上越数学教育研究, 第 19 号, 上越教育大学数学教室, 2004 年, pp.61-72.

数学の授業における数学化のプロセスの評価に関する研究

日 野 昭 彦
上越教育大学大学院修士課程２年

1. はじめに

筆者は，教職経験から，評価が指導に生かされていないという問題点を感じていた。一般に，観点別評価の観点の中でも「数学的な見方や考え方」のよりよい指導を実現するために，生徒が数学を創り出していく学習過程を評価することが重要であることは指摘されているが，それを実現することは十分になされていないのが現状である。このような問題点に対する原因の一つとして考えられるのは，「数学的な見方や考え方」の指導というのが，生徒の問題に取り組むその取り組み方そのものを指導することであり，その指導を実現するためには，生徒の問題解決によって導かれた結果だけを評価していたのでは不十分であり，生徒のリアルタイムの活動を評価し，指導していくことが要求されるという教師の専門性，あるいは力量が問われる指導場面であるということがあげられる。

本研究では，これらの問題点の解決のための拠り所として，生徒自らが数学を創り出していく「数学化」のプロセス自体に焦点を当て，それらの発展を促す教師の評価活動の在り方を，特に，評価の枠組みの構築方法とその活用方法を中心として，実証的に明らかにすることを目的とした。

2. 数学化に関する考察

2. 1. 理論的背景

数学化とは何かを捉えるために，Freudenthal(1968)を考察した。Freudenthal(1968)は数学化を「蓄積した経験を数学的方法により組織する活動」として捉え，数学化を学校数学の中心に据えて，それを軸にした数学教育を展開しようとした。その背景にある数学観は，数学を完成された知識体系としてみるのではなく，創造的な活動それ自体が数学であるという数学観である。そのために生徒が数学を再発明(Re-invention)する状況が必要であり，閉じた体系としての数学ではなく，「活動としての数学」の重要性を主張した。Freudenthal(1968)から示唆されることは，「数学化」とは数学を創り出すプロセスそのものであるということである。

Treffers(1987)は，Freudenthal の数学化のプロセスを局所レベルで捉えようとした。そして数学化を「ある理論を構成する際に利用できる数学的方法（認識方法）を対象化して新しい理論を構成すること」と規定し，Freudenthal の数学化を水平的数学化と垂直的数学化の２つの側面を持つ漸進的数学化として理論づけた（図１）。

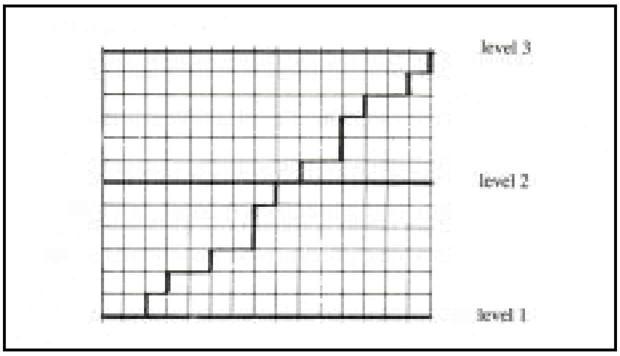


図１ Treffers(1987)，漸進的数学化

Treffers(1987)は，局所レベルにおける数学化は線形に進むのではなく，細かな階層をなして，水平・垂直的数学化が複雑に関係しながら発展するプロセスとして捉えようとした。

2．2．学校数学における数学化の学習過程

礒田(1990)は，数学化の立場から学校数学における学習過程を考察し，数学化のプロセスが「対象を創り出す層→活動を反省する層→新たな方法による活動の層」の３つの階層をたどり，その中の「活動を反省する層」を促すことで,数学化が発展すると述べている。礒田(1990)の考察は，Freudenthal(1968)の数学化の概念に基づいているが，それを局所的に捉えようとした Treffers(1987)の漸進的数学化の考察を，授業場面における数学化の活動として具体的に捉えようとしたものである。

3．プロセスの評価に関する考察

3．1．プロセス評価の具体化

本研究の評価は，主に「数学的な見方や考え方」の評価に関わるものであり，その観点を評価するためには，解答に対する正誤だけを取り上げるのではなく，プロセスを評価することが求められる。具体的な評価の手順として，黒澤(2000)を考察した。黒澤(2000)は，教師の評価活動が，「収集→解釈→調整」というサイクルで行われ，指導へとフィードバックしていく教授行為が評価の本質であることを述べた。

次に，評価が指導に移行する際の教師の意思決定について，吉崎(1991)を考察した。吉崎（1991)は，教師の意思決定が授業の性質を左右するものであり，教師の専門的力量が問われる場面であると述べ，３つの特徴を挙げている。

（１）いつ，どのような授業場面で意思決定をすることが必要なのか，たえず主体的に判断しなければならない。

（２）生徒への働きかけが成功するまで，教師の意思決定は繰り返し起こる。

（３）教師の意思決定は，確実な状況下での決定と不確実な状況下での決定とが相半ばしている。

吉崎(1991)から，授業計画や評価計画は授業中は背後に退いて，総合的な要因が関係して，相互作用的な意思決定が教師の教授行為を規定するという示唆を得た。小林(2002)からは，生徒の反応の正誤を教師が明確にフィードバックする評価が，生徒の主体的な活動を妨げることや，教師や生徒の問いの連鎖によりフィードバックされる間接的な評価が，創造的な学習過程を実現し得るものであるという知見を得た。

