上越数学教育研究, 第 19 号, 上越教育大学数学教室, 2004 年, pp.73-84.

数直線を用いた小数倍の意味理解の様相に関する一考察

－UnitizingとNormingを視点として－

市　川　　啓
上越教育大学大学院修士課程１年

１．はじめに

整数÷整数＝小数となる割すすみを伴う除法の場面における小数倍の学習は、割合の見方が顕在化する最初の場面であると考える。しかし、一般的な指導では、小数倍を形式的に求めることができても、整数倍から拡張された小数倍の意味が理解できないことが起こりうる。（市川ら 2001）同様の指摘を、藤井（2001）もしている。

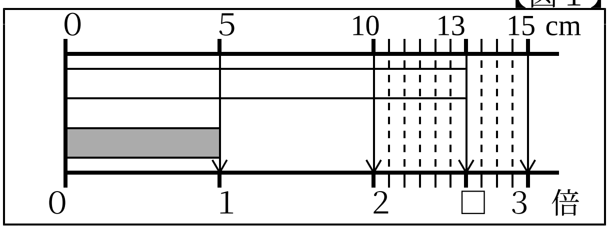
であるから筆者は、倍を求めるとは基準をもとにして再測定していることを強調し、小数倍の意味を構成することが大切であると考える。割進む計算で小数倍を求めることと、数直線を用いた測定操作とを関連づけることでそれを実現したい。

「数直線を用いた測定操作」について具体的な場面を用いて、説明しよう。「13cm のリボンは５ cm のリボンの何倍ですか」という課題に対し、次のような活動を想定する。

１３÷５＝２あまり４。つまり 13cm のリボンから、５ cm のリボンが２本取れる。残りの３ cm からは５ cm はもうとれない。「基準のいくつ分という倍の意味」を拡張するには、５ cm を１（倍）と見れば 10cm は２（倍）、15cm は３（倍）と見られ、10cm と 15cm の間にある 13cm は、いくつと見られるか、という見方が必要である。

そのとき、13cm が５ cm の何倍にあたるかを表す数は、２倍と３倍の間であるから、まずは２倍と３倍の間を 10 等分する。すると、倍を表す軸には、0.1 倍毎の細かい目盛りができる。それに対応させて、10cm と 15cm の間も 10 等分して細かい目盛りを作る。

【図１】



10cm と 15cm の間の長さは５ cm であるから、10 等分することで作られた新たな１目盛りは、５÷ 10 ＝ 0.5 より、0.5cm を表す。この新たな目盛りで 10cm から 13cm までをはかれば、６目盛り分となる。この１目盛りは 0.5cm を表すと同時に 5cm の 0.1 倍を表すから３ cm 分は 0.6 倍を表している。10cm は 5cm の２倍であることは既にわかっているので、「13cm は５ cm の 2.6 倍と言えばよい」と結論づけられる。

市川（2003b）は、上のようなことを意図した実践を行った際、次のような児童の反応が出たことを示した。「13cm のリボンは５ cm のリボンの何倍か」、という場面で「2.3 倍」と結論づけるのである。このような児童がクラス２７名中、６人いたと報告している。この反応には、小数倍の意味を構成する際のいくつかの認知的問題があらわれていると考える。

そもそも倍が量とは独立した数の系列として存在せず、量と倍とが同じ空間内に混在していたり、基準に満たない大きさを測定する

ときは、半端な部分の長さ（上の例では３ cm）を倍を表す小数部分につけたせばよいと考えてしまったりすることなどが、具体的な問題として挙げられる。

市川（2003 ｂ）は、授業の中で小数倍がどのように意味づけられていったかを問題とし、考察を進めた。意味を構成する過程を精緻に捉えるためには、個人が小数倍の意味をどう構成するかを見ることが必要となった。

本稿では、数直線を用いた小数倍の意味の理解の様相を分析するための視点として、Lamon（1994）の用いている Unitizing と Norming という見方に着目した。この２つの視点から、小数倍の意味理解の様相の分析と考察を行うことを本研究の目的とする。

２．ユニット化とノルム化

2.1 Unitizing・Normingの概念

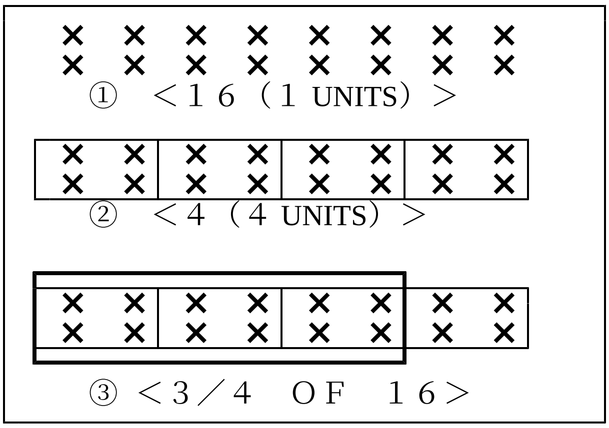
Lamon（1994）は、子どもの比例的推論の研究において、「Unitizing と Norming」という２つの見方を提供している。本研究においては、以下「Unitizing」を「ユニット化」、「Norming」を「ノルム化」と表す。本研究では、ユニット化とノルム化を次のように捉えることにする。

ユニット化とは、１つまたは複数の要素をひとまとまり（ユニット）にすること、もしくはひとまとまり（ユニット）と見ることである。または、複数の要素だけでなく、複数の集合をひとまとまり（ユニット）にする、またはひとまとまり（ユニット）と見ることである。

