上越数学教育研究, 第 19 号, 上越教育大学数学教室, 2004 年, pp.49-60.

数学学習に困難を示す生徒の理解過程に関する実践的研究

滝澤　豊
上越教育大学大学院修士課程２年

１　本論文の動機と目的

学習指導要領では，指導方法や指導体制の工夫改善など個に応じた指導の充実を謳っている。数学の学習においてきめ細かな指導というとき,時間をかけて繰り返し説明を行い,練習問題に多く取り組んで，確実な解き方を技能として身につけることが想像される。しかし，繰り返して説明を行えば，誰もが確実に学習内容を理解するわけでもなく，また，練習問題に多く取り組むという物量主義で全てが解決するものでもないことは，現実の生徒の姿が示しているのではないだろうか。

筆者は中学校現場で，数学が苦手，意欲がわかない，成績が振るわないという悪循環に陥った生徒によく出会った。一方で，授業や自主的な学習を通して，自分の理解のもととなるものを自ら獲得し，自力解決へと進むことができる生徒がいることも事実である。生徒の理解には様々な個人差があるが，数学の学習に困難を示す生徒は，一体どのような数学の理解の仕方をしているのかということについて十分に理解していないままに一様に個別指導をしてきたように思う。数学学習に困難を示す生徒には，そうではない生徒とは異なる独自の理解過程があるのではないだろうか。もしそうなら，これまでの数学指導は根本的に改善しなければならない。これが本研究の動機である。

一般に学習に困難を示す生徒は，形式的な操作を行っている姿が目立つ。それは，自分の解答や解決過程に自信がなく，他者から得た方法に根拠を求めているという姿である。本研究の目的は，方程式を学習の対象とし，そのような生徒を自律的で意味の伴った理解へと導くことをねらいとした個別指導の実践を通して，数学学習に困難を示す生徒の理解過程をよりよく理解することであり，数学学習に困難を示す生徒への指導の在り方についての示唆を得ることである。

２　研究の背景

２．１　理解すること

市川(1995)は,「理解するとは，学習事項の関連をつかみ，知識を構造化すること」としている。西林(1994)は，知識の構造化について詳細に述べている。例えば，４捨５入について理解を図る例として，図１のように示している。単に４以下は切り捨てて，５以上は切り上げると説明されるより，なぜ切り上げと切り捨ての境界を４と５の間とするのか説明され，それをなるほどと思うなら，必然性が理解される。これを４捨５入という個別的知識が,「切り捨てと切り上げの個数が同じ」という接続用知識を介して,「相殺によって精度がよくなる」という法則的知識で必然性が説明される例としている。また，法則的知識が時には個別的知識となり，それを説明するような法則的知識があるというように，知識全体は階層構造をなしているとしている。ここで述べられている接続用知識は,

意味づけに相当し，知識同士がつながって理解される構造は，単にアルゴリズムを記憶するという形式的な記憶の限界を示し，意味を伴った理解の重要性を示唆している。

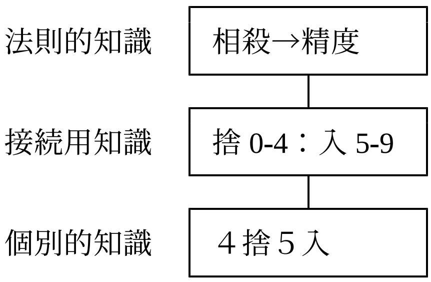

図１　法則的知識による個別的ことがらの理解（西村の図より一部抜粋）

佐伯(1989)は，Lampert(1986)の実践に基づいて，一人一人の子どもには，それぞれ納得世界があり，これが，課題状況に応じて活性化され自発的に喚起されることで，相互に結びつき強固になり拡大するとしている。

西林もランパートも，知識が結びつくことで「理解すること」を特徴づけている。前者は知識自体が意味を持ち，それぞれが結びつくことでより深い理解が得られるとし，後者は無意識に明らかさを感じているものをも知識としているという特徴をそれぞれ持っている。そして，結びついた知識は，別の理解をより深めるために，さらに他の知識と結びついていくことが共通に示唆されている。数学学習において意味を伴った理解とは「自分が身近にわかっていること」に数学の学習に必要な知識を結びつけていくことによって得られる理解であると捉える。

２．２　方程式・文字式の理解

２．２．１　杜威の研究

杜威(1991)は，ピアジェの認知発達理論に基づいて，文字式の学習における生徒の認知的活動の構造についてまとめている。例えば，ある子どもが２＋ｂを２ｂにし，２ｂを２＋ｂとした。また，２ｂ－２をｂにし，２ｂ－ｂを２にした。この場合，観察者の立場からみるとその子の認知システムは不均衡に陥っているが，子ども本人の立場からみるとその子の認知システムは均衡している。このように均衡している状態と不均衡な状態は，子どもから見た立場と指導者から見た立場では違う解釈となる場合がある。学習者が不均衡を自覚することは難しく，教師からの援助が必要となってくる。個別指導を通して理解のもととなっている考え方を聞き出し，問題に直面したときに起こっている不均衡の状態に対して，どのように処理をしようとしているのかについて見極めることが重要であるということが杜威の研究から示唆される。

