

数学的活動を通した数学概念の構成の研究

星野正樹

上越教育大学大学院修士課程 1 年

1 はじめに

中学校の数学の授業では、結果重視、例えばテストの点が悪かったとか、計算が早くできるなどの面から評価していることが多かった。それらの結果だけを追う授業から学習過程を重視する授業への変容が求められて久しいが、評価の段階になるとやはり、結果を重視してしまう傾向が強い。

しかし、多様化する社会への対応や、情報の選択など、既存の価値では測ることのできない現況の中で生きていくためには、すでにある知識を暗記する、あるいはマニュアルをこなすだけでは不十分である。自分で問題を解決する、すなわち数学でいえば未知の問題に挑戦し、自分なりの解決法を見つけ出そうする意欲と考え方を育てる教育へとさらに大きく転換を図る必要がある。平成 10 年発行文部省指導要領では「数学的活動」が重視されているが、これは「自ら学び、自ら考える」力の育成を主眼としているためである。以前から「数学的活動」という言葉は使われていたが、ここであらためて強調されていることに注目したい。

数学教育の目的について Bruner(1978)はすでに「教師としてのわれわれの目的は、わが生徒たちに、教科内容について

できるかぎり直観把握を与えること、そして彼をできるかぎり自主的なまた自力で推進しうる思考者—すなわち、正規の学校教育が終わった後も自分でやっていけるような思考者—ならしめることである。」と述べており、自ら思考することの習慣と意欲、方法を会得することを重視している。

筆者は、教科の内容はもちろん重要であるが、それ以上に数学を学習する意欲、考え方などがより重視されなければならないと考える。なぜなら、前述のように多様化する社会に対応するために、膨大な情報を全て教えることや、情報を判断することなしに有益に受けとめることは不可能であるからである。そしてこのような数学教育の目的を達成するために「数学的活動」は「主体的に追求する力」を育成する場としてさらに研究する必要があると考えた。

そこで本研究の目的は数学的活動をどのように行うことで子どもの数学概念の構成が促進されるかを探ることとした。

2 筆者の問題意識について

筆者の問題意識の根元は、関心・意欲・態度や数学的思考方を見取りや評価、そしてそれに伴う支援のあり方である。

知識は定量的な測定によって計測することが比較的容易であるが、前述の見取りは内的な活動が多くなるため難しい。しかしこの内的な活動が数学学習の本質であり目的であることを考えたとき、その育成を何らかの方法で達成することを考えなくてはならない。このような指摘は以前からなされているが実現できているとは言い難い現状がある。

この問題を解決するためには自ら数学の本質をとらえる、または作り出す経験をし、その力を高める必要がある。教師がただ知識を伝達したり、結果や形式だけを教え込む授業であったりするだけでは子どもが心的に数学概念を構成するには不十分である。子どもが自分で見たり操作したりすること、念頭にイメージを作り出す、自分なりの言葉や記号で表し、操作を行うなど、自分の体験として数学的活動を行うことが真に数学を自分のものにするといえるのではないだろうか。

Dienes(1977a)は「数学的思考ではパターン化こそがまさに本質であり、一度作られたパターンは、すぐに数学の対象と見なされさらに大きなパターンの中に位置づけられることの繰り返しである」と述べている。これを筆者は、パターンを構造と見ると構造化された知識から未知の知識を構造化することができる、と読み解きたい。つまり、構造化された知識は単なる知識ではなく、次へ生きて働く力になるということである。

例えば、

「 $3 + 5 = 8$ 」と「 $8 = 3 + 5$ 」が等式という構造で等質であることを子どもが心的に構成することによって、文字式、特に方程式などに容易に応用できるようになるだろう。このように構造化された

知識は、子どもにとっての新たな知識を作り出す源泉になると考える。筆者はこの構造化を質的な学習の大きなポイントととらえている。構造化は教師から教えられて作られるものではなく、子ども自身が活動の中から作り上げていくものである。数学の知識の構造化を促進する活動を行うことによって、関心・意欲・態度、数学的な考え方を育成していきたい。

後述の Dienes の研究は現代化の推進に大きな役割を果たした。現代化は数学の構造そのものを扱うことや早い段階での高度な数学概念を扱うことなどから、問題点が多かった。しかし、数学の構造を会得させるという考えは現在求められている本質に迫るものであり、内容は異なるかもしれないが、数学的活動と一致するところが大きい。したがって、筆者は Dienes(1977a)の数学化における活動の過程の研究をもとに、数学的活動を考察したいと考えた。その中でも Dienes(1977a)は「構成的な面に比重のかかった課題と、分析的な面に比重がかかった課題のいずれかを選択しなければならないときには、前者の方が適切であることはほぼ確実」と述べ、子どもが概念を構成する課題を重要と考えていることがわかる。また「ある場面を厳密に判断する分析的な方法はずっと成熟した思考方法であり」と述べている。