ノルム化は、ユニット化と対をなす概念で、ユニットによって場面を再構成することである。

Lamon（1994）におけるユニット化とノルム化の具体例を見てみよう。以下は、ユニット化の１つとして挙げられている、「単純な乗法構造（１６の要素の3/4を見つける）」の事例である。

【図２】



①１６個の要素を１６ユニットと見なしてください。１から成るユニットが１６こあります。（16 －１　UNITS）

②ユニットのユニットを考えてください。それぞれが４から成っている４つの合成ユニットです。４から成る４つのユニットがあります。（４－４ UNITS）

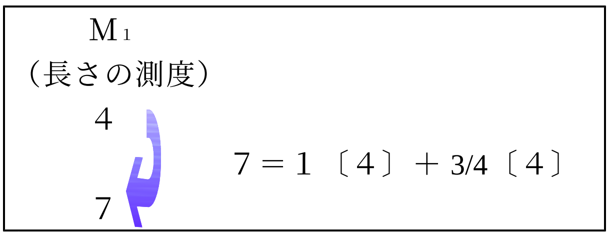
③ユニットのユニットのユニットを考えてください。３つのユニットから成るユニットを考えてください。その３つのユニットというのは、４－４ UNITS が３つということです。

①では、✕をユニットと見れば（１と見れば）、１６ユニットであることを示している。②では、（✕４つ）をユニットと見れば（１と見れば）、それが４ユニットあることを示している。

③では｛(✕４つ）のユニット３つ｝をユニットと見ることを示している。

またノルム化の１つとして挙げられている「単一測度空間内におけるスカラー作用素の測度の変換」の事例（Lamon　1994　p95）を見てみよう。

【図３】



ノルム化の最も単純な例の１つが、測度空間内のスカラーの決定の際に生じる。ある一つの要素は、測度空間内におけるもう一つの要素のスカラー倍である。つまり、それはスカラーオペレーターであり、測度空間の要素の１つに作用して、他の要素を作り、またその逆もある。このプロセスは、スカラー分解のプロセスを用いて、ある測度で、他の測度を再解釈することを伴う。このアイデアは、図２でベルニョーの乗法の関係性を表すスキーマを用いて説明される。

上の場合、「４」がユニット全体（unit whole）として選ばれ、７はまとまった４のユニットと４のユニットの分数部分として記述される。もし仮に7がユニットとして選ばれたら４は 4/7〔７〕である。

2.2　ユニット化とノルム化を用いた分析の可能性

Lamon（1994）は、子どもによる問題解決場面での比例的推論を分析・考察する視点としてユニット化やノルム化を用いている。この２つの見方により、それまでの比例的推論研究で同定された within strategy や between strategy などの比例的推論のストラテジーも説明することができる。

ユニット化とノルム化という見方を用いて分析を行うことにより、次の２点が明確になるはずである。１点目は、「学習者がどの測度空間で考えているのか」を明らかにすることができる。２点目は、１と見ている対象の特定である。これにより、市川（2003 ｂ）で指摘した「倍が量に張り付いた状態」から、徐々に独立した数の系列になっていく過程が精緻に捉えられる可能性がある。また、１と見ている対象を特定していくことにより、基準の交換がどのように行われているのかを、より細かく記述することができる可能性がある。

３．インタビューの分析

ここでは、小数倍の意味理解に関連する話題についての児童のインタビューを、ユニット化とノルム化という見方を用いて分析する。

3.1　インタビューの方法

（１）インタビュー前の質問紙調査

本インタビューは、小数倍の意味を強調した授業実践[駐1]を行ったクラスの中から選ばれた児童７名を対象としたものである。実施時期は、実験授業からおよそ１月半後である。

実験授業後の質問紙調査の反応を参考に、７名のうち、３名は１人ずつ、残り４名は２人をペアにしてインタビューを行った。本稿で取り上げるデータは、２人ペアで行った内の、１組のものである。以降２人それぞれＳ、Ｈと呼ぶ。

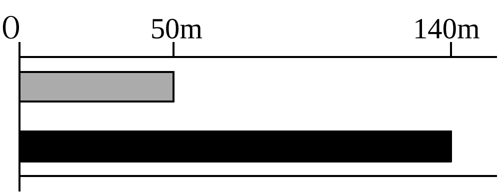
インタビューは、対象の児童に実験授業の数日後に行われた質問紙調査の本人が回答したプリントをその場で見せ、思い出させた上で質問した。その際インタビュアー（筆者）は、聞き役に徹し途中で内容的な指導は行わないことにした。

3.2　質問紙調査の問題内容とその意図

質問の内容は以下の通りである。

$\boxed{1}$
花子さんは 50 m泳げます。
たろう君は 140 m泳げます。
花子さんをもとにすると、太郎君は何倍泳げるといえるでしょうか。

①　計算で求めましょう。
（式 ☐
（答え）☐ 倍
②　①で答えた☐倍でよいわけを、図や言葉などで説明して下さい。



$\boxed{2}$ じろう君は 50 mの 1.3 倍泳げます。

じろう君は何m泳げるでしょうか。この答えを出すのによしこさんは次のように考えました。

５０mの１倍と 0.3 倍をたせばよいから…

（１）　５０mの１倍は□m
（２）　５０mの 0.3 倍は□m
（３）　（２）で考えた５０mの 0.3 倍が□mになるわけを、図と言葉でせつめいしよう。
（４）　５０mの 1.3 倍は、□m

３　あきこさんは、５０mの 0.1 倍を 0.1 mと考えました。

①　あなたは、あきこさんの考えにさんせいですか。はんたいですか。
②　①のように考えたわけを書いてください。

１は、授業で扱った問題場面と同じ場面である。数値に関しては、基準量は同じで、比較量が変えてある。①では、計算を用いて小数倍を求めることができるかを問い、②では、①で求めた倍の意味を数直線等を用いてどのように解釈・説明するのかを見ることを意図している。