２．２．２　文字の意味と等号の役割

代数の学習が始まって生徒の中に生じる困難さは文字の意味をどう捉えるかということである。文字の意味は，変数的な扱いから導入され，方程式の学習で未知数としての見方が加わる。また，方程式の学習で見方が変化するものとして等号がある。つまり，計算の結果を表すという意味から相当関係を表す記号の意味へと適用範囲が拡張されていく。

Linchevski&Herscovics(1996)は，算数と代数の間にある認知的ギャップの架け橋を担うものとして方程式における未知数の計算を通して実践に取り組んだ。その中で，①方程式において未知数を１つにまとめようとすることが生徒の自然な発想となり，同類項をまとめるということに拡張されること，②項を和の形に分解する過程を取り入れることが，生徒が独力でより有効な解決力を伸ばしたという成果を収めたこと，③項を差の形に分解することはかなりの困難さがあり，この研究で行われたアプローチの限界を示したことなどの示唆を得ている。Linchevski&Herscovics は，新しい数学の学習が始まると授業は一般的なレベルでの新しい概念と手順を紹介すること

にある。しかし，これらは抽象的になるために，おそらく多くの生徒たちにとって，生徒の現存している知識への結びつけに失敗する結果となり，克服困難な認知的障害を作り出すであろうと指摘している。一般的に，方程式の学習は等式の意味，数量関係を表す文から等式への翻訳，方程式・方程式の解・方程式を解くことの意味，等式の性質，等式の性質を使った方程式の解き方，移項を使った方程式の解き方，方程式の利用の順で指導が行われる。その際，新しい概念が抵抗なく生徒に受け入れられると考えるのではなく，例えば等値の関係を表す等号の意味すらも生徒がどのように理解しているかについて検討することは，認知的困難性を解消するひとつの契機となりうるかもしれない。

２．３　理解の核を作る指導

以上の考察から，理解することとは知識を結びつけることであると捉えられる。学習に困難を示す生徒は，ばらばらな知識を持っているものの，自分の理解のもととなる知識を明らかにしておらず，その結果，どのように知識を結びつけていいのかわからない状況にあるのではないだろうか。よって，学習に困難を示す生徒が理解を図るためには，理解のもととなるような知識が何であるのかをはっきりとさせ，その知識と結びつけて学習を進めることが必要である。そのような「自分が身近にわかっていて，これからの学習の理解のために他の知識と結びつくことになる知識」を理解の核とする。そして，学習に困難を示す生徒の理解を図るということは，理解の核となりうる「自分が身近にわかっていること」に，学習に必要な新しい知識を結びつけることと思われる。

２．４　自律する姿を目指す個別指導

ここでは学習に困難を示す生徒の自律的で意味の伴う理解を図る個別指導のあり方について検討する。

小高(1992)，C.カミイ(1985)，市川(1998)は, 学習上の自律について, 自力で学び取る，自分自身で判断する，学習する意義を知っていることと具体的に捉え，主に心情面における知見を示している。本研究では自律する学習の姿を，自分の考えに基づいて学習を進めること，および，自分の学習の姿を振り返ることができる姿と定義する。市川(1993)は，認知心理学を背景に学習者の認知的な問題を改善する方法として認知カウンセリングを提唱している。筆者は，自分自身の学習を振り返り，自己理解を促す技法として用いる「教訓帰納」に注目した。松屋(2002)は，算数を苦手とする児童との個別指導を通して，その子のできることから始めることの重要さを指摘している。以上の見解をもとに，生徒の理解をよりよく理解するために，結果ばかりを見たり教え込まないこと，自律する姿を育てることを目標とすること，核となる理解を作っていくことに留意するという示唆を得た。そして，この示唆をもとに本研究で行う個別指導の立場として次の３点を設定する。

①何かを教えるというよりも生徒の思考や理解を理解するための指導を行う。
②自律を促すために，正しいかどうかの判断を生徒に委譲する。
③方程式に関わる本質的なもので，生徒がよく分かる領域を作り，それを発展させる。

また，これらの立場を支えるために，生徒が自分の考えを遠慮なく指導者に伝えることのできる人間関係を大切にすることが必要で, これも本研究における重要な要素である。

３　個別指導の実践

３．１　調査の構想

本調査は，数学学習に困難を示している生徒を対象にして個別指導を行い，その生徒の理解過程を明らかにすることにより，方程式の学習において自律して学習を進めるために

はどのような理解が必要であるか，そのような理解を生じさせるためにはどのような指導を構成する必要があるかという示唆を得るために行う。個別指導は平成１４年６月５日から平成１５年８月４日までの約１年間（計３０回）にわたり行い，生徒と指導者（筆者）が１対１で行った。この様子は VTR で記録し，後に，これをもとに詳細な筆記録を作成した。本研究における個別指導は，特定の理論を検証するために，あらかじめ計画された方法で進めるというよりも，むしろ実践を行い，その様子をフィールドノートに記録して反省的に検討し，さらに実践を行うというものである。反省的検討においては，生徒の理解状況を理解することに努め，その生徒が本当にできること・わかることの土台を構成することを視野に入れながら，これをもとに，学習を発展させるための指導内容について検討を行った。