3．2．プロセスを評価する枠組み

内田(1989)は，問題解決における数学を創り上げていく過程（数学化の過程）に焦点を当てて，そこに働く数学的な考え方を取り出して，評価マトリックスにより評価することをねらいとして研究した。評価の枠組みとして，「思考水準」と「系統化された数学的な考え方」の二次元で構成された評価マトリックス（以下，「二次元評価マトリックス」と略記）が，数学化のプロセスに働く数学的な考え方の評価に有効であることを実証した。

プロセスの評価に関する考察から，本研究の目的である，指導に生かすプロセスの評価を実現するための教師の評価活動は，生徒の活動そのものを見取り，その活動の変容を促すフィードバックを実現することであり，次のような図として表すことができる。

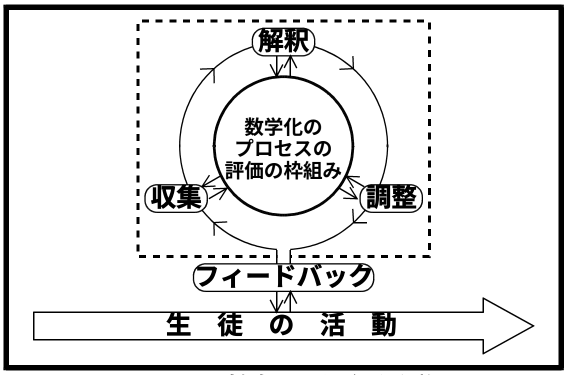


図２　教師の評価活動

4. 実験授業

4. 1. 概要

生徒の数学化がどのように促されていくのか，また，教師のフィードバックの在り方について分析・考察するために，授業中の生徒の数学化のプロセスを意図的に評価する実験授業を計画・実施した。授業は2003年5月に，新潟県の公立中学校３年生８名の選択数学のクラスを対象に，課題「ビリヤードの数学」について６時間行った。この課題は，ビリヤード台の大きさと跳ね返る回数との関係を帰納的に調べることで規則性を発見したり，規則性が成り立つ根拠を論証することをねらいとした課題である。授業における生徒の活動を評価する枠組みを構築するために，まず，筆者の課題解決の思考過程を，主に数学化の「二次元評価マトリックス」の観点から内省した。そして，生徒の数学化の水準の高まりを大まかに捉えるために，生徒に期待する姿である行動目標として設定した評価規準（L）と，各水準においてどの程度達成しているかを捉えるために，予想される生徒の活動を初源的なものからより発展的なものへと順序づけて，時系列で並べて設定した評価基準（S）の２項目から構成される数学化のプロセスの評価の枠組みを作成した（表１）。

３台の VTR により，授業全体の様子と個々の生徒の活動（宮里，飯田）を記録し，主に，授業全体の数学化のプロセスを分析するために詳細なプロトコルを作成した。６時間

表１　ビリヤードの課題を想定した評価の枠組み

L1：問題をはっきりと特定し，条件を整理して目的にあった問題場面として解釈する

評価基準（S）		
S1	S2	S3
問題を解決するために，実際場面における本質的な目標変量を特定して考えようとする	目標変量に影響を与える変量にはどんなものがあるか考えようとする	解決に必要な目標変量を取捨選択し，条件を規定して考えていこうとする（曖昧な変量をはっきりとさせる）

L2：事象の中に規則性を見つけるために，順序よく調べたり，記録の方法を工夫する

評価基準（S）			
S1	S2	S3	S4
試行錯誤的に，具体的な事例についていくつか考えようとする	縦横の一方を固定することで変化の様子を見ながら考えようとする	具体的に調べた事例について，記録を残しながら考えようとする	規則性を見つけやすい表を工夫して考えようとする

L3：帰納的な推論の考え方により，個々の具体的事例から一般的な法則を導き出す

評価基準（S）			
S1	S2	S3	S4
跳ね返る回数が同じ事例を見つけながら，簡単な規則性について考えようとする	跳ね返る回数が連続的に変化するところと，連続性が途切れるところに注目して考えようとする	簡単に発見できる規則性とは別にして考えようとする	事例から発見した一般的な法則を言葉や式で表そうとする

L4：見つけた規則性について，自分なりの根拠を導きだし，述べようとする

評価基準（S）		
S1	S2	S3
これまでに表現されたものや活動，もとの問題場面など振り返ることで，具体的な事例から発見した規則性が成り立つ根拠について考えようとする	図に表してきた玉の動き方の記述の方法を単純化し，見やすくするための別の記述法を考えようとする	新たに表現された図の中に，縦横の長さと跳ね返る回数との関係を見出し，規則性についての根拠を述べようとする

にわたる授業全体を「話題」に基づいて構造化し，８つの「話題」を特定した。本研究における「話題」というのは，一連の授業全体を１つの問題解決の過程として捉えたときに，その過程をいくつかの下位の問題解決の過程へと分け，１つの話題が提起され，一応の終結をみるまでの間の教師と生徒たちとの相互作用を単位として，これを「話題」と呼ぶことにする。