２は、未習[註2)]の小数倍に当たる大きさを、小数倍の意味に基づいて求めることができるかを見ることを意図している。

３は、基準が１mでない場合を取り上げ、量と倍を区別できているかを見ることを意図している。

3.3　被験者の特徴

3.3.1　質問紙調査の結果

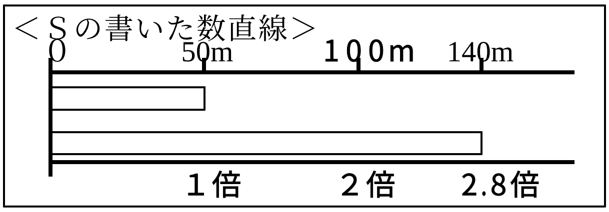
表１は、本稿で分析の対象とする２人の児童の 3.2 の質問紙による調査問題に対する反応をまとめて比較したものである。

【表１】

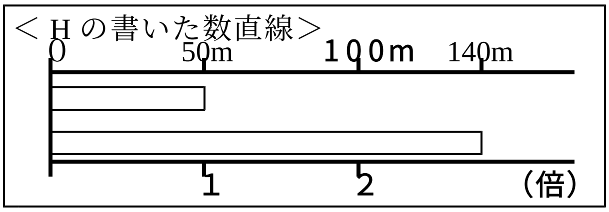
	問題		H	S
1	１４０mは５０mの何倍？	立式	○	○
		答え	○	○
		説明	図4	図5
2	（１）　５０mの１倍		○	○
	（２）　５０mの 0.3 倍		○	○
	（３）　（２）の説明		△	○
	（４）　５０mの 1.3 倍		×	○
3	50m の 0.1 倍を 0.1m と考えました。	①賛成反対	賛	反
		②わけ	×	○

１の説明は、図４、図５のような数直線を用いた説明であった。

【図４】



【図５】



3.3.2　質問紙調査の反応分析と考察

１の結果を見た限りでは、小数倍の意味に対するHとSの理解の様相は、それほど異なっていないようにも解釈され得る。しかし３の結果を見比べたとき、小数倍の意味に関する２人の理解の様相は、決定的に異なっていることは明らかである。実験授業で筆者の意図した「再測定の意味に基づく小数倍の意味」の理解は、「基準量と１倍」「比較量と倍を表す数」の２組の対応を図３のように数直線にのせただけの図では評価できないのである。

3.4　インタビューの概要

インタビューは、概ね質問紙に沿っておよそ５０分かけて行った。便宜的に、調査問題ごとにⅠ部、Ⅱ部、Ⅲ部と分け、更にその中

をいくつかの活動として分け①～⑳の番号をふった。

＜Ⅰ部　2.8 倍の意味を問う＞

① 140 mは 50 mの何倍かを計算で求める。

②数直線の倍の軸のみに着目した 2.8 倍の.8 倍の説明

③量の軸に目盛りをふる操作による 0.8 倍の説明　～数直線の長さを区切る活動～

④ 0.1 倍にあたる大きさ（問題場面における）の説明

⑤量の軸を倍の軸に対応させて説明する。

＜Ⅱ部　小数倍にあたる大きさを求める＞

⑥ 50 mの 1.5 倍にあたる大きさを図から求める

⑦ 50 mの 1.2 倍にあたる大きさを図から求める

⑧ 50 mの 1.3 倍にあたる大きさを図から求める

⑨図を見て 95 mは 50 mの何倍にあたるかを読みとる

⑩ 50 mの 2.3 倍（図中にまだ目盛りのふられていない部分）にあたる大きさを求める。

⑪ 140 mは 50 m何倍かを図から求める（読む）

⑫ 130 mは 50 m何倍かを図から求める（読む）

＜Ⅲ部　50 mの 0.1 倍を 0.1 mとする考えについて議論する＞

⑬立場を明らかにする

⑭考えを図で説明する

⑮ 50 mの 0.1 倍にあたる大きさを計算で説明しようとする

⑯ 50 mの 0.1 倍が５mになることを図に目盛りをふって説明する

⑰ 50 mの 0.1 倍にあたる大きさを求める計算を考える

⑱数直線に目盛りをふる操作と計算とを結びつける。

⑲ 50 mの 0.01 倍にあたる大きさを考える。

⑳基準を変えて、倍にあたる大きさを数直線から考え計算での求め方を帰納する。

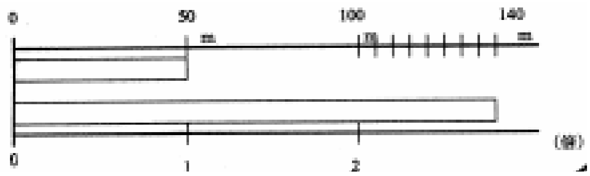
3.5　プロトコールおよび場面の分析・考察

ここでは、インタビューの中のいくつかの部分を取り上げる。そしてHに焦点を当て、小数倍の意味の理解に関する分析・考察を行っていく。

なお、場面番号の後のカッコの中は 3.4 で示したグルーピングを示す。

【場面１（Ⅰ－②)】

Ｈ１：ここが 8 ますうったんだけど、
0.1 倍　0.2 倍いやちがう 2.1，2.2，2.3
やってちょうどうってみたら 0.8 になった
まず、ここまでがこの長さの 2 倍で、ここが 0.8 倍あるからこの 2 つをたして 2.8 倍ってわかった。