以上のことから、本研究では分析的な活動より構成的な活動を中心に研究、考察を行う。数学的活動ではその表象を見取らなければならない。したがって表象を分析する視点が必要である。その視点を後述の Bruner と Dienes の研究に求める。

3 先行研究の概観

3.1 数学的活動

「活動」という言葉から思い浮かぶのは目に見える活動である。例えば具体物を操作する、文章や式に書く、議論をするなどである。しかし、「活動」には目に見える「外的な活動」と目には見えない「内的な活動」がある。内的な活動は、念頭操作を行ったり、活動を振り返ったりする重要な活動である。最終的に知識を構成するのは「内的な活動」である。

「数学的活動の定義」について能田(1983)は「学校数学、主に小学校の算数と中学校の数学に関連した思考活動を総称してよぶことにする。したがって、ここでの『数学的活動』に含まれるものは具体物からの概念形成、概念間の関係判断と関係推理、あるいは、数学の問題や内容の理解と解決、さらに数学的活動による表現や処理から数学の問題に応用したりするなどの諸活動を総称するものである。」と述べている。

また、大谷(2002)は「〔動機・目的〕現実の問題を、数学的な視点から意味付けること。すなわち現実世界における未解決の状況に対して条件や仮説を設定し、簡潔で御しやすい数学の問題としてモデル化し、数学の理論や合理的攻略法を駆使して処理を進め、得られた数学的結果を吟味することによって問題の本質を見定めつつ、より一般性・発展性のある理論図式や教訓を得ようとする。」と述べている。

平成11年9月文部省発行、中学校学習指導要領解説－数学編－では数学的活動を大きく、ア)計算処理や図形の具体操作など客観的に観察が可能な活動、イ)類推したり、振り返って考えたりするな

どの内面的な活動、と2つに分けている。そしてそれぞれが独立しているのではなく、中学校段階では知的充足の高まりはア)とイ)の相互的かつ循環的な活動に依存すると述べている。

「数学的活動」の重要性について、根本(1999)は「数学の学習内容は抽象度が高く、たとえ平易な言葉での説明であっても、また説明された言葉をそのまま記憶したとしても、そこに内包する概念を真にとらえ、自らの知識としていくことはたやすいことではない。すなわち、それは、一方から他方へ手渡しできるようなものではないのである。数学の学習は教えられるところがあるとしても、その多くは自ら学び自ら考えて理解するしかないのである。数学的活動というとき求められるのは、まさに『自ら学び、自ら考えて』わかろうとする態度である。」と述べている。つまり、「数学的活動」は、「自ら学ぶ意欲」「数学的な考え方」を育てるために有効であることが示されている。

清水(1996)は「算数には様々なよさが内包されている。様々なよさは、それらから、子供たちに働きかけることはできない。そこには、まずもって教師の仲介が必要であり、子供からの主体的な働きかけが必要となる。したがって、教師による算数のよさの的確な把握とそれらと子供たちの出会いの演出が重要な課題となろう。そして、算数のよさを明らかにし、それを生かそうとする子供の主体的な働きかけを引き出し、奨励する必要がある。」と述べている。

能田と大谷の述べているところは、具体的事象から数学的一般化までを目指しているという点でほぼ同じことを意味し

ていると考える。能田は課題へのアプローチの複線化や解の複数化を目指すオープンな活動を、大谷は現実からの数学化をめざし、さらに現実問題に還元するという活動を中心に考えている。

「数学的活動」には清水(1996)が述べているように数学を学ぶ「よさ」が内包されている。「よさ」について平成元年7月文部省発行中学校指導書数学編では『『数学的な見方や考え方のよさを知り』というところに注意したい。この表現における『よさを知り』は答申にある『数理的な考察・処理の簡潔さ、明瞭さ、的確さなどのよさが分かるように』なるということで、生徒の、認知的な面よりも情意的な面に特に配慮すべきことを述べているのである。つまり、生徒が、学習を通して数理的に考察することのよさや楽しさが分かり、自ら進んで、数学的な見方や考え方ができるようになることを期待しているのである。』と述べている。

筆者は前述したように情意的な面の伸長を願っているが、この「よさ」を体験することが大きな一助になると考えている。その面からも能動的に課題にアプローチを行う「数学的活動」は重要であると考える。さらに、「数学的活動」の場面として、具体的な活動から数学化を行い、さらにその数学概念をそのものを発展的にとらえることが、数学概念の構造化や追求の意欲の持続に効果的であると考えている。現在求められている数学的活動では、具体的な活動、すなわち外的な活動が多く見られるが、外的な活動が内的な活動を活発化し、最終的に内的な活動に帰着するとすれば、外的な活動は内的な活動を見取り支援する手段と手がかりと見ることもできる。また「数学的活動」