個別指導の対象生徒は，公立中学校２年女子生徒竹井(仮名)である。筆者は，２年前までその中学校に勤務しており，竹井が中学１年生の時に数学の教科担任をしていた。また，部活動の顧問でもあった。研究に臨むに当たり，以前竹井が「数学は嫌いだ」「数学は苦手だ」と述べているのを筆者が聞いたことがあること，１年生時の後半の定期テストでは４割から６割程度の正答という成績を残していたことから数学学習に困難を示している生徒であると判断した。また，教科担任，部活動顧問としての人間関係があったこと，１年生の時の授業の様子を知っていることなども竹井を対象生徒とした理由である。

３．２　指導の概要

全３０回の個別指導について，その内容により，次のように５つの期に分類することができる。

第Ⅰ期　第１回から第３回
　連立方程式の文章題と立式に必要な文字の概念
第Ⅱ期　第４回から第６回
　連立方程式の解法と代入の概念
第Ⅲ期　第７回から第１２回
　文字式の意味の獲得
第Ⅳ期　第１３回から第２２回
　１元１次方程式の解法
第Ⅴ期　第２３回から第３０回
　連立方程式の解法

以下に，各期ごとの指導の概要を示す。

３．２．１　第Ⅰ期

研究を始めるに当たり，筆者が研究の対象にしようとしたのは方程式の文章題を解決するために行う立式に関わる困難性である。第Ⅰ期では，まず授業でこの様子を観察し，そこで扱われた問題をもとに個別指導を行った。ここで，竹井は文字を使って数量を表すこと，文字を使って表された式の意味を説明することに困難さを見せた。ここでの指導を行いながら，「どういうことならできるのか」「問題を実際に解きながら，竹井がどういう方向で考えようとしているのか」を探っていこうとする方針を立てた。

３．２．２　第Ⅱ期

第４回の指導で，「**連立方程式を解くことはだいぶ得意になった**」との竹井の発話を受けて，筆者はいくつかの練習問題を提示した。図２はその時の竹井の筆跡である。

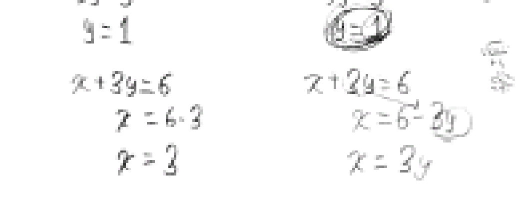

図２　竹井が解いた連立方程式

この解法から，代入に関する概念の理解が竹井に不足していると判断し，代入の計算問題を示した。すると次の図３のような解答が見られた。

問題　ａ＝３のとき，式ａ＋５の値

ａ＋５$_{-3}$　＝２
３
５−３

図３　代入の計算

竹井は，ａの下に３と書き，矢印を引いて，５の後ろに−３と書いた。そして，これらの式の下に５−３と書き，２と答えを求めた。この時の竹井の発話は次の通りである。

これ（５）はこのままだから，これ（ａの符号）はプラスだから，移項すればマイナス３

この竹井の反応から，２ａがａ＋ａと同値であることなどの文字式の意味理解を図り，様々な代入計算を繰り返すことを通して，代入計算の技能を身につけるよう指導した。この解決に当たって，意味を伴ったものではなかったことが後に明確になる。しかし，この時点では明らかではなかった。

３．２．３　第Ⅲ期

代入計算の困難性を受けて，一般に問題集に掲載されている「文字式の概念を身につける問題」を用意し，式の解釈を深めることで，確実に正答へつながる力を身につけさせようとする指導が続いた。第８回の指導からみかんに数を代入する仮想の財布を考えるという学習を行った。

みかんの絵１枚と１００円玉を図４のように目の前に提示して，これが竹井さんの財産であると伝える。そして，みかん１個の価値が２００円とすると合計いくらの価値を持っていることになるかを問うというものである。

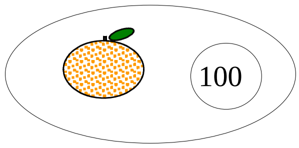

図４　みかんの絵と１００円玉

また，以下はその時の発話記録である。（Ｉ：筆者，竹：竹井を表す。以下同様）

8010 竹：１００円しかないじゃん。
8011 Ｉ：お店行って，みかんを出すとこれで２００円の買い物ができる。
8020 竹：３００円

筆者はみかんの価値が２００円の時，この３００円を求める計算はどんな式で表されるかを問うた。そして，竹井は２００＋１００＝３００と答えた。

8030 Ｉ：みかんが１個１５０円ならどういう価値になることになる？
8031 竹：２５０
8032 Ｉ：どういう計算になる？
8033 竹：足し算
8034 Ｉ：何足す何という形で
8035 竹：１５０たす１００は２５０

その後，筆者はみかんの値段を１００円，５０円，２０円とし，最後に５００円のときの場合を考え，この過程で竹井はみかんの値段を，この式に代入すれば，みかんの値段と１００円玉の足し算で求められるということを次第に理解していった。次に筆者はａ＋５という文字式を提示し，財布の中にａというものと，５円玉がある状況であると述べ，ａ＝３というのはどういうことかを問うと次のような対話があった。