＜分析・考察＞

Ｈは、前の場面で 140 ÷ 50 ＝ 2.8 という計算に基づき、140m が 50m の 2.8 倍であると結論づけていた。そして図に基づいて 140 mは 50 mの 2.8 倍であることを説明するため、まず「.8」の説明を試みた。Ｈの発話「ここが（に）８ますうったんだけど」のここは「100m と 140m の間の目盛り」をさす。

「0.1 倍　0.2 倍いやちがう 2.1，2.2，2.3 やってちょうどうってみたら 0.8 になった。」という記述は、0.1 をユニットとして 0.8 を構成したことを意味する。

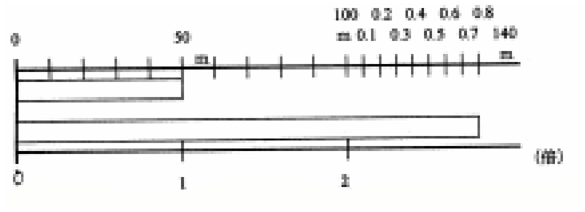
ただし、考えている測度空間は、「倍」であるとは言い切れない。根拠の１つは、数直線に目盛りをふっているが、その場所が量の軸であったこと、もう一つとして、後の場面に量と倍の区別が混乱する場面が出てきたことが挙げられる。

図としての（0.1）のユニットを作るに当

たって、.8 の正当性を主張するために「８ますうった」のであると考えられる。「うってみたら…」という記述から、「８等分」して目盛りの幅を意識的に決めている可能性が低い。

【場面２（Ⅰ－③)】

Ｔ５：今言ってたことは 40 mが 0.8 倍ってことだよね。40 mが 0.8 倍って、どうやってわかったの？
Ｈ８：ここでなんだっけ、定規使ってなんか長さはかって。
Ｓ８：そうそう。
Ｈ９：それでここがちょうど 10 個分あったから、もう一度めもりふって、何個分ってやったの
Ｈ 10：ここ（0 mから 10 m）が 1cm なの ここからここが。ちょうど 1cm だからここまでくれば（0 mから 100 mまで）10cm っていう意味で、ここを目盛りはかって、半分でしょ、0.5 で。何だっけ、1 でわっ…。ここが半分ずつ。



＜分析・考察＞

H10 から、問題場面の 10 mは与えられた図では１ cm になっていることに気づいていたことがわかる。数直線に書き入れた目盛りの幅のとり方は、その「１ cm」を半分にすることによって得られた。つまり細かい目盛りの幅は、（１０mを表す）１ cm を半分にして得られた。

【場面３（Ⅰ－②)】

Ｓ９：5mm だから、
Ｈ 11：ちょっとずれてる。
Ｈ 12：5mm ずつ**増えていってる。**
Ｓ 10：5mm は 0.1 倍。
Ｈ 13：1mm が 0.5 いや 0.1 倍と考えてあれ、えー…
Ｓ 11：5mm じゃないの。
Ｈ 14：あっ、そう。5mm が 0.1 倍と考えて。それでこうやっていくと、ここが、
Ｓ 12・Ｈ 15：0.8 倍。
Ｓ 13：それで全部合わせて 2.8 倍

＜分析・考察＞

場面－２に続く場面である。H12 の「５ mm ずつ増えていっている」から数直線の目盛りの幅の決め方は、明らかに８等分でないことがわかる。５㎜をユニットにしてノルム化を試みているが、その仕方は加法的である。これまで5㎜で「全体」を構成することが意識されていない状態であった、つまり５㎜で１㎝をノルム化していただけであったと結論づけられる。そして、S10 の５ mm と 0.1 倍を関連づける発話を聞き､H はノルム化をやめ、それについて述べようとするが｢１ mm が 0.5 いや 0.1 倍と考えて、あれ、えー…」（H13）と混乱する。H13 では「長さ」に「倍」を対応させようとしているが、それはうまくいっていない。

【場面４（Ⅰ－④)】

Ｔ 11：この（100 mからその先の細かい１目盛りまで）0.1 倍分って何mなの？
H18：100.1m。
H19：え、ちがうちがう2.1。

＜分析・考察＞

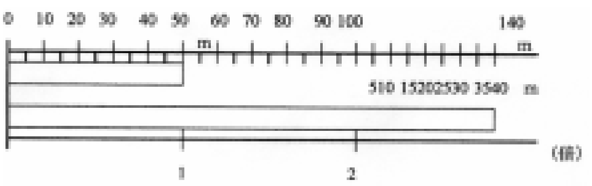
0.1 倍にあたる長さを問われている場面である。H18 と H19 の反応は H の次のような２つの認識の結果を示すと考えられる。１つは、「100m は２である」ということ、そして他の一つは「0.1 倍は 0.1m である」ということである。

ここで、「(50 mの）0.1 倍が 0.1m である」と考える背景に注意を払うべきである。特にここでの研究上の関心は、H の中には「長さの測度空間から独立した倍という測度空間が想定され、(0.1 倍，0.1 m）という誤った composite ユニットを作っているのか、それとも「倍」という「長さ」から独立した測度空間は意識されておらず、「長さ」の測度空間内の１部として倍を捉えているために、上のような間違いが引き起こされているのか、

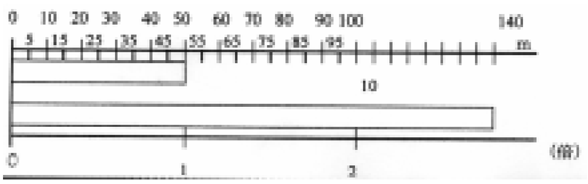
ということである。

【場面５（Ｉ－⑤)】

Ｈ 24：ここからここまで（100m から 140m まで）目盛りが 8 あるって事は…
Ｓ 20：ここからこう行って 140 になればいいんでしょ。だったらここを 5 にしたら。
Ｈ 25：半分にしたらいいんだ、半分なんだから 5 だ
Ｈ 26・Ｓ 22：5，10，15，20，25，30，35，40。