話題１：どのように玉は動くのか
話題２：台の大きさとは何を調べることか
話題３：図の書き方について
話題４：規則性を探る
話題５：発見したことや，うまくいかなかったこと
（１）偶奇性に関する規則性
（２）縦＋横－２＝跳ね返る回数
話題６：「縦＋横－２＝跳ね返る回数」が成り立つ条件
話題７：「縦＋横－２＝跳ね返る回数」という式は本当に成り立つのか
話題８：なぜ「縦＋横－２＝跳ね返る回数」という式が成り立つのか

各話題ごとの生徒の活動を数学化の観点から解釈し，その解釈を評価の枠組み（表１）からみたときに，生徒の数学化の実現のために教師がどのように関わっていたのかを中心に分析を行った。なお，本研究の授業研究者と授業実践者は同一であるため，研究者の客観的・分析的視点と，実践者の主観的・反省的視点を区別し，分析を行った。そして，生徒の数学化が促されたかどうかという観点から，８つの話題を次の３つに分類した。

分類①：生徒の数学化が促されたと考えられる話題…話題３，５，６，７
分類②：生徒の数学化が十分に促されなかったと考えられる話題…話題１，２
分類③：生徒の数学化が促されたかどうか判断が付かない話題…話題４，８

分類①に属する話題では，数学化を促すことを実現するためには，どのような評価活動がなされていたのか，分類②に属する話題では，数学化を促すことを妨げていたと考えられる評価活動の要因について考察した。なお，分類③に属する話題では，評価活動により生徒の数学化が促されたかどうかが特定しかねることから，考察の対象から除いた。

4．2．分析と考察

4．2．1．分類①に属する話題

話題３：図の描き方について

ビリヤード台と跳ね返る回数との関係を調べるために，生徒はいくつかの長方形を描いて，玉の跳ね返る回数を調べようとした。その活動において，飯田は，スタートの角度を４５度にしようと思ったが，思うような図が描けなかったことや（図３），打ち出された玉が最後までゴールしなかったことを述べた。どうやって描いたらうまく図が描けるかを教師が全体に問うたところ，宮里が，正方形を利用することで４５度が構成できることを説明した（図４）。

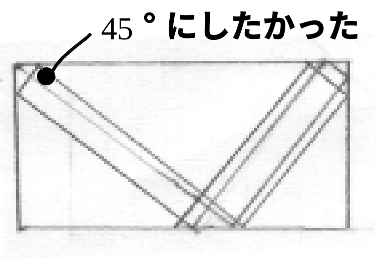


図３　飯田

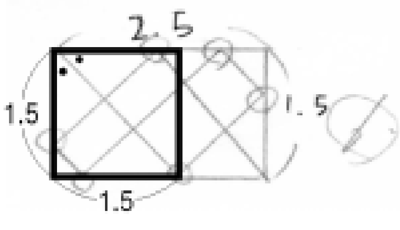


図４　宮里

この場面は，目標となる変量を特定し，直観的な段階では曖昧であった４５度の角度を，より分析的に条件を規定していく場面であり，表１でいえば，L1 の S1 や S3 に属する。実際，４５度を構成することに困難を示している飯田の描き方に対して提示された宮里の考え方について，教師は格子点を結ぶことでどうして４５度が構成されるのかという宮里自身の理想化のプロセスを問うている。

この問いは，問題状況と定式化された図との整合関係について考えようとする数学化を促している発問である。宮里は正方形を利用した描き方であることを説明し，その結果，宮里の描き方の正当性が共有され，他の生徒から罫線の入った用紙の使用が提案されるに至る。これは，問題状況と宮里の図との整合関係を構成するという数学化が進み，結果として，より適切な図を表現するための手段を生徒が選択したと考えられる。教師は，宮里に４５度の構成の方法を問うことで，目標となる変量を特定し，直観的な段階では曖昧であった４５度の角度を，より分析的に条件を規定しており，これは S1 や S3 の評価基準（S）に基づく行為と整合する。

授業者である筆者の立場からすると，この場面は，正確な図が描けなかったり，時間がかかりすぎて多くの事例について調べる活動に移行しないという状況であった。筆者は，表１の S1~S3 で想定してるように，本質的な項目に着目すれば，生徒はそれを問題状況と照らし合わせて容易に図に表現することが可能となり，その結果 L2 の水準に移行するであろうと予想していたが，実際は違っていた。また，活動の初期の段階では，現実の事象から抽象化したモデルを創り出す数学化のプロセスを指導するねらいから，白紙のワークシートを使用したが，一方で，罫線の入った用紙を使用することも念頭に置いていた。しかし,一方的に教師が与えてしまうのでは，現実の事象を抽象化するという生徒の数学化の機会を奪ってしまうことになるので，生徒の考えを取り上げながら，生徒自身がよりよい方法として罫線の入った用紙を選択し，課題解決を進めていけるように計画した。

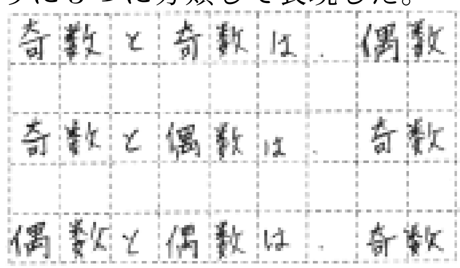
ここから導かれる指導への示唆として，生徒の数学化のプロセスを問うことが，生徒の数学化を促すための手立てとなることが指摘できる。この場面では，宮里の図の描き方のプロセスを問うことにより，そのプロセスがクラスで共有された結果，罫線の入ったワークシートを選択することで，問題状況をより適切に表現していくという生徒の数学化が進んだと考えられる。