を行うにあたり、能田(1983)のいう「関係判断、関係推理」が「構造化」と対応し、「数学的活動による表現」が「内的な活動」を「外的な活動」から見取ること、ととらえると、「数学的活動」をよりの確に考察できるのではないかと考える。また、やみくもな「活動」ではなく、大谷(2002)が述べるように、一定の解決への見通しをもったものを「数学的活動」ととらえたい。以上のことから筆者は「数学的活動」を次のように定義する。

【数学的活動の定義】

・中学校の数学に関連し、問題を解決するために見通しをもった操作活動、及び思考活動を総称する。「数学的活動」に含まれるものは具体物からの数学化の段階を通じた概念形成、概念間の一般化、表現や処理、数学の問題に応用したりするなどの諸活動である。

3.2 認知過程の考察

3.2.1 Bruner.Jの先行研究の考察

Bruner(1969)は範疇化について序論で次のように述べている。「範疇化することは、はっきりと異なる事物を等価物となす事、われわれの周囲の事物となすこと、われわれの周囲の事物、出来事、人々をクラスに群化すること、そしてそれらに対してそれらの独自性よりもむしろそれらのクラスの構成要素の見地から応答することである。」これは例えば、「いす」にはいろいろな形状や色の物があるが「いす」としての特徴をもっている物をわれわれは一括して「いす」と認識するということである。範疇化の利点の1つは、心理的な負担の軽減をもたらす。

「いす」を例にあげると、1つ1つの異なった「いす」を学習しなくても、それ

らを「いす」として認識し、利用することができるということである。概念も同様である。また、範疇化することによってそれらを活用するという道具的側面もある。

心理的な負担を軽減し、さらにそれらを利用することができるのであれば、人は物事を範疇化しようとする傾向があると考えて良いのではないかと考える。つまり、数学の概念を形成する際、抽象化が行われ一般化されるが、これは強制されて起こるものではなく、自然に起きる情動であると考えることができる。しかし、ただ教材を与えるだけで数学の概念が形成されるわけではない。適度な困難さとその教材に対する必要感あるいは興味・関心が必要であろう。困難さがなければ、心理的な負担を軽減する必要は生じないし、必要感や興味がなければ活動は表面的になる。これらをクリアするために大切なことは興味ある、適度な困難さを伴った教材の開発が不可欠である。

次に Bruner(1968)は認知の成長をその表象からとらえる研究を行っている。その発達過程を EIS 原理として理論化した。これは動作的(enactive)、映像的(iconic)、象徴的(symbolic)の順に表象手段を獲得していくというものである。そして「成人ではそれらの3つが相互的に作用しながら存続している・・・」と述べている。つまり、表象の手段は獲得される順序はあるが、前のものが消えるわけではなく、相互作用を行いながら次の概念獲得に働くということである。また、動作的、映像的な表象手段も新しい概念を獲得する過程では重要な思考手段となる。後に述べる Dienes(1977b)もこの表象のあり方を学習過程の分析に用いてい

る。また、Bruner(1968)は子どもの言語と経験について研究し、言語、つまり象徴的な表象は範疇性と階層性をもって成長し、体制化していくが、経験は体制化されていないと述べている。これは言語による表現はできても実感をともなった心的な概念の構成ができているとは限らないということである。したがってここからも、数学学習において具体的な活動が経験として必要となる根拠が得られる。

Bruner(1978)の有名な仮説として「どの教科でも、発達のどの段階でも、どんな子どもにも何らかの知的に率直な形式で、有効に、教えられうるはずである。」がある。これは数学の現代化運動の際の有力な根拠となり、集合やベクトルなどの考え方が小学校や中学校で扱われるようになった。数学の構造を表象の手段を工夫して学習させるものであり、その実験として後述する Dienes(1977b)の研究がある。数学の構造そのものを扱うため、やや難しすぎたことや、用いられた教具から構造を抽象化するときには捨象されるべきノイズが多いということから、現在の授業でその内容をそのまま扱うことは難しい。しかし、動作的、映像的、象徴的という表象手段を有効に活動に生かすことによって現在の内容にも適合する方策が考えられる。

また Bruner(1999)は「『意味』は個人内に止まらず、文化的に形成されたものである。人間が共有し生活しているものである。したがって人が認知するということには、その文化的背景を考察しなければならない」と述べている。これは人が「意味」を見いだしていくときに文化的な背景の中で構成していくということ

ようとする態度が表れることに当たる。これは抽象化による一般化や表象のあり方に大きな示唆を与えるものである。そのような場面を設定することが教師の大きな役割であると考え。また文化的なアプローチを考えたとき、個々人の物語だけで完結するのではなく、文化として確立されたもの、数学でいえば一般的に用いられる表記や記号などとの相互作用により、共有化された知識となる。これには教師の役割が大きく関わってくると考える。なお「物語」という語は訳者によれば「narrative」の訳で、「語る行為」を示す。しかし、本文中では書かれたものも含まれている。

