光一. (1998).3年除法の導入に関する教授実験における授業計画のための示唆.*筑波数学教育研究, 17,* 95-104.

白井一之他. (1997). 乗法･除法の演算決定に有効にはたらく数直線の指導. *日本数学教育学会学誌, 79(6),* 51-56.

高橋久誠. (2000).小数の乗法の授業構成に関する考察－比例の考えをもとにして－.*上越数学教育研究, 15,* 85-94.

Takahashi, H. & Minato, S., Honma, M. (1993). Formats And Situations For Solving Mathmatical Story Problems. Psychology of Mathmatics Education. *Proceedings of the Seventeenth International Conerence. Volum Ⅱ*. 191-198. に伴う未公開資料.

高橋等.(1996).研究動向から見た学習指導法の改善.教育科学数学教育, 468, pp97-100. 明治図書.

中村享史. (1996).小数の乗法の割合による意味づけ.*日本数学教育学会学誌,78(10),* 7-13.

日野（伊藤）圭子. (1995). 数学教育における質的研究について：その前提と方法. *日本数学教育学会誌, 77(10),* 2-12

日野圭子. (1996). 比例の問題の解決において構成されるユニット: Well-Chunked Measures を含む問題に対する日米子どもの応答の分析. *筑波教育数学研究,15,* 15-24.

高橋裕樹.(2002).小数除法におけるモデルの発達について. *上越数学教育研究, 17.177-186.*

高橋裕樹.(2003).小数の乗法と除法とにおける子どもの知識の構成過程について－子どもが比の三用法を活用していくまで－. 上越教育大学大学院学校教育研究科修士論文（未公刊）.