話題５：発見したことや，うまくいかなかったこと

次に示す場面は，個人解決によって見出した規則性や，その規則性に当てはまらなかった事例などを取り上げて，より一般的に成り立つ規則性を定式化しようとした場面である。

（1）偶奇性に関する規則性

飯田は，ビリヤード台の大きさと跳ね返る回数との関係を試行錯誤的に調べている状態から，縦・横・跳ね返る回数の偶奇性に焦点を当てて，そこから規則性を見出し，その結果を次のように３つに分類して表現した。



教師が，この規則性は全部に成り立ちそうなのか問うたところ，飯田は〔2·18〕の事例の跳ね返る回数が６回（偶数）になり，「偶数と偶数は奇数」という規則性には当てはまらない反例となることを発見し，成り立たない場合があることを述べた（図５）。

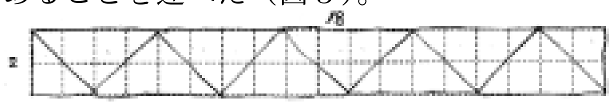


図５　飯田

この反例に対して，宮里が奇数と奇数，奇数と偶数の時は，縦と横の和から引く２をすると回数が求められるが，偶数と偶数の時は別に求め方があると発言した。教師は宮里の発言から,偶数と偶数の事例を取り上げて，斉藤の「長方形が相似形の場合は跳ね返る回数は変わらない（相似形の同値性）」という考えと関連づけた（図６）。〔3·4〕,〔6·8〕,

〔9･12〕の跳ね返る回数が全て５回になることから，縦横の公約数が存在する場合は，公約数で割って最小の図形で考えることが可能であることを導いた。

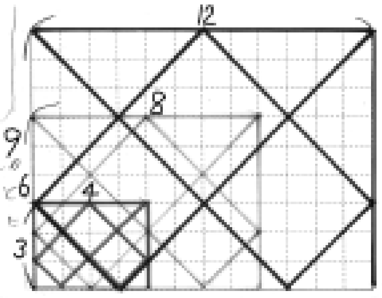


図６　斉藤

この場面は表１でいえば，L3 に属する。そして，教師が飯田に全部に成り立ちそうなのかと問うていることから，「一般的な法則を言葉や式で表そうとしている」という S4 の評価基準（S)で飯田を捉えようとしているが，飯田は，まだ規則性が成り立つかどうかを少数の事例から試行錯誤的に調べている状態なので，S1 の段階であったと考えられる。実際，飯田は，どのような条件でその規則性が成り立つのかについて定式化しようとしているが，予想した規則性に当てはまらない反例〔2･18〕を見つけることで，一般化に至らないという状況である。しかし，数学化の観点からみると一般化に至っていない状況ではあるが，「単純化して考える」という方法をどのような時に，どのようにして用いるのかについて教師が指導している場面と見ることができる。この場面で，教師は生徒たちの様々なアイディアを関連づけながら，生徒たちの数学化のプロセスを発展させるための指導を実現していると考えられる。具体的には，斉藤の発見した相似形の同値性を取り上げて，飯田の反例と関連づけることで，公約数で割って単純化すれば，飯田の発見した規則性に当てはまることを導いている。

授業者である筆者の立場からすると，飯田を取り上げた理由は２つあった。１つは，飯田の調べ方である。飯田は縦横を偶数と奇数という観点で分類し，跳ね返る回数の偶奇性について調べていた。このようにある観点に従って事例をあげることで，規則性を調べるという方法を評価するねらいから飯田を取り上げた。このような評価をするために参照していたのは表１の L2-S2 である。ただし，表１には，「一方を固定する」という観点だけが示されていたが，授業実践を通して様々な観点で調べる生徒の姿が見られた。２つ目の理由は，飯田が規則性に当てはまらない反例を見つけていたということである。飯田は，規則性が成り立つ確証を得るためにいくつかの事例を調べていく過程で，それまでとは大きさの違う事例について調べたところ，予想に反する反例を見つけてしまう。このような発見は，規則性をより一般的に定式化するプロセスへ移行する際に発見しうるものである。この飯田の反例を考察の対象として，辺の比をもっとも簡単な形にすることや，割って考えるという方法を斉藤の相似形の同値性に関するアイデアから導いて，それらで飯田の反例を見ることを促した。

ここから導かれる指導への示唆として，評価の枠組みは絶対的あるいは固定的なものというよりも，もっと柔軟なものとして参照すべきものであるということである。教師は，生徒が数学を進めていく理想的な段階を想定して評価の枠組みを設定する。これは，その評価の枠組み通りに授業が展開すれば，最短で解決に向かうはずの道筋である。しかし，実際の授業では，教師の期待通りに授業が展開することはまれである。この場面でも見られるように，定式化されている相似形の同値性に関するアイデアで，まだ定式化されていない飯田の反例を見るように促している行為は，S4 から S1 へ向かっている。このことは，生徒の数学化が必ずしも線形的には進まないという Treffers(1987)の漸進的数学化の様相と整合する。従って，そのような生徒の数学化のプロセスを見取るための評価の枠組みは，必然的に授業実践における生徒たちの反応に応じて変化したり，状況に応じて循環的