3.2.2 Dienes.Z.Pの先行研究の考察

Dienes (1977b) の実験を中心に考察する。

Dienes の教授実験の対象は6才から8才までである。活動は遊びとして無目的に積み木をいじるなどの操作から始まる。それらは数学的活動とはまだ言うことができない。しかし、それらの遊びから何らかのパターンを見いだしたり、類を形成する過程を繰り返し、教師による意図的な助言が加わることで、数学の概念が構成されていく。子どもによってその構成過程は異なり、図1で示されるようにサイクル状に活動を行き来しながら概念を獲得していく。(図1参照)

Dienes は実験観察により、子どもの概念構成活動を図1にまとめ、素朴な遊びや概念から、類を開閉することにより、より高次の概念を獲得すると述べている。具体的な実験のプロトコルからは教師は意図的な助言や質問はするが、概念の構成は、あくまで子ども自身が行うものであり、その過程はそれぞれ異なっている

ことが示されている。しかし、多くの子どもがベクトルや累乗、対数などの概念を、数学の記号を使うまでにはいかなくとも獲得するまでに至っている。類の開閉とは数学的な一般化の過程である。例えば自然数の集合から正の有理数の集合へ拡張する場合を考える。これは算数で一般的に行われているものである。自然数の集合は乗法に関しては群ではない。0をのぞく有理数の集合まで拡張することによって乗法に関しては群となる。しかし子どもは、群を作るために有理数を学び始めるのではない。最初は「長さを測定する」という現実の事象から正の有理数の必要性を感じ、長さという実測を一般的な単位というイメージに置き換え、さらに計算の法則について正の有理数にも拡張できるかどうかを学習するのである。そしてその過程を振り返り、その計算規則が妥当かどうかを検討する。これは自然数から整数へ、整数から有理数へ概念を拡張するときも同様である。Bruner (1968) の EIS 原理がここで応用されている。「類の開閉」について Dienes (1977b) は「特殊化→一般化→特殊化→一般化→・・・」と表している。この繰り返しが数学概念をより高次に構成させていくのである。また、類の開閉について Dienes (1977b) は抽象、具体化、一般化、特殊化(または制限)、記号化、解釈、形式的を図2にまとめている。

中学校の教材で図2を考えると、例として1次関数が上げられる。小学校で学んだ「比例」は中学校1年生で形式化される。この場合比例定数が正の具体例を考える。これをタイプIとする。タイプIIは負の比例定数をもつ具体例を考える。タイプIの一般化として例えば $y=2x$

があたえられ、タイプⅠからの一般化 $G(x)$ になる。タイプⅡの一般化として $y = -2x$ のような式が考えられる。さらに、タイプⅠから $y = ax + b$ ($a \geq 0$)、タイプⅡからは $y = ax + b$ ($a < 0$) が一般化される。そして一次関数 $y = ax + b$ が一般化されるのである。その過程で図1のサイクルが行われるのである。

外界の探索の場面では、様々な具体的事象が用いられる。比例関係のある現実の事象、水槽に一定量の割合で水を入れていく、ミカンの個数と代金などの場面が考えられる。想像力の場面では時間や水面の高さ、個数、代金などの代理表現として数列や表を用いて表し、ゲームの場面では一定量増えていくとか、時間と水面の高さが一定の割合になっているなどのルールを発見していく。このようなサイクルを繰り返し、数学概念を構造化する。この類の開閉は Bruner(1968)の範疇化と階層化を理論背景としている。一般化が範疇化に当たり、階層化が構造化に当たる。様々な事象から性質を抽象し、一般化することは 3.2.1 で考察したように、子どもに自然に起きる考えの流れである。その流れをゲームという形で Dienes(1977b)は教授実験を行った。そして具体的操作を行うことによって表象だけでなく心的に概念を階層化、つまり構造化を促そうと試みた。

Dienes(1977a)は数学学習の原理を4つあげている。1 力動性の原理、2 構成性の原理、3 数学的多様性の原理、4 知覚的多様性の原理（または多様な具体化の原理）である。1は活動、2は構成が分析に先立つこと、3は様々な変数を含む課題が望ましいこと、4は同じ構造をもつ異なった事象を与えることである。そ

して子どもがその事例を抽象化し、概念を拡張していく過程を経験することが大切だと考える。また、Dienes(1977a)は数学化の過程の段階を、①自由遊び②ゲーム③共通性の探求④表象・表現⑤記号化⑥形式化、の順で起きると述べている。そのサイクルが次第に拡張され、より大きな概念形成につながっていく。

筆者はこれまでの考察の中で「一般化」と「記号化」に特に注目したい。「一般化」は個人内の概念の構成に関わり、その構成の方法へのアプローチが Dienes(1977b)によって示されている。「記号化」はその個人の構成された概念を文化的な構成物であり、他とのコミュニケーションを容易にする「記号」と結びつけることにより、より発展的な数学概念へのアプローチを可能にするからである。そして特に「記号化」では子どもと文化の間にある教師による仲介の役割が大きいと考える。