8050 竹：みかんの値段が３円
8051 Ｉ：今財布の中にいくらあることになる？
8052 竹：８円
8053 Ｉ：今自信持って，これ（ａ＋５）と同じじゃない？
8054 竹：あ，ホントだ。うん。
8055 Ｉ：じゃ，ａ＋１って書いてあるのはどうい

う状況だと思う？ 財布の中に

8056 竹：これは，１円があって，みかんの値段が３円で，今の値段が４円

8057 Ｉ：と言うように見たらどう？

8058 竹：うん

竹井の 8052 の発話およびその時の表情が満足そうだったため，8053 と続いて，8054 の「**あ，ホントだ。うん。**」となっている。この後「**自信がある**」という言葉をこの一連の指導の中で初めて聞いた。この後の個別指導の中で，代入計算の方法についてみかんの財布を使って説明する機会が増えた。

３．２．４　第Ⅳ期

第Ⅲ期で，代入計算の考え方に安定さがみられるようになった。この指導を経て，扱う文字式をフレーズ型からセンテンス型へ移行させることを考え，第１３回の指導で次のような課題を設定した。

ｘ＋ 100 とｘ＋ 100 ＝ 300 はどう違うか

竹井はこれまでの学習を生かし，ｘ＋ 100 のｘにはいくつかの数が当てはまり，ｘ＋ 100 ＝ 300 のｘには 200 しか当てはまらないことを指摘した。さらに，竹井は方程式の解が 200 であることの理由として，「**ここの答え（＝３００の３００を指している）が出てる。で，ここは１００？。あと，３００にするためには２００が必要だから，２００でいい**」と述べた。筆者は，この発話の中の「答え」という言葉から，竹井が等号を「左辺と右辺が等しい」という意味で見ていないのではないかと考え，気になった。そこで，２×４＝５＋３という式が正しいことを認識できるかどうかを問い，左辺と右辺が等しいことを示す等号の意味を説明した。さらに，この式２×４＝５＋３を真似て，等式作りを行った。この学習を経て，解が正しいときには，文字ｘに代入して正しいことを確かめられることを実感していった。

それは例えば，方程式ｘ－３＝２を解いた後「**この答えが5と出て，ここに5をはめると，マイナス3，．．この5とマイナス3を引くとこの答えが出て，一緒になる**」という発話に表れている。また同様に確かめて，誤答に対して「解が正しくない」と述べることもあった。この後の指導は，時々，文字式の計算に戻ったりしながら，方程式の解き方，およびその解を確かめたことに自信があると言えるまで続いた。

３．２．５　第Ｖ期

第Ⅱ期と同様に竹井は，加減法を用いて連立方程式を解いた。ただし，２つの文字のうち，一方の解を求めた後，他方の解を求めるために代入計算を行うことに確実性が増した。また，求めた解を確かめようとして，もとの式に代入し，その解が２本の式両方を満たしていることを知り驚きの声を上げた。竹井は，それまでに自分の中で獲得した，解を確かめる方法が，連立方程式でも応用できるという発見をしたのである。竹井が得意とするところを，他の操作に広げることができた場面である。この後，連立方程式の問題を数問ずつ解く個別指導が続いた。その中で，初めに求めた解が負の数になったときに，それを代入する際に計算ミスをしたり，式の変形の途中で,移項の時に符号を変えなかったり，単純な足し算，割り算のミスによる誤答が多く見られた。しかし，この段階で解を求めた後，もとの式に当てはまるかどうかを確認する処理を自ら進んで行う姿が定着した。

３．３　竹井の変容に関する解釈

全３０回の指導で取り組んだ方程式の学習の中で，初期には形式的に方程式の解き方を理解していて，求めた解が正しいかどうかを説明できなかった。そのような姿から，解の誤りに気づき，振り返り，再度解き直して正解を求めるという姿への変容が認められた。

このように個別指導を通して認められた変

容を特定し，その変容を中心として，竹井の方程式の理解の発展過程を構造的に捉えることを試みることを本研究の分析の視点とする。

以下に，その変容の根拠となる特徴的な竹井の状況について述べる。

３．３．１　方程式を操作的に変形して解を求める

第４回の指導で竹井は，２つの方程式ｘ－７＝２と方程式４ｘ＋５＝１７を図５のように解いて「簡単だね」と述べた。

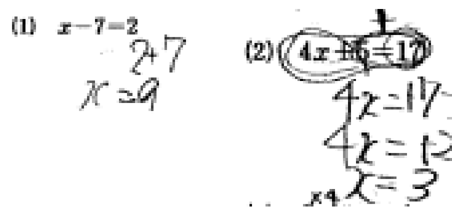

図５　方程式の解法①

第１３回の指導で図５の問題(2)の解き方について次のように述べている。

「ｘ（４ｘのこと）は最初に持ってきて，そして，わの後のこの答え（１７）を持ってきて，これ（１７）もこのまま落ちてきて，これ（＋５の符号）は＋だから－に直して，移項すると，－５になって，これ（４ｘ）はこのまま落ちて，…(略)…」