に活用されることが求められ，そのようなものとして参照することで，授業で役に立つ評価の枠組みになると考えられる。

（2）縦＋横－2＝跳ね返る回数

小島と宮里は，いくつかの事例から「縦＋横－2＝跳ね返る回数」という規則性を発見していたが，小島は〔9・12〕のように，この規則性に当てはまらない事例があることを発見していた。宮里は，縦横の偶奇性により場合分けすることで，この式が成り立つ条件を，次のように定式化しようとしていた。

○「奇数と奇数が偶数」のときは成り立つ。

○「奇数と偶数が奇数」

〔3・8〕は成り立つが，小島の〔9・12〕は9も12も3で割れるから，そういうときは成り立たない。

○「偶数と偶数は奇数」

縦＋横から4を引いて，その後2で割ると跳ね返る回数がでる。ただし，縦横が共に2より大きい数（例えば3, 4, 7）で割れるときは成り立たない。

小島・宮里の考えや話題5⑴の飯田・斉藤が関連づけられて，縦横の公約数で割って考えれば成り立つことが宮里から提案された。

この場面は表1でいえば，L3 に属する。教師が，小島に発見したことについて問うたり，宮里に成り立つ条件などをを問うていることから，評価基準（S)の S1 や S4 の段階であると考えられる。数学化のプロセスの観点からみると，この場面で問題になっていたことは,「縦＋横－2＝跳ね返る回数」という式が成り立つ場合と成り立たない場合があって，どのように定式化していけばよいのかということである。教師は小島を指名し，調べた事例について問うことで，この問題を全体で共有することを試みている。次にこの問題に少し進んでアプローチしている生徒（宮里）の考え方を取り上げることで，この問題の解決の糸口を見出していくことを促そうとしている。宮里の考え方は，縦横の数の偶奇性に着目し，その観点から「縦＋横－2＝跳ね返る回数」という式が成り立つ条件の精緻化をしようとするものであった。小島らにとっては，宮里のこの観点が参考になると考えられる。発表した宮里にとっては，教師とのやりとりの中で，飯田の例と関連づけて考えるということが参考になると考えられる。教師は様々な生徒のアイデアを互いに有機的に関連づけることで一人一人の生徒の数学化のプロセスの発展を促そうとしている。その結果，縦横の公約数の有無と，規則性の成り立つ条件との関連が考察の対象となり，公約数で割って考えることが提案されたことから，条件を定式化していくという数学化のプロセスが進展したと考えられる。

授業者である筆者の立場からすると，小島や宮里の発見した「縦＋横－2＝跳ね返る回数」という式は，縦，横，跳ね返る回数の関係を簡潔に表した式であり，この式が発見されることを教師は期待していた。そしてこの式を授業の話題の中心に据えて，成り立つことをクラスで共有し，成り立つ根拠について考えていくことを想定していた。しかし，小島は反例を見つけることで一般化が困難な状況であり，宮里は，成り立つ条件を縦横の偶奇性で分類していた。これらの反応は，教師の期待しているものとは異なるものであった。特に宮里の成り立つ条件は複雑で，これを全面的に取り上げたときに，時間的な制約の問題や他の生徒が混乱するのではないかという判断から,一部分しか取り上げなかった。宮里の考えから取り上げたことは,「割れるときは成り立たない」という宮里の発言である。これは，表1に設定してある「縦横が互いに素である事例」に焦点が当たることを意図したものであった。

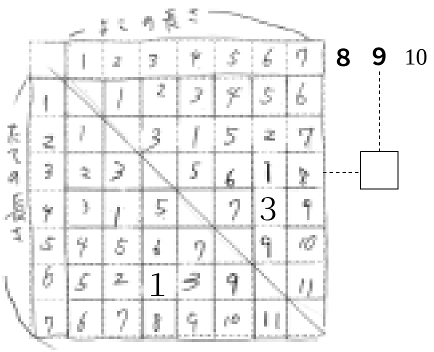
ここから導かれる指導への示唆は，話題5⑴と同様に，評価の枠組みを固定的なものとし見るのではなく，柔軟に見るということ

である。評価の枠組みを柔軟に適用することで，数学化の進み方や方向が異なる生徒同士の相互作用を促し，さらに数学化が発展することが可能になると考えられる。この場面でいうと，L3 の S1 の段階の飯田や小島，S4 の段階の宮里を順番に取り上げ，S1 の立場から S4 の考えを見たり，S4 の立場から S1 を見直したりすることで，それぞれの考え方が関連づけられて，条件を定式化するという数学化のプロセスの発展が促されたと考えられる。

話題６：「縦＋横－２＝跳ね返る回数」が成り立つ条件

この場面は，江藤の表（表２）を手がかりにして，宮里・小島の発見した「縦＋横－２＝跳ね返る回数」という式が成り立つことを定式化しようとしている場面である。生徒とのやりとりの中で，表には書かれていない事例〔3･9〕が斉藤から提示され，教師はそれを取り上げた（表２）。

表２　江藤



ここで，生徒の考え方に葛藤が起こっている。それは，表の中の連続性という観点で見たときと，「縦＋横－２＝跳ね返る回数」という式に当てはめて見たときとでは，回数が異なることに気が付いたからである。この場面で江藤の表は, ２つの重要な役割をしている。１つは，ビリヤードという現象をモデル化した図の中で関係を考察していた活動から，数値の世界で関係を考察する活動に移行することを促す役割である。もう１つの役割は，課題全体の構造を捉えやすくする役割である。この表が提示されなければ，〔3･9〕に対する生徒の葛藤は起きなかったはずである。