一般化について、能田(1979)は、「発展的見方、考え方とは既存の事柄に含まれる法則や規則をより広い範囲の対象まで及ぶよう条件をゆるめる心の働きとする。言い換えれば今まで成り立っていた特殊な性質を包括してより広い一般的な性質でもって、考察の対象を新しい生命をもった組織体につくり変え、新しい価値あるものを創造する心の作用であるとする。」「統合的考察とは既習の学習内容があって、それらのある高い、あるいは広い観点から見ることによって、それらの内容をみな同じと見なし、1つにまとめてみる心の働きである。言い換えると、すでにいくつかの特殊な事例があって、それらを今までと違う観点から見ることによって、一つの新しい生命、つまり組

織体を創造する心の働きである。」と述べ、定義している。そして数学的対象に当てはめると、発展は「特殊化」、統合は「一般化」であると述べている。つまり、今までの法則が成り立ってきた体系を包括する形のゆるめた条件の中での事例を考え（発展）、その事例を含んだ統一的な概念を形成していく（統合）のである。

中島(1982)は「統合的発展的～を2つの観点が並列したと見るよりも、統合といったことによる発展的～と見る方が望ましい。」と述べている。つまり「統合」は数学概念を「発展」する方向を定める1つの観点としてみるのである。したがって中島は「統合」以外にも発展の方向性として「簡潔」「明確」などの観点もあげている。しかし、「統合というのは、数学に特有な考えではなく、広く科学的な見方・考え方の基盤にある重要な考えでもある。」「・・・科学においても、また、数学においても、人間が追求しようとする価値観であり願望である。」と述べているように、数学を学習する上できわめて重要であると考えている。つまり、「統合」を1つの手段にとらえ、その手段によって一般化や拡張を行うのである。また「統合」の種類として「集合によるもの」「拡張によるもの」「補完によるもの」の3つをあげている。

能田は一般的な「一般化」「特殊化」の概念を、中島は「概念の一般化や拡張の手段」を中心に述べているが、両氏とも特殊化（はじめは具体的事例）を出発点とし、既存の概念と照らし合わせて抽象化することによって概念の拡張が行われると述べていると筆者は考える。これは Dienes(1977b)の主張と合致するところ

が大きい。ところで個人の概念が「一般化」されるとき、あるいはされたとき、その概念を作り出す過程で、あるいは概念を確認したり伝えたりする場合、他の子どもとのコミュニケーション、すでに学んだ数学の知識（文化）とのコミュニケーションが行われると考えられる。これは前述の「記号化」と深くつながっている。なぜならその子どもだけが理解できる表象ではコミュニケーションは不可能だからである。そこでこの「記号化」をどのように導入するかが課題になる。以下の仮想プロトコルで考察したい。