「ここ（５）とここ（１７）で足し算して，ここの答え（１２）が出た，やつを，ここ（４）で割り算すると，この答えが出る？」

竹井が述べている「持ってくる」「落ちてくる」は，いわゆる同値変形のために下に新しい式を作ることである。竹井はｘの項を左辺に残し，定数項を右辺に正しく移項して計算し，最後に右辺をｘの係数で割ってｘの値を求めるという，ｘの１次方程式の最も基本的で典型的な方法で与えられた問題を解いていることがわかる。ところが彼女は，このような正しい手続きを実行できているにもかかわらず, 上のプロトコルの最後のところが「割り算するとその答えが出る？」と疑問形で終わっていることが示しているように，彼女が自ら導き出した答えが，与えられた方程式の解になっていることに自信がない状態である。

３．３．２　方程式の解をもとの式に代入する

竹井は，筆者が「方程式ｘ＋８＝３ｘの解はｘ＝４ではないか，正しいかどうか確かめてくれないか」と尋ねると，６秒ほど考え込んで「ん，うん」とうなずいた。その「うん」の意味は？と尋ねると次のように述べた。

「ここ４を入れれば，プラスになって１２になって，ここに４を入れると，ここはかける（×）が入るから，しさん１２で，１２，答えが一緒になる？」

続いて，方程式５ｘ－６＝２ｘの解が２ではないかと筆者が言ったことに対しても竹井は５秒ほど考えて，「うん」と肯定するような口調で答え，

「ここに２を入れるとかけるになって，ににんがしで４になって，こっちはここに２を入れると，１０になって，１０ひく６は４になって答えが一緒になる？」と説明した。

竹井は，自分の求めた数値が，方程式の解になっているかどうかを調べる方法として代入して両辺が等しくなるかどうかを調べるという方法を適切に用いている。これまでは，竹井にとって方程式の解は，単に機械的に得られるものであった。それに対し, 竹井の「答えが一緒になる？」という発話は，ここでの学習によって，方程式の解がもとの式のｘに代入し計算すると左辺＝右辺を満たすものになることを知ったという状況を示している。

３．３．３　方程式の解を正しく求めたと判断し，間違った解は間違いと言い切る

方程式ｘ－３＝２のｘ＝５と求めたことを確かめるように求めると竹井は

「**この答えが５と出て，ここに５をはめると，マイナス３，この５とマイナス３を引くとこの答えが出て，一緒になる**」

と述べた。そして，ｘ＝５を求めたことが **「正しい」** と述べた。自分が求めた答えに対して「正しい」と言い切る表現は，ここで初めて竹井に見られた。これ以降自分自身の解き方に対しての「正しい」か「正しくない」かの判断に触れる発言が増えている。

竹井は方程式３ｘ＝ｘ＋８を３ｘ＋ｘ＝８，４ｘ＝８と変形し，解をｘ＝２と求めた。これ対して，筆者が確かめるように促すと，竹井はしばらく考えた後，

「**だめだ分からん。ならない同じく。ここに２を入れても同じくならない。**」

と述べた。そして，筆者が「同じくならないってことは？」と聞くと **「正しくない」** と答えた。これらの「正しい」という言葉や，ここでの「正しくない」という表現では，竹井は自分の言葉をはっきりと言い切っている。これは，竹井が自分の求めた方程式の解をもとの式に代入して計算した結果，左辺＝右辺となるならば，そのやり方を適用させている限りにおいて，解が正しいということの確信を深めているためである。

３．３．４　代入する方法を用いて方程式を解く

竹井は，ｘ＋ｘ＋ｘ＋ｘ＋ｘ＋ｘ＋ｘ＋ｘ＋ｘ＝５４を解く時に **「あ，９のなるものを探すんだ。９，ん，９，６，５４になるから，９と６で５４になるから，６になるんだ」** と述べてｘ＝６を求めている。そして，自分自身の考えに納得したように **「あーそうだ」** と発話した。続いて解いた３ｘ＝１２や４ｘ＝２８でも「**ここ（３ｘのｘ）に当てはまるものを３の段から探して**」や「**ししち２８で７になる**」と述べた。

これらの発話から，この時に竹井は当てはまる数を探すという方法で解を求めていることが分かる。それまで，移項などの方法を用いて式の変形によって解を求めていたことからすると，数学的な解法としては後退しているように考えることができる。しかし，理解という視点からみると，意味の伴わない単なる手続きによる解法から，ｘに当てはまる数を求めるという方程式の解の意味を伴った解法へと前進しているとみることもできる。

３．３．５　移項の操作的なよさを述べる

当てはまる数を試行錯誤して求めようとする姿は多く見られた。方程式４ｘ＝６４では，当てはまる数を求めようとしていたがうまく求めることができず，筆算を行ってｘ＝１６を求めた。４ｘ－５＝４７に対して，試行錯誤してｘ＝１３を求めた。その後，筆者が「５をなくす方法はないか」と問うたことに対して，竹井が「移項」と述べ，移項を用いた方法で方程式を解いた。解が求められると竹井は「**不思議だ**」と述べた。また，「**今まで苦労したことがむかつく**」「**すごい速く計算できる**」とも述べた。