授業者である筆者の立場からすると，表１で設定してあるように，表にまとめるという考え方が提案されることは想定していたが，授業における表の扱い方が，計画とは異なっていた。表１の L3-S1~S3 では，表自体を考察の対象として，表の中から特殊な事例をすべて消すことによって，残った事例の特徴から一般的な法則を導き出すことを想定していた。しかし，生徒は，予想していたほど多くの事例について調べていなかったために,「全体から特殊を排除する」という授業の展開は困難であった。そこで，表の中の，縦横に公約数が存在する事例に焦点を当てて，考察する展開となった。

ここから導かれる指導への示唆は，個々の生徒の数学化を複線的に見取り，それらを関連づけることで授業全体の数学化が促されるということである。「縦＋横－２＝跳ね返る回数」という式を定式化するために，飯田，小島，宮里を教師は取り上げてきたが，この場面ではそれら複数の考え方を江藤の表によって共有し，条件の精緻化を促していると考えられる。つまり，個々の生徒の数学化を生かしながら，どのように定式化していけばよいかという数学化のプロセスを，江藤の表によるアプローチによって指導することを実現していると考えられる。具体的には，飯田，小島の発見した反例の，縦横に約数が存在する事例に関連した〔3･9〕を取り上げて，江藤の表と宮里の式で考えることを促している。このようなことが実現できたのは，話題５の分析で示したように，評価の枠組みを循環的に捉えて活用するという要因の他に，異なった数学化の段階を関連づけるように参照することが要因としてあげられる。表１でいえば，飯田，小島は L2-S1 に属し，L2-S4 に属する江藤の表を手立てとして，L3-S4 に属する宮里の式を定式化しようとした。これらの異なった数学化の段階の関連をつけることで，条件を定式化していくという数学化が促

されたと考えられる。

話題７：「縦＋横－２＝跳ね返る回数」という式は本当に成り立つのか

教師は，「縦＋横－２＝跳ね返る回数」が本当に成り立つかどうかを確かめるために，〔20･31〕,〔18･30〕の２つの事例を提示し，計算で求めた後，実際に図を描いて確かめるよう促した。〔20･31〕の事例のついて，計算の結果と図に描いて調べた結果が一致したことを確認した。〔18･30〕の事例については，塚越が〔3･5〕の図を描いて調べることを提案した。

この場面は,「縦＋横－２＝跳ね返る回数」という式が本当に成り立つという確信を得るために，極端に大きな事例を教師が提示した場面である。表１でいえば，L3 から L4 の間に属する。L3-S4 の定式化された規則性を帰納的に一般化し，確信を強めることで，成り立つ根拠を探る L4 の活動へ移行する段階と考えられる。生徒は，教師から提示された極端に大きい事例の解決のために,「縦＋横－２＝跳ね返る回数」という式を当てはめている。縦横に公約数がある場合にも，その公約数で割って考えれば式が成り立つという理由を述べながら求めている。これは Polya(1954) の指示的接触の段階に当たり，「縦＋横－２＝跳ね返る回数」という式がどんな場合でも成り立ちそうだという確信を得ることが促され，それが実現されている。

授業者である筆者の立場からすると，この場面は次の水準である根拠を考える活動に移行することを意図していた。そのためには，「縦＋横－２＝跳ね返る回数」という式が成り立ちそうだということを，クラス全体で共有する必要があった。極端に大きい事例は，そのための手立てであり，縦横に公約数が存在する事例〔18･30〕と，存在しない事例〔20･31〕を設定した。

ここから導かれる指導への示唆は，水準間の隔たりをつなぐ手立てが必要であるということである。この場面でいうと，生徒は「縦＋横－２＝跳ね返る回数」という式が成り立ちそうだという見通しを持ってはいるが，斉藤や飯田のように，縦横が互いに素ではないときにも適用できるかどうかは確信していないという状態である。この式が成り立つことを確信し，成り立つ条件がはっきり定式化されなければ，どうして成り立つのかという次の水準にはつながらない。特に，式が成り立つ根拠を考えるという論証の段階へ移行する際に,生徒にとっては抵抗があると考えられ，その隔たりを埋めるための手立てが必要であった場面である。表１でいえば，L3-S4 から L4-S1 への隔たりを教師が見取り，極端な大きさの事例を提示するという手立てにより，隔たりを埋めようとしたと考えられる。このようなフィードバックが実現された要因は，生徒の数学化の現状と，期待される次の数学化の段階を，評価の枠組みから的確に評価したことがあげられる。その結果,〔18･30〕と〔3･5〕が同値なものとして扱われていることから，表１の L3 の水準から L4 の水準へと数学化が促されたと考えられる。

4．2．2．**分類②に属する話題**

話題１：どのように玉は動くのか

縦３，横５の長方形で，玉がどのように動くのかという問いに対して，生徒は玉の動き方がわからないという反応を示していた。教師が，問題文からわかることは何かを問うたところ，ビリヤード台の大きさや台の枠の目印の個数，玉が打ち出される場所や角度について言及する発言がなされた。教師の指名により，何人かの生徒が１本ずつ線を付け加えることで図７が構成された。