Ｈ 27：ここが 100 だからでここが 40 だから 100 ＋ 40 で 140。
Ｓ 22：本当はね、これがこうなって、5 の目盛りじゃなくて大きい 1 の目盛りちゃんとした 0.1 の目盛りをうたないと。
Ｈ 28：ってこの 10cm の（Ｔ 13：10 ｍ？）10 ｍの目盛りでうってると半分なんでしょ。
Ｓ 23：10 ｍの半分は 5 だから、
Ｈ29：5㎝でしょ（Ｔ14：5m？）1めもりが5m。0.1の位は1目盛りが5m。
Ｓ 24：ここも（0 ｍから 100 ｍの間）細かく言えば 5 ｍ。
Ｔ 15：じゃあ、赤で書いていってよ。
Ｈ 30：ここが 1 倍でしょ（50 の上に 1 を書く)。それでここがまた半分なんだよ。俺書くよ 5 ｍごとの目盛りをふる（略)。100 ｍまでいった後、
Ｈ 31：ほんとはここまでで 10。
Ｓ 25：ここと同じ存在。
Ｈ 32：2 つ分で 10　でいいのかな。これ 2 つ分で 10。だから 10，20，30，40。
Ｓ 26：ここが 5 だからここも 5 でしょ。
Ｈ 33：ちょっといい？　ここもまたは 5 ｍで。ここもまたは 10 ｍ。ここもまたは 15 ｍ…20 ｍ… 25 ｍ… 30 ｍ…、35 ｍ… 40 ｍ。で 40 ｍと 100 ｍをたすとさっきの 140 ｍ



＜分析・考察＞

H24 の「ここからここ（100m から 140m）まで『目盛り』が８個あるから…」は、0.1「倍」というユニットで 100m から 140m をノルム化すると８ユニットであるということを表しているのではなく、100m と 140m の間に「目盛りが８個ある」ことを表しているのである。つまり、「目盛りをユニット」として、40ｍをノルム化しているのである。

S20 により１目盛りが５であることが述べられ、H25 では「10ｍ幅の目盛りをユニット」として、それを半分に分割することで新たなユニット「５（ｍ)」を得ている。

その後 S と H は５をユニットとして、40 をノルム化している（H26・S22)。続けて、細かい１目盛りは、「１０ｍ毎の目盛りの半分」すなわち５ｍという推論を行っている。「細かい１目盛り」の意味づけを、長さの測度空間において、１０ｍをユニットとしてそれを半分に（２等分）して新しいユニット５ｍを作り出している。

H29 では、その推論に基づき「細かい１目盛りは５ｍ」と結論づけた上で、「『0.1 の位』は１目盛りが５ｍ」とまとめていた。

H29 の言う「0.1 の位」とは、何を意味するのだろうか。「細かい目盛り」は 2.8 倍の「.8」に関する議論の文脈からでてきた目盛りであることを考えると、0.1（倍）の世界（位）では量として５ｍを表すと意味づけているのであろう。

このとき H にとって、「１（倍）の世界」すなわち「１の位」の１目盛りはどのように認識されているのであろうか。数学的に正しい「１（倍）の位では 50 ｍを１目盛り」となっていないのではないか。これまでの細かい目盛りの意味づけとその根拠から、そのように考える論拠を以下に示す。

＜.8を意味づけるための細かい目盛り＞

.8（倍）の意味付けとして細かい８目盛りを作った。

↓　つまり

細かい１目盛りは、0.1 の位の目盛り

である

結びつけ

＜１０m毎の目盛りを半分にしたら、うまくできた細かい目盛り＞

１０m毎の目盛りを半分にすると、細かい目盛りとぴったり一意する。

↓

細かい１目盛りは、１０÷２＝５m

この段階では 2.8 倍の「.8 倍」は長さの空間とはっきり分離できていない。整数（で表される長さ）では測定できないので、0.1 の位で（細かい目盛りで）測定しているというような認識が働いているものと考えられる。

そもそも、0.1 倍で１倍がノルム化されていないし、５mで 50m がノルム化されていない。つまり、「長さ」の測度空間においても、「倍」の測度空間においても、細かい目盛りが、「50m」や「１倍」をもとにして作られていない。この点が重要である。

【場面６（Ⅰ－⑤)】

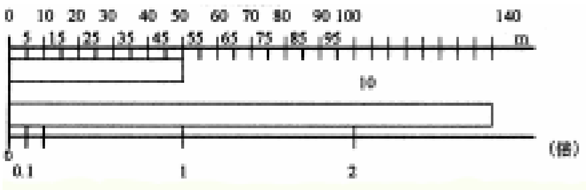
Ｔ 16：じゃあ、5 の下に 0.1 とかって書いてくれる。
Ｔ 17：じゃあ、10 の下は？
Ｓ 28：0.2 でしょ。
H34：ちがう0.1でしょ。0.
Ｓ 29：え、0.2 でしょ。
Ｈ 35：0.2 か。
Ｔ 18：10 のしたは 0.2。
Ｈ 36：え、あ。ちょっと待って。ちょっと待って
Ｈ 37：10 の下は 0.2 ？いいんだ。
S30：0.2　0.4　0.6　0.8　ってふえていくと、
H38：ここにくればちょうど1になればいいのか