４ｘ＝６４で試行錯誤によって当てはまる数を求めることができなかったこと，そして，筆算を行って解を求めたことは，試行錯誤による竹井の方法の限界が実現され，それを適切に補う方法，より発展的な方法として思考による方法が位置づけられたといえる。この後，移項して解を求めたこと対して，「不思議だ」「今まで苦労したことがむかつく」と述べたことは，移項の語用論的な意味ともいえるもので，どのような時に，どのようにして用いれば，どんな効果があるかということについてのメタ知識である。

単に覚えているやり方としてあった移項のやり方に対して，当てはまる解を求めるという方法で解くことと比較することで，形式的に処理できるよさを感じた場面である。

３．３．６　自信を持って解を確かめる

第２２回の指導では，これまでの方程式の

学習を振り返り，筆者は方程式の問題を６題用意した。その４問目は方程式５ｘ－８＝３ｘであったが，これを最初図６ａのように解いた。しかし，その後，確かめを行ってｘに－４が当てはまらないことに気づいた様子であった。そして，しばらく考えた後，問題５，問題６へと進み，その後再度問題４に取り組み始めた。その時，もとの問題の右側の余白部分に自分で問題を書き直してから，図６ｂのように解いて，「できたと」と小さくつぶやいた。

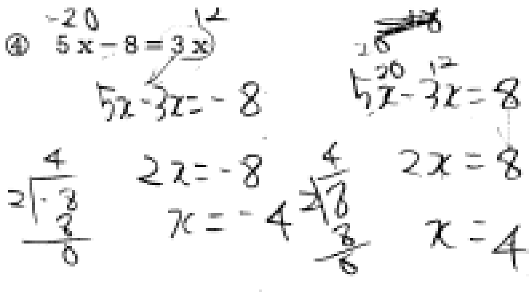

図６ａ　　　　　　　図６ｂ

確かめがうまくいかないことで，図６ａのｘ＝－４に対して，竹井は自分の解が誤りであることを確信していた。しかし，どこで間違えたか見つけることができずに，諦めて次の問題へ進むことを選択した。そして，この後が自律性の高まりのひとつと見なせる場面である。検討を保留していた問題４を，図６ｂのように自ら問題を「書き直す」という行為を含め，解き直している。そして，更に確かめを行って，「できた」と自分の解の正しさを確信しているのである。

４　変容を促した要素と考察

竹井の自律性を伴った解決の支えとなったのは「解をもとの式に代入して確かめる」ことであり，その考えを竹井自身が，方程式の解決のための核としたからである。この結論に至る要素について以下に述べる。

４．１　解の意味を伴った方程式の理解

第８回の指導で竹井は，みかんの絵と１００円玉を並べた状況を文字式ａ＋１００と対比させて，文字ａに数を代入して式の値を求めるという代入計算を，意味を伴って理解する。そして，この経験から，方程式は覚えているやり方でｘ＝〇と解が出るものであるという認識から，方程式のｘには数が当てはまるもので，その当てはまるものが方程式の答えであると意識することにつながった。この理解の様子を図７のようにまとめる。

＜方程式に対する認識＞

解を形式的に導くもの

↓←文字に数を代入することの理解

解の意味を伴って理解

図７　方程式に対する認識の変容

これは，「なんだか分からないけど覚えている方法をやるとｘ＝〇と答えが出る」という考えから，「ｘに当てはまる数が方程式の答えなんだ」という考え方へ変化が起こったことを示している。この「ｘに当てはまる数が方程式の答えである」という考えが竹井の中にできあがったことをもとに，筆者は２つの指導を試みる。それは，①「方程式の解は当てはまるものを探せばよい」ということと，②「解が正しいかどうかを確かめるためには当てはめて調べればよい」というものである。

ｘに当てはまる数が方程式の答えである

↓

①方程式の解は当てはまるもの探せばよい

②解が正しいかどうかを確かめるには当てはめて調べればよい

図８　解の意味から派生した指導

①の指導に関して，第１８回の指導で竹井は方程式４ｘ＝２８に対して「ししち２８」と述べながら，ｘ＝７と解を求めた。また，方程式３ｘ＋４＝２５に対しても，次のように発話してｘ＝７を求めた。

３の段で２５に近い数を考えたら，３×８＝２４だったが，これに４を加えたら，２５より大きくなってしまったので，１つ減らして，３×７を考えたら，うまくいった。

これらの発話から，この時に竹井は当てはまる数を探すという方法で解を求めていることが分かる。上の３．３．４で述べたようにｘに当てはまる数を求めるという方程式の解の意味を伴った解法へと前進している。

②の考えは，形式的な方法を示唆しているだけであって，意味を伴った理解がない。つまり，このままでは，そのようにして調べることに意味がない状態である。その調べることに意味づけを行うとするならば，「もとの式に求めた解を代入した結果，左辺と右辺の値が等しくなる」ことを調べればよいということである。これは，等号が持つ等値性の意味をどのように認識するかという理解過程に関係すると思われる。そこで，小学校以来身に付いている「入力－出力としての等号の理解」を，「両辺が等値であること」を意味するものとして次のように発展させた。