4 仮想プロトコル

課題「B4の紙を用いて変化の様子を調べよう」中学校3年生を想定

（生徒の名前は仮名）

<学習の流れ>

・B4の用紙を用意する。

教師：「普段よく使うこの紙はB4という名前が付いています。」

教師：「4という数にはどんな意味があるか知っているかな？」

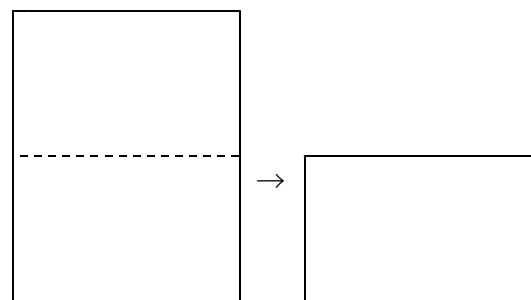
佐藤：何かが4つある？

木村：4番目？

田中：わかんない。

教師：①「4というのは『4回折って切った』ということです。」

教師：実演する。



教師：「こんなふうに折って切るんですね。」

教師：「これはBいくつといえいいの
かな？」

佐藤：①B5！

教師：「そうですね。もう一回折ると？」

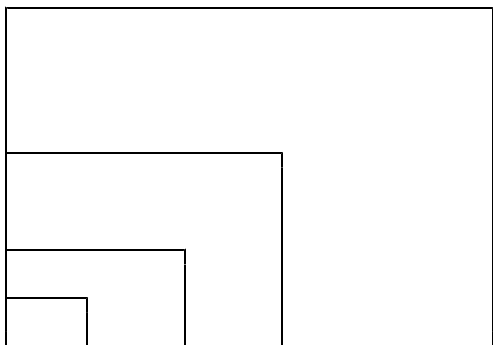
木村：②B6！

教師：「今日は、みなさんに、できるか
ぎりたくさんB判を作ってもら
いたいと思います。丁寧に作っ
てね。」

生徒：折っては切り、折っては切りを繰
り返す。

生徒：③B10判まではすぐに作れる。

教師：「それではその紙を、角をそろえ
て並べてみてください。」



教師：「形について何か気がつくことが
ありますか。」

田中：だんだん小さくなる。

佐藤：④形が同じだ。

木村：⑤小さくなり方が違うみたいだ。

生徒：そうだそうだ。

教師：②「この紙は縦に半分に折っても
形が変わらないように作られて
いるのです。」

教師：「それでは小さくなるなりかたを
調べてみましょう。」

教師：「どんな調べ方をしたらいいか
な？」

生徒：長さを測ってみる。

田中：どっちの長さを測るの？

佐藤：どっちでもいいんじゃない？

木村：どっちか決めた方がいいよ。

佐藤：短い方が測りやすいな。

木村：⑥じゃあ縦の方を測ろうよ。

教師：「まずB4とB6を測ってしまし
ょう。」

田中：直接プリントに紙を当てる。（長
さを直接測れるプリントを配布し
てある。）

佐藤、木村：定規で測ってグラフに記入
する。

教師：「B5の縦の長さを予想してごら
ん。」

佐藤：簡単だ。その真ん中になるよ。だ
って半分になるんだから。

木村：確かめようよ。

田中：あれ、違うぞ。

佐藤：切り方を間違えたんじゃない？

木村：でもみんなのも違っているよ。

田中：他のものも測ってみようよ。

教師：「測るだけじゃなくて、ちゃんと
記録してね。」

田中、佐藤：直接プリントに紙を当てる。

木村：定規で測ってグラフに記入する。

木村：表を作る。

教師：「どんな変わりがたをしている？」

田中：うーん難しいなあ。

佐藤：まっすぐにならないよ。（グラフ
を見て。）

木村：⑦でも半分になっているところ
があるよ。

佐藤：えっ、どこどこ？

木村：B4とB6はちょうど半分になっ
ているような気がしない？

佐藤：本当だ、他のところもそう？

田中：B5とB7は？

木村：そうになっているよ。

教師：「B0の大きさを求めてしまし
ょう。」

生徒：それぞれの追求活動を始める。

教師：「B 0 の大きさは B 4 の何倍になっているかな？」

佐藤：2 倍の 2 倍だから・・・。

木村：4 倍？

教師：③「大きさの変わり方を式に表してみよう。」

木村：⑧紙の構造に目を向ける。

分析の概要

教師①紙の操作の約束を共有化する。

教師②紙の構造の規則性を伝える。

教師③記号化を促す。

生徒①②ルールを理解する。

生徒③操作活動を行う。ルールより正しいことを確信する。

生徒④イメージによる紙の形のとらえ。

生徒⑤イメージによる紙の大きさの変化のとらえ。

生徒⑥他の生徒と追求するための共通な基盤の構成。

生徒⑦イメージによる発見と、ルールへのつながり。

生徒⑧紙の構造そのものへの一般化。

以上のことから次のことが考えられる。

- ・具体的な操作活動は目に見える形でイメージ化を促進する。
- ・変化のイメージから一般化への方向付けがなされる。
- ・他の生徒との共通の基盤を構成しようとする意識が働く。
- ・なぜそうなるのか根元的なルールへの方向付けがなされる。

しかし、記号化そのものには教師の助言が必要であることが考えられる。教師③の助言なしに、紙の構造そのものに意識が向くか疑問である。また、教師②はその伏線になっている。さらに教師③は暗にこれまで学習してきた記号を用いて表してみようという促しを行っている。

つまり「一般化」までは子どもの活動で可能であるが、「記号化」は教師が文化との仲介者となって、橋渡しをすることが必要なのではないかと考えられる。さらに知識を構造化するときには、分析的な思考が働かなくてはならないが、妥当な構造化を進めるには教師によるモニターが効果的であると考ええる。

5 Dienesモデル(1977a,1977b)の考察

仮想プロトコルより数学化の過程について考察する。

①自由遊び

Dienes の研究の対象者が 6 才から 8 才ということから、教具に慣れるまで、ある程度の時間が必要であったと考えられる。しかし、中学生ではすでに様々な数学概念を獲得してきていること、教具についても豊富な経験を積んできていることなどを考えると自由遊びからのスタートは難しいと考える。仮想プロトコルで用いた課題は、すでになじみのある B 4 の紙を使っており、手操作への慣れは不要である。

②ゲーム

無目的的な手操作からの構造の抽出を期待することは、時間の限られている現場では実施することが困難である。したがって、ある程度目的をもったゲームを与えることが学習活動を円滑に進めると考える。ゲームというよりも課題という形で提示することが前提であると考えられる。しかし、この課題は生徒が構造を見だし、さらに拡張していくことができるものである必要がある。仮想プロトコルで用いた課題は仮のものであり、どのような課題が望ましいかは今後の検討事項である。