＜分析・考察＞

場面５を受けて、Ｔは「５の下に 0.1 とかって書いてくれる」という依頼し、「10 の下は」と問うた。S28 が「0.2」と答えているにもかかわらず H34 は「ちがう 0.1 でしょ」と述べている。H は 10（m）に対応するのが、0.1 なのか 0.2 なのかわかっていない。

S30 は 0.2（倍）をユニットとして、１倍をにノルム化しようとしている。H38 は、ここで０．なにがしかのユニットで１をノルム化するというアイデアを得る。しかし、H38 の「ここにくれば…」の「ここ」は指で「数直線の 100（m）」のところを指している。この時点で H は「50 mを基にするとは、50 mを１（倍）と見るのであって、100m を１と見ることではない」ということが認識されていない。

【場面７（Ⅰ－⑤)】



Ｓ 31：それでここが 1 になる。
Ｈ 39：これが繰り返されて。
Ｓ 32：0.1 ってなっていって、
Ｈ 40：これが同じで、2 になる。この 1 って言うのは、1 倍の 1。ここも 1 倍だから、1 倍っていうのが入っているから 1 ＋ 1 で 2 倍。
　ここからここまでが 2 倍。ここもどんどん目盛りを打っていくと 8 になる。
Ｓ 33：0.8 になる
Ｈ 41：そうそう、1 までいけない。
Ｓ 34：1 までいけないで半端になって 0.8 になる
Ｔ 19：0.8 何？
H42：0.8m。
Ｔ 20：0.8 m。
H43：m、m。
Ｓ 35：え、0.8・・
Ｈ 44：倍だ倍だ倍だ。0.8 倍。

＜分析・考察＞

S31 によって数直線の 50m のところが１であることが示され、H38 の１の場所がまちがっていることが H に明らかになる。これは H40 の発話によってそれが裏付けられる。

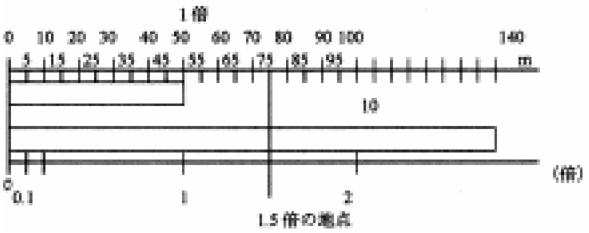
H40 により、１とは、「１『倍』」を意味することが明確にされる。２倍は、「ここも１倍だから、１倍っていうのが入っているから１＋１で２倍」という発話から、１倍をユニ

ットとして２倍を加法的にノルム化している。

しかし、その先の「0.8 倍」に関しては、「目盛りを打っていくと８になる」という発話から、「細かい目盛りをユニット」として、８目盛りをノルム化している。目盛りという可視的なユニットを用いた「過渡的な空間」でのノルム化であったことは、T19 の問いに対する H42 と H43 の反応から裏付けられる。

【場面８（Ⅱ－⑥)】

Ｔ 20：50 ｍの 1.5 倍は何ｍか、この図でいってくれる？
Ｓ 37：50 ｍの 1.5 倍？
Ｈ 45：ちょっと待って、図で考えると、ここが 1 倍で 1　2　3　4　5
（1 倍から先 5 目盛り数えて縦に線を引く）
Ｈ 46：ここが 1.5 倍。
Ｓ 38：ここが 1.5 倍の地点で、
Ｈ 47：ここが市川先生が言っていた 1.5 倍の地点



Ｔ 21：1.5 倍の地点は何ｍ？
Ｓ 39：これが半分で 55。
Ｈ 48：え、あっそうか。55 ｍ。
Ｓ 40：55 ｍ。
Ｔ 22：55 ｍ。
Ｈ 49：はい。
Ｓ 41：あれ 55 か？
Ｈ 50：まてよ、100 ｍで、
Ｓ 42：ここが 50 ｍでしょ。いいんだ。
Ｈ 51：55 でいいんだ。
Ｔ 23：55。
Ｈ 52：55 ｍ。　（図に書き込む）
Ｓ 43：55 かな？待って、25 かも。
Ｈ 53：何で？
Ｓ 44：だって 50 と 50 の半分は 25 じゃん。半分の地点にきてるんだから、75 ｍ。
Ｈ 54：1 倍してるから 50 までいったってことで
Ｓ 45：だから、55　60　65　70　75（目盛りと対応させながら）
Ｈ 55：75。75 倍
Ｓ 46：75 ｍ
Ｈ56：あっそうか、俺達もうだしてあるんだ。もう何ｍってだしてあるんだから（図示しながら）ここは75m。
Ｓ 47：50 ｍの半分だから 50 ÷ 2 で、それで 75 ｍになる。1.5 倍は。

＜分析・考察＞

H45 では、「細かい目盛りをユニット」として、「.5 倍」をノルム化している。

S39 の発話にをきっかけに、50m の 1.5 倍に当たる大きさは 55m であると S も H も結論づける。（S39 ～ H52）

しかし、S43 により「25 かも」という新たな結論が提示され S44 では 50 をユニットとしてそれを半分に分割するアイデアが出される。この「半分」にする根拠は、「半分の地点」であり、言い換えれば、数直線の目盛りとして「1.5」の地点は１と２のちょうど真ん中の目盛りであるといえる。一種の「数直線上のノルム化」とも言える。

S44 や S47 を見るとＳは 50 をユニットとして、その２等分という方法で 75m を生み出しているが、この推論に対する H の反応は今ひとつである。S に同調する発話はない。S は S45 で説明の方法を変えているし、Ｓ 47 は、Ｓが自分で納得する様な話しぶりになっている。