４．２　等号の等値性

第１３回の指導で，方程式ｘ－７＝２の解ｘ＝９に対して，「**ｘの答え？**」という発話があった。また，方程式ｘ＋１００＝３００のｘが２００でいいかということに対して，右辺の３００を指して，「**ここの答えが出ている**」と述べている。筆者はこのやりとりを通して，竹井は等号に続く数を「答え」と呼んでいると判断した。左辺と右辺が等しいことを表しているという等号の意味は，案外と簡単には獲得されにくく，文字式の理解を図る上で１つの課題である。方程式で解が正しいかどうかは，もとの式に代入して確かめるという方法がもっとも基本的な方法である。そのために，左辺と右辺が等しいことにはっきりと意識を向けることが，この方法を正しいものと実感するポイントであると考えた。そこで竹井に「２×４＝５＋３は正しい式か」と投げかけた。竹井はこの問題に対して「**正しくない**」「**見たことないねぇ**」と述べている。

この後，２×４＝６と２×４＝８を比較したことにより，２×４＝５＋３を正しいと認め，その理由として「**どっちも８**」と述べた。さらに，３×５＝１２＋３などの式を自分で作る経験をして，この経験が，等号が左辺＝右辺という等値性を持つものであることをはっきりと印象つけることとなった。

筆者は「方程式ｘ－７＝２のｘに９を入れる」ことに関して次のように説明した。

これ（ｘ－７＝２）が正しいことをどう言ったかというとさ，こういうふうにやった，とりあえずｘは９って出た。この９っていうのが正しいってことを説明するためにどう考えたかっていうと，このｘに９を入れてみた，そして，こっちを計算したら９－７になって２になった。こっちにも２って書いてある。２と２は同じなんだからこれは９で正しい。そうするとこれ（４ｘ＋５＝１７）は，ｘは３って出たんだけど，これは正しいんだろうか，どう言ったらいい？

解が正しいかどうかを示すには何をすればよいかということが筆者から竹井にここで初めて，具体的に示されている。この発話を受けて，「**これ（ｘ）に，これ（４）をかけると１２になって，これを足すと１７になる**」と，竹井が説明した。竹井は，答えが正しいことを確かめるために，ｘに解を代入して計算した。続いて方程式ｘ＋８＝３ｘで，両辺にｘの項がある方程式の確かめを行うよう竹井に求めた。その時の竹井の発話は次の通りである。

ここ４を入れれば，プラスになって１２になって，ここに４を入れると，ここは×が入るから，しさん１２で，１２，答えが一緒になる？

この経験を通して竹井は，等号の等値性の意味を確実に捉えた。そして，この等号の意味を捉えたことが竹井にとって解を確かめることを意味を伴って理解することにつながった。そして，図９に示すように解の意味を，等号の等値性から見直すことによってより深く解の意味を捉え，この意味をもとに「解を確かめる」方法の正当性を納得した。

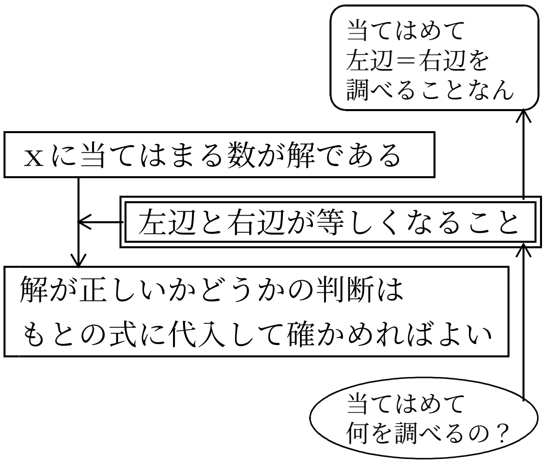

図９　等号の意味を発展させて確かめる意味を理解する。

４．３　解を確かめる

竹井は，方程式３ｘ＝ｘ＋８を３ｘ＋ｘ＝８，４ｘ＝８，ｘ＝２と解いた問題に対して，

だめだ分からん　　ならない同じく
ここに２を入れても同じくならない

と発話している。

右辺の文字ｘの項を移項するところに誤りがあるが，竹井は自分で気がつかなかった。そして，求めた解をもとの式に代入して左辺と右辺を比較して，等しくならないという体験をし，誤りに気がついている。これが等号の等値性をより強く意識するようになった。これは次の例でも同様である。

方程式４ｘ－３＝２ｘ＋９を６ｘ＝９＋３，６ｘ＝１２，ｘ＝２と解いて，筆者が「確かめてくれる」と求めると

ここに２を入れてにしが８。８－３が５になる。
そしてここにも２を入れて，ににんが４になって，
あれー？　１３，あれ，あーあ，もうやだよ。

と発話している。代入して確かめる操作的な方法に続いて，「あーあ，もうやだよ」と述べている。自分にとってはｘ＝２という解が正しいものであると思っていた。しかし，スムーズに解けたにもかかわらず，解が誤りであることを確信したため，竹井自身の中に葛藤が生じたと思われる。このように自分が獲得した「解を確かめる方法」が成り立たない例を経験することで，かえって自分自身の中に深く自分の方法として意味のあるものになっていった。これを契機に，解の確かめを行うことができる自分の解法に自信を持ち，誤りを見つけた時には自ら自分の解答を振り返るという自律的な姿が頻繁に見られるようになる。ここまでをまとめたものが図１０である。