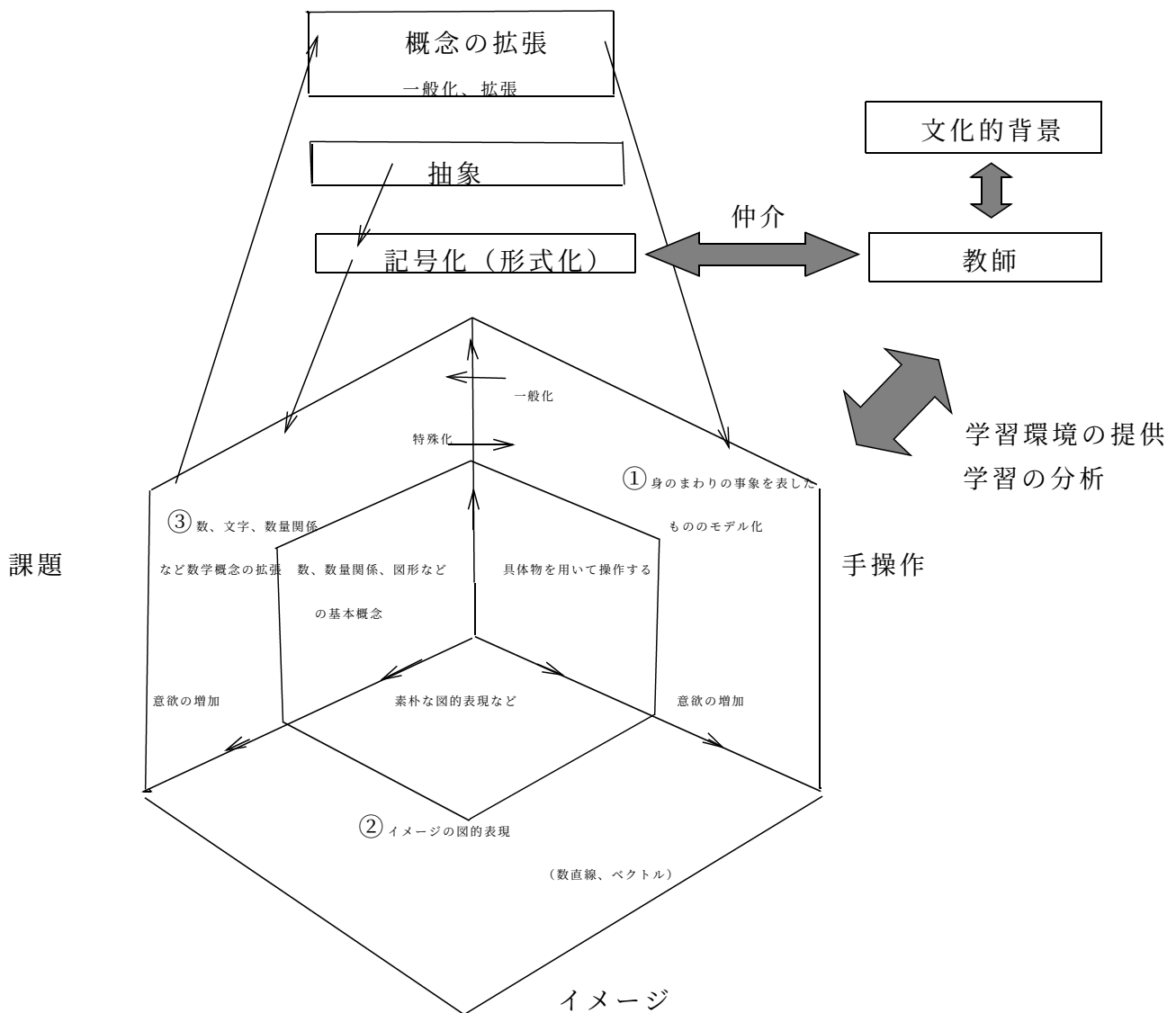


図3 修正モデル

③ 共通性の追求

抽象化による共通性の追求は数学的活動の本質である。したがって、中学生でも中心的な学習となる。中学生では抽象化による一般化ということができる。生徒⑦の発言はその共通性に気づくところから、問題解決の糸口を見つけた場面である。

④ 表象・表現

③の追求の過程と他の生徒や教師と情報交換をするときの表象は異なる。前者では Bruner のいう、動作的、映像的、象徴的な表象が混在するが、後者では象徴的な表象が中心となる。これは Bruner に

よれば、象徴的 (symbolic) な表象は他とのコミュニケーションのために用いられるからである。生徒⑥の発言は「縦」という言葉を用いて、概念を共有しようとしていると考えられる。

⑤ 記号化

自分なりの的確な表現方法を模索するだけでなく、Bruner (1968) のいう範疇化を心的に構成することととらえる。生徒⑧での生徒の考察対象の変化は紙の大きさの変化を紙の構造からとらえようとする場面である。教師の助言により、視覚表現だけではなく、一般的な性質を式という記号で表せるのではないかという考