Ｓ 45 では H に対し、５をユニットとして、目盛りと対応づけながら累加していく方法で 75 を構成してみせている。つまり、５と１目盛りを composite ユニットにして、75 および５目盛りをノルム化している。その結果、H56 で今導かれた結果が既に自分達によって作り出されていたことに気づくのである。

そして、「0.1 倍増えると５ｍ増える」という性質を見出したと考えられる。言い換えれば、（0.1 倍，５ｍ）が composite ユニットになり、累加的にノルム化できるようになった。このことは、この場面に続く場面９でも例証できる。

【場面９（Ⅱ－⑩)】

Ｔ 27：50 ｍの 2.3 倍（図の中にまだ目盛りがふられていない部分にあたる問題）は、何ｍ？
Ｈ 62：ここを越してる、あれ？
Ｓ 52：いいんだよ。ここで 2 だから（図示しながら）。
H63・S53：5 ，10，15。
Ｈ 64・Ｓ 54：115。

【場面１０（Ⅱ－⑩）】

Ｔ 29：130 ｍは（５０ｍの何倍）？
H67：（図を見ながら）130mはここ。
Ｓ 56：何倍か。
Ｈ 68：何倍か。
H69：ここ（140m）が2.8でしょ。
Ｓ 57：2.6。倍
H70：2.7，2.6　　2.6倍

＜分析・考察＞

場面８の考察と合わせて、140m、2.8 倍から（５m，0.1 倍）を composite ユニットにして累減でノルム化を行っていると、とらえられる。

【場面１１（Ⅲ－⑬）】

Ｔ 30：もう一枚のプリントで、秋子さんは 50 ｍの 0.1 倍を 0.1 ｍと考えました。
H71：こっちちょっと自信ない。でも今ならわかるかもしれない。
（過去にやった事後調査の自分のプリントを見る）
H72：あれ。これ反対だ。（自分のやったプリントには賛成と書いてある）
あれ、これちげーや。
H73：全然ちがうや。これ全部×だ。
Ｔ 31：じゃあ赤ペンで書いてみて。
Ｈ 74：こっち反対。

＜分析・考察＞

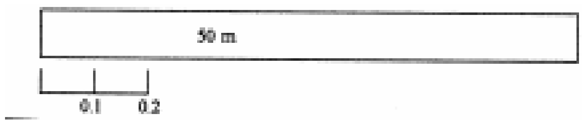
H71 で「50 ｍの 0.1 倍は 0.1 ｍか」の問いに対し、「ちょっと自信がない」と述べている。H にとって、これは小数倍の学習ですっきりしなかった内容にちがいない。しかし「でも、今ならわかるかもしれない」と言う発話から、このインタビューを通して、理解が変容したことを本人としても自覚していることがわかる。

その後、自分のプリントを見て H72・H73 と発話が続く。ここでは、迷うことなく「全然ちがっていたこと」を述べ、結論を修正（H74）している。

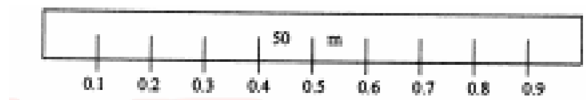
少なくても、50m を基準にして倍を求めている問題場面においては、H は 50 ｍの 0.1 倍と 0.1m が異なっていると自信をもって結論づけられる状態にある。

【場面１２（Ⅲ－⑯）】

Ｓ 73：例えば、適当にやるけど、ここからここが 0.1 でしょ、ここが 0.2（図に書き込みながら）



Ｈ 92：かして、定規でやった方がいいよ。でたらめにかいちゃうからから。
（下記のように目盛りを書き入れる）



Ｓ 74：ここは、零点 10 だから 1 倍
Ｈ 93：0.じゅうってわけは、
Ｓ 75：0.じゅうてことは、1 だから、ここは 1 倍 それでちゃんとした 50 ｍになる。
Ｈ 94：今の問題は、50 ｍの 0.1 倍って事だから、ここだから（図示）

＜分析・考察＞

H92 では 50m に見立てた帯を 10 等分して目盛りをふる活動が見られる。10 等分して 0.1 のユニットを作り、（１目盛り，0.1）という composite ユニットで図の上で１倍（帯全体）をノルム化している。H92 の発話からは、初めからそうなるように書いていることがわかる。

つまり、行為の現象としては帯を 10 等分しているが、その前提には、最初に「あるユニット」を想定し、念頭でその 10 個分をノルム化し、得られた結果の長さの帯を書いていると推察される。

４．全体としての考察

3.5 では、それぞれの場面毎に分析・考察

を行ってきた。本セクションでは、全体を通した分析・考察行いたい。

H 自身もそう感じていたように、一連のインタビューを通して、彼の「小数倍の意味理解」の様相は変わっていった。

小数倍の意味生成のため、「数直線上の目盛り」を媒介にしながら、目盛りを「長さ」や「倍」の視点から意味づけた後、「長さ」と「倍」の composite ユニットが作られていく過程を見ることができた。

そのとき、数直線における「目盛りの意味づけ」は「ユニットの構成の仕方」が大きく関わっていた。例えば、計算で求めた「倍を表す数」を説明するために下位のユニットを作った場合や、基準にする量が 50 mだった際、10 mなど普遍単位量の半分という見方で下位ユニットを作った場合、『作った下位単位で問題場面で示された基準量がノルム化できているか、いないか』が大きなターニングポイントとなっていた。つまり、下位ユニットを構成する上では、問題場面として与えられた基準量を意識してノルム化をすることが大切である。

今回分析の対象とした H の場合、composite ユニットでのノルム化は、加法的に行われていた。インタビューの後半の場面１２では、50m に見立てた帯を意図的に 10 等分して 0.1（倍）を意味するユニットを構成することができた。このときは 0.1 倍のユニットで、問題場面で示された基準全体、すなわち１倍を「念頭で乗法的にノルム化」していたと考えられる。「等分」して下位ユニットを作り出せるようになるためには、「念頭で乗法的に基準全体をノルム化」できることが必要であろうことが推測された。