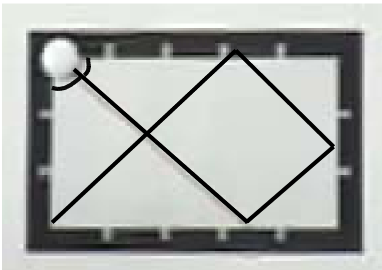


図７

この図に対して，格子点を結ぶことで構成さ

れた正しい図８が斉藤から提示されて，一応の解決をみるが，その図が問題状況をどのように単純化したものなのか，単純化された状況がもとの問題状況を表すものとして適切かどうか考えることがなされなかった。

図８　斉藤

この場面は表１でいえば，問題をはっきり特定していく水準である L1 の場面に属する。特に，玉の動きを単純化して本質的な要素だけを残して抽象する，S1 や S3 の段階に属する。この段階を生徒が発展させるための教師の発問もなされており，問題文の中にある，本質的な要素に目を向けようとすることは実現されている。実際，玉の動き方がわからないという生徒の発言を受けて，教師は問題からわかることは何かを問うことで課題の把握を促すことを試みている。その発問に対して，生徒から台の枠に印されている目印の数や，打ち出す角度に関する発言が返ってくるが，最終的に完成した図７は玉の動きを表す図にはなっていない。生徒は玉が打ち出される位置とか，４５度で打ち出すことなどの問題状況はわかっていても，それを分析的に捉えて適切な図に表現することに困難を示しているという状況である。結局，この状況は，玉の動きを適切に表している斉藤の図８が示されたことで，一応の解決をみる。しかし，数学化のプロセス，つまり数学の授業を過程としてみると，ここに断絶があることがわかる。というのも，斉藤の図の提示は，困難を示している生徒の問題点を改善された結果として出されたのではないからである。むしろ，この図だけが正しい結果として提示されている。言い換えれば，数学を結果としてではなく，プロセスとして授業において実現するのであれば，問題状況を単純化したり，単純化された状況がもとの問題状況を表すものとして適切かどうかを考えようとすることがここでの焦点となるべきであった。

なぜ，このような結果にしまったのか，授業者である筆者の立場から考察する。この場面は授業計画の段階であまり意識していなかった場面である。生徒がビリヤード台の枠につけた目印を使わなかったことは予想外であった。この目印は，個人解決に移行したときに，格子点の図を描いて考えていくことを意図してつけたものである。生徒からこの目印についての発言があったので，目印を結ぶことで玉の動きを表すことを期待したが，生徒はそうはしなかった。筆者の課題解決の思考過程ではほとんど無意識にモデル化して図に表現していたことが，生徒の活動を評価することを妨げていたと考えられる。

ここから導かれる指導への示唆としては，授業の計画段階で，授業者自らが課題を解決する際の思考過程を，より意識化して授業に臨むことがあげられる。しかし，この場面は授業者である筆者自身があまり意識することなく解決を進めた場面であり，現実にはこのような無意識の部分は残ると考えられる。生徒を想定した評価の枠組みを整備することは重要なことであるが，この場面のように，枠組みで想定されていた考えだけを取り上げて（図８），想定されていなかった考えが授業の中で切り捨てられたのであれば（図７），生徒の数学化を促すことは実現されないであろう。藤田(1999)は，生徒の問題解決プロセスを，教師の目標から評価するのではなく，生徒の立場に立った視点から評価することで，生徒の主体的な問題解決行動が促されることを指摘している。藤田(1999)の指摘は，本研究の評価の枠組みを導く，本質的な数学化の理解と一致するものである。生徒の数学化のプロセスを促す立場から評価するのであれば，評価の枠組みとして想定していたか否

かというように，評価の枠組みに固執した評価ではなく，その考えがどうして提案されたのか，どういう考えにもとづいているのかというプロセスを取り上げて，生徒がその考えに対する正当性を評価していくことが求められると考える。そのために，評価の枠組みを柔軟に参照し，生徒の反応を評価することが重要であると考えられる。

話題２：台の大きさとは何を調べることか

ビリヤード台の大きさと跳ね返る回数との関係を調べるために，台の大きさを特定する具体的な項目は何かと教師が問うたところ，「縦」，「横」の他に，教師の想定していない「面積」という項目が生徒から提案された。「面積」という項目が，跳ね返る回数に関係しているかどうかの議論がないままに考察の対象から徐々に排除された場面である。

この場面は，表１でいえば，台の大きさに直接関係する変量について考えることが示されている L1 の S1,S2 に属する。ここでは「本質的な変量を特定」することや，「解決に必要な目標変量を取捨選択する」という基準が，表１に明確に位置づけられているにもかかわらず，生徒から出された「面積」という項目に対して，これが適用されていない。実際，教師は台の大きさと跳ね返る回数との関係について調べるために，台の大きさとは具体的に何を調べることなのかを問うている。この発問は本質的な項目に目を向けることで，問題状況を数学的に捉えていくことを促している発問と考えられる。塚越から「縦」と「横」の長さを調べて「面積」を求めることが提案されて，生徒は，「縦，横，面積，跳ね返る回数」について調べていく。ところが，次の時間では，「面積」という項目について取り上げられていない。「面積」が跳ね返る回数との規則性に関係しているかどうかの議論がないまま，考察の対象から排除されている。つまり，問題解決において必要な本質的項目なのかどうかを特定していくという，数学化のプロセスが省略されている。