え方が生じている。

⑥形式化

他との共有知識として正当性を分析・確認し、道具的に扱えるように形式を整えることととらえる。Dienes(1977a)は「記述されたことの間に順序性が確立される。基本的性質から出発し、他の性質に到達するための規則を見つける。」と述べている。これは、すでに正しいと証明されている定理から次の定理を証明するなど、性質間の関係を構造化する事、能田(1983)のいう「関係判断、関係推理」に当たる。しかし、見通しをもって複数の概念を構造化することが全ての生徒にとって容易であるとは限らない。これはDienes(1977a)がいうようにより成熟した分析的思考が必要だからである。したがって教師の支援が重要である。

以上のことから数学化の過程を次のようにとらえ直す。

「①手操作による追求②課題の把握と追求③一般化の追求④表象・表現⑤記号化：教師の支援⑥形式化：教師の支援」

次に、記号化について考察する。Bruner(1999)が述べているように、記号化は既成の文化との相互作用である。したがって子どもと文化の間に何らかの仲介が必要である。その仲介者としての役割が教師にはある。しかしDienes(1977a)は教師の介入の必要性について記述しているものの、活動モデルにはその点にふれていない。特に中学校では「記号化」は、次の構成された数学概念を構造化する「形式化」を促進する。4で考察したように、そこには教師の関与は不可欠である。したがって、その部分を修正したモデルが望ましいと考える。

以上のことから、図1のモデルを図3

のように修正する。

図3の①は「行動的な表現」、②は「映像的な表現」、③は「記号的、形式的表現」である。また内側の六角形が「一次的」、外側の六角形が「二次的」である。この修正は、主に教師が子どもの概念構成に、どのポイントで、どのように関わるかを示したものである。自ら概念構成を十分に可能にする場面を設定すること、その過程を的確に観察して判断する手段をもつこと、数学概念の共有あるいは伝達手段の共有に導くこと、そして概念を構造化することへの支援など教師の視点からの修正を試みた。しかし、教師は生徒と数学の間の仲介者としてだけではなく、生徒といっしょに数学を創り出す当事者である方が望ましい。教師が生徒の思考過程とともに活動していくことを意識した修正図である。

6 研究の成果と今後の課題

これまで述べてきた考察は研究の途上であり、不備な点が多々ある。研究の方向性に沿ってさらに見直し、基本的な構想を練り上げる必要がある。

数少ない研究の成果としてあげられるものに、数学的活動が子どもに起きるためにどのようなことが必要かという示唆を得たことがある。Bruner、Dienesの先行研究を基盤に、数学学習に生かす研究をさらに進めていきたいと考える。

今後の研究の課題としては大きく分けて次の3つがあげられる。1つ目は数学的活動を通した数学化の構成過程の理論をさらに精緻にすること、2つ目は実際の検証授業の計画を立て、望ましい評価のあり方を探ること、3つ目は修正を試みたモデルが今後の授業に有効に機能

するかどうか検証することである。

子どもの数学概念の獲得過程を探ることは、適切な評価と支援を行う際に欠かせないものである。

このモデルの研究を通してその示唆を得たいと考えている。

【引用文献】

Bruner.J(1984)教育の過程第24版.

鈴木祥蔵、佐藤三郎訳(初版 1963).

岩波書店

Bruner.J(1969)思考の研究.

平光昭久訳. 明治図書

Bruner.J(1968)認識能力の成長上.

岡本夏木他訳. 明治図書

Bruner.J(1978)認識の心理学下

平光昭久訳. 明治図書

Bruner.J(1999)意味の復権

フォークサイコロジに向けて.

岡本夏木、仲渡一美、吉村啓子訳.

ミネルヴァ書房

Dienes.Z.P(1977a)ディーンズ選集1

算数・数学の創造的学習.

吉田耕作 赤堀也 監修 片桐重男訳.

新数社

Dienes.Z.P(1977b)ディーンズ選集5

算数・数学学習の実験的研究.

吉田耕作 赤堀也 監修 沢村昂一訳.

新数社

能田伸彦(1983)算数・数学科

オープンアプローチによる指導の研究

ー授業の構成と評価ー.

東洋館出版社

能田伸彦(1979)算数・数学科

授業の設計と実際

ー評価を中心にした科学的方法ー.

東洋館出版社

中島健三(1982)算数・数学教育と数学

的な考え方

その進展のための考察第2版.

金子書房

根本博(1999)中学校数学科

数学的活動と反省的経験

数学を学ぶことの楽しさを実現する.

東洋館出版社

清水静海(1996)学ぶ意欲を育てる算数

授業の創造.

明治図書

大谷実(2002)学校数学の一斉授業に

おける数学的活動の社会的構成.

風間書房