また、学習者が、どの測度空間に着目しているのかを明らかにすることを通して、「倍」という、「量（長さ）」とは独立した数の系列を作り出す過程に着目することができた。H は当初 50 mの 0.1 倍と 0.1 mの区別がつかなかった。場面６で「0.2」をユニットとして１倍をノルム化することを S に示唆され、初めは 100 mを基準と勘違いしたが、場面７で 50m を１倍とすればよいことに気づき、0.1 というユニットで１「倍」をノルム化 したことにより、「0.1」が「0.1 倍」としての性格をもつようになったと考える。

最後に、特筆すべきことがある。それは、数直線に目盛りをふって小数倍の意味を生成する一連の活動の中に、「数直線の目盛りのノルム化」という状態が見られたことである。目盛りは可視的である。「数直線上の目盛り」という媒介的な「測度空間」が「量」や「倍」のユニット化やノルム化を支えている。「倍」や「量」と composite ユニットなどを作りノルム化が行われるのである。これは「量と倍の composite ユニット」を作るための過渡的状態であった。

５．研究のまとめ

先行研究として示した市川（2003 ｂ）は、授業のレベルで「基準にした量の 1/10 に当たる具体量が示せ、それを 0.1 倍とすればよいことがわかることが、小数倍の意味理解の困難点になっていること」を示した。本研究では、ユニット化とノルム化という視点から、１人の子どもの小数倍の意味理解の様相を捉えようと試みた。

その結果、子どもが、一見基準にした量の 1/10 に当たる具体量を示していても、どのようにそれが作り出されたか、その「作り出し方」が問題であることが明らかとなった。

また、「基準にした量の 1/10 に当たる具体量を 0.1 倍とすればよい」ことに関して、「倍」を「量」と独立した測度空間として捉えられない子どもの姿として、「50 mの 0.1 倍と 0.1 mの区別がつかない」現象が見られることが明らかとなった。そして、0.1（倍）などの、わかっている人から見れば、倍を表す下位ユニットで１「倍」をノルム化する経

験が 0.1 倍を量と独立した数の系列に位置づけるきっかけとなっていた。

本研究に関わる一連の実践は、数直線を用いて小数倍の意味を作り出すことを目指している、すなわち目盛りをふることで小数倍の意味を作り出すのである。そのとき「下位ユニットとして目盛りの意味づけ」は、その「ユニットの作り出し方」に依存しており、その「下位ユニット」で「問題場面の基準」がノルム化されているかどうかが重要であることが明らかとなった。またノルム化の仕方が乗法的になると、「下位ユニット」を作り出すためのユニット分解が、「等分の操作」としてできるであろうということが推測できた。

最後に、数直線上の目盛りをユニットとしたノルム化が行われている様子が見られた。さらに、「量や倍などと compisoite ユニット」を形成し、ノルム化が行われていた。これは、「量と倍の composite ユニット」を形成するプロセスにおける過渡的状態である可能性があることが示唆された。

註

註１）この授業実践は、平成 12 年２月 10 日にＳ県内公立小学校４年生１学級を対象に行ったものである。授業の概要は市川ら（2001）を参照。

註２）このインタビューは、平成元年告示の学習指導要領のもとで学習している４年生を対象に行った。整数÷整数＝小数となる割進みの指導は、４年生で扱われ、×小数については５年生で扱われることになっていた。

引用・参考文献

藤井斉亮．（2001）．「数量関係」領域について(その１)．新しい算数研究，No370, pp34-36.東洋館出版社.

平山秀人．（2002）．児童の割合理解の深化を促す学習指導に関する研究－差の比例的な変化に焦点を当ててー．東京学芸大学大学院教育学研究科修士論文(未公刊).

市川啓．（2003a）．「再測定による小数倍の意味の解釈」場面での子どもの特徴的な活動. 第 36 回数学教育論文発表会論文集 ,501-502. 北海道教育大学.

市川啓．（2003b）．割合の見方を育てる小数倍の意味指導． 日本数学教育学会誌,*84*(12) ,31-41.

Lamon,S.（1994）. Ratio and proportion:Cognitive Foundations in Unitizing and Norming.G.harel&Confrey(Eds.) ,*The developing of MULTIPLICATIVE REASONING in the learning of mathematics,Albany,NY:State University of York Press*(pp.89-120).

中島健三．（1979）．数量関係（高学年）の指導内容の概観と問題点の考察．伊藤一郎他編著，新・算数指導講座９，金子書房. pp.3-21.

中村光一．（2001）．除法導入期における子どもの除法概念の様相：対象，対象を扱う方法，対象の作り出し方．日本数学教育学会誌,*83*(8),2-13.

清水美憲．（1995）．分数の除法に関する児童生徒の認識：その硬直した「論理性」の問題．日本数学教育学会論究, *77*(臨時増刊) ,3-26.

田端輝彦．（2001）．小数倍の導入に関する一考察: 小数倍に表すよさに焦点を当てて. 日本数学教育学会誌, *83*(12), 2-12.

田端輝彦・市川啓．（2001）．小数倍の意味指導の改善　－数直線に目盛りを書く活動を通してー．学芸大学数学教育研究，*13*, pp65-74.

Vergnaud,G.（1997）.The Nature of Mathematical Concepts Nunes, T&Bryant, P.(eds.), *Learning and Teaching Mathematics:An International Perspective.East Sussex:Psychology Press.*(pp.5-28).