授業者である筆者の立場からすると，この場面で提案された「面積」という項目は想定外の反応であり，課題解決に直接関係しないものと判断していた。生徒にこの「面積」という項目について考えるべきかどうかを問うが，必要か否かの判断基準が明確になっていないことから，生徒には判断が付かないということを，生徒の反応から捉えていた。しかし，教師から一方的に不要なものとして扱わないことにすることもできず，結果的に，「面積」という項目を最初は取り上げるものの，徐々に考察の対象から除いていくことになった。

ここから導かれる指導への示唆として，教師の想定外の反応が生徒から出されたときに，教師はそれを即時的に教師の想定内の事項へと修正しようとする意思決定が働くということである。そのような意思決定が起こる原因は，話題１と同様に，生徒の反応を評価の枠組みに当てはめて，固定的に捉えようとすることにあると考えられる。教師の目標から見れば，問題解決に直接関係ない考察も，生徒の立場に立てば，その考察によって問題解決が進むかどうかはその時点ではわからないことである。しかし，仮に問題解決に直結しない考察であっても，「この方法ではうまくいかない」という新たな情報が加わることによって，生徒にとっての解決が進んだと捉えることができる（藤田，1999）。生徒の考えが，どのような考え方から出てきたのか，議論の場を設定し，「面積」という項目が問題解決をしていく上で必要かどうかの評価を，生徒に委ねる教師の柔軟性が必要であると考えられる。

5. 本研究のまとめと今後の課題

考察の結果として，明らかになったことは主に次の３点である。

①生徒の数学化を促すことを実現していた要因として，評価の枠組みを固定的に捉える

のではなく，柔軟なものとして適用していること

②評価の枠組みを，固定的かつ絶対的なものとして捉えていたことが，想定外の生徒の反応を教師の想定した目標に即時的に近づける指導へとつながり，その教授行為が生徒の数学化の発展を妨げていたこと

③授業者自らが課題を解決し，その思考過程を内省することを通して構築された評価の観点は，即時的で総合的なフィードバックが求められる授業中の評価活動において，有効に機能するということ

①，②は，生徒の数学化のプロセスを促す教師の評価活動に関係するものである。このことは，吉崎(1991)が述べているように，総合的な要因が関係して教師の評価活動が行われることや，教師の評価の枠組みと実際の生徒の反応との相互作用による意思決定が，教師の教授行動を規定するという見解を例証している。

③は，生徒の数学化のプロセスを評価するための，評価の枠組みの構築方法に関係するものである。話題１や話題２のように，筆者自身が問題を解いたときに，あまり意識せずに解決が進んでしまった段階というのは，評価の枠組みにはっきり位置づけられているにもかかわらず，実際の授業場面では，生徒の活動は適切に評価されていなかった。授業場面で生徒の活動を評価するために，評価の枠組みを適用することは必要なことであるが，一方で，授業者が実際に問題を解いてみて，評価の枠組みを作るという，その作成のプロセス自体が重要であることを，③は示している。

この３点から導かれる指導への示唆は，生徒の数学化のプロセスを促す評価を実現するために，教師の具体的な数学的体験に裏打ちされた評価の枠組みが必要であり，線形的に構成された評価の枠組みを線形的にみるのではなく，状況によっては循環的なものとしてみることが必要であるということである。そういう評価の枠組みの見方は，数学化のプロセスの発展の仕方と整合する見方でもあり，授業に対する重要な示唆として指摘できるものである。

本研究の示唆に基づき，評価の枠組みを再構成し，その枠組みの有効性について検証することや，他の課題についても実践を行い，結論を検討することが今後の課題である。

【引用･参考文献】

H.Freudenthal.(1968).Why to teach Mathematics so as to be useful/Educational Studies in Mathematics,pp. pp.3-8.

Treffers,A.(1987).Three Dimensions - A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction-The Wiskobas Project/D.Reidel.Pub.Com,pp.

礒田正美.(1984).数学化の見地からの創造的な学習過程の構成に関する一考察－ H.Freudenthal の研究をふまえて－，筑波数学教育研究，*3*，pp.60-71.

礒田正美.(1985).数学教育における数学化に関する一考察－数学化の概念規定を巡って－，第 18 回数学教育論文発表会論文集，pp.73-76.

礒田正美.（1990).数学化の立場からの学習指導に関する事例的研究－分割数（number of partitions）の授業分析－，日本数学教育学会誌，*72*(9)，pp.340-350.

黒澤俊二.(2000).なぜ「算数的活動」なのか－『数学的な考え方』を育てる実践の一般化を目指して．東洋館出版.

内田洋一.(1989).数学的な考え方の評価－問題解決における数学化の過程について－，日本数学教育学会誌，*71*(3)，pp.2-10.

吉崎静夫.(1991).教師の意思決定と授業研究．ぎょうせい.

小林敬一.(2002).授業に内在化している評価過程の共同構成，静岡大学教育学部研究報告（人文・社会学篇），*52*，pp.279-292.

Polya,G.(1954).帰納と類比；数学における発見はいかになされるか１（島垣和三雄訳）．丸善.

藤田尚徳.(1999).数学的問題解決における生徒の情報の生成を促す指導に関する基礎的研究，上越数学教育研究，*14*，pp.85-98.