５　本論文のまとめ

以上の結果から，「解をもとの式に代入して確かめる」ことが方程式の学習の自律的な理解の核となることが明らかとなった。竹井は，移項の意味の正しさとその有効性を「解をもとの式に代入して確かめる」ことを核として間接的にではあるが確信することができた。同時に，この方法は，従来行われている等式の性質から移項の考えを導き，進められる方程式の指導における困難さを克服する指導法へと発展させる可能性をも示唆している。

以上の考察から，生徒のわかるところ・できるところを発展させ，それを核として新たな学習内容との相互構成を図る個別指導を展開することが，数学学習に困難を示す生徒を自律的で意味を伴った数学学習へと向かわせることができるということが本論文の結論である。この結論を更なる個別指導を通して検討することは今後の課題である。

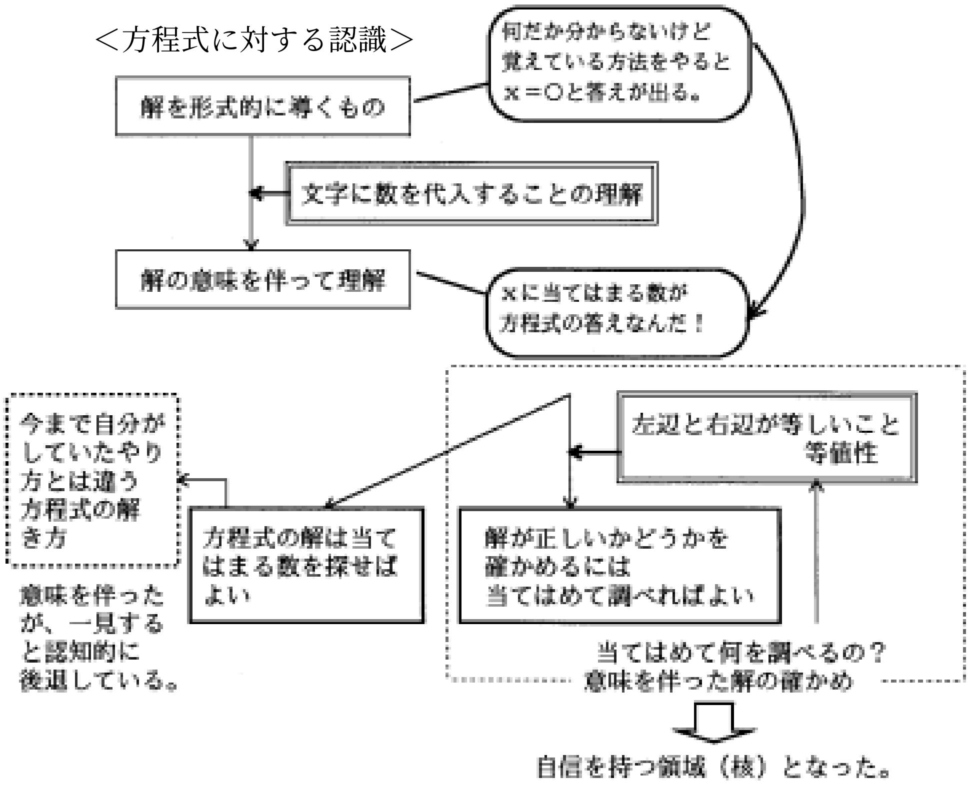

図１０　解の確かめを核にした指導

引用・参考文献

文部科学省. (1999). 中学校学習指導要領(平成１０年１２月)解説－数学編－. 大阪書籍.

市川伸一. (1995). 現代心理学入門３学習と教育の心理学. 岩波書店.

西林克彦. (1994). 間違いだらけの学習論：なぜ勉強が身につかないか. 新曜社.

佐伯胖. (1995). 「わかる」ということの意味［新版］. 岩波書店.

佐伯胖他著. (1989). すぐれた授業とはなにか：授業の認知科学. 東京大学出版会.

佐伯胖. (1995). 「学び」をどう学ぶか. 学びへの誘い. 東京大学出版会. pp165-188.

M・ランパート，秋田喜代美訳・解説. (1995). 真性の学びを創造する：数学がわかることと数学を教えること. 学びへの誘い. 東京大学出版会. pp189-240.

杜威. (1991). 学校数学における文字式の学習に関する研究. 東洋館出版社.

Linchevski & Herscovics. (1996). Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra：operating on the unkown in the context of equations, *Educational Studies in Mathematics, 30*, pp39-65.

小高俊夫. (1988). 数学の学習意欲に関する一調査から－考察と指導法の提案－. 日本数学教育学会誌，70(11)，pp5-11.

C. カミイ著，平林一栄監訳(1987). 子どもと新しい算数ピアジェ理論の展開. 北大路書房.

市川伸一. (1993). 学習を支える認知カウンセリング. ブレーン出版.

松屋徹. (2002). 算数を苦手とする児童の学習過程に関する実践的研究. 上越教育大学大学院修士論文. 未公刊.