上越数学教育研究，第20号，上越教育大学数学教室，2005年，pp.83-96.

算数の授業における意味の構成に関する研究

－認識論的三角形に基づく小数の乗法の授業設計－

馬　場　雅　史
上越教育大学大学院修士課程２年

１．はじめに

学習指導要領解説算数編(1999)では，平成元年告示の学習指導要領指導書算数編(1989)に記述されていた用語「概念」が姿を消し「意味」が強調されている。また，平成13年度小中学校教育課程実施状況調査報告書小学校算数編(2003)には，計算の意味を実感的に捉えられるようにする指導の工夫が必要であることが述べられている。このように，現在の算数指導が目指すべき１つの方向として「意味」が益々重要になってきている。

「意味」の具体的指導には，それを媒介とする表現を必要とする。一方，本質的に表現自体に「意味」はないので，子どもたちは表現を媒介として「意味」を構成しなければならないのである。したがって，子どもたちの「意味」の構成を如何に図るかは授業改善に直結する最も重要な研究課題の１つである。また，子どもたちが構成している「意味」を表現から直接的に掴むことは難しく，これを如何に適切に捉えるかも指導上の重要な問題である。

計算の意味に焦点を当てたとき，これまで整数，小数，分数の四則の意味について，どのように理解させるべきかという議論は数多くなされてきている。中でも「小数の乗法」の意味づけに関する議論は活発である。しかし，それらの議論でも，実際の授業の場面を取り上げ，子どもたち自身が乗法の意味を拡張したり発展させたりしている過程を明確に報告しているものは少ない。

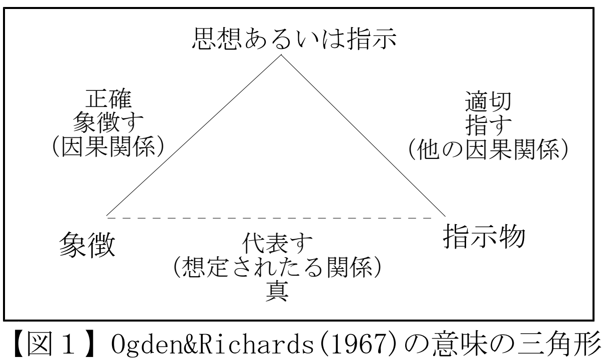
本稿の目的は，算数・数学における意味を考察し，その上で，小数の乗法の授業を対象として，子どもたちが小数の乗法の意味を，特に表現との関わりにおいてどのように構成していくのかを明らかにし，授業設計への示唆を得るこである。

２．意味に関する考察

2.1.意味について

通常我々は，ある言葉や表現（以後言葉）の「意味」と言った場合，その「意味」として，言葉によって指示される事物や実体（以後事物）のことを指している。そこには，言葉に対応して指示される事物との間に直接の意味関係が仮定されている。

一方，Ogden&Richards(1967)は，「言葉と事物との間に直接の意味関係があるという従来の定説が表す一種の単純化こそは，われわれが物を考えるときに遭遇する，ほとんど一切の困難の源である。」と述べ，その関係を【図１】のように記している。



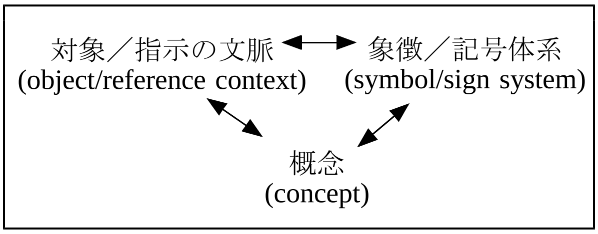
【図１】Ogden&Richards(1967)の意味の三角形

これは，言葉と事物との間には間接的な結

びつきしかないことを示していて，この立場に立つと，「意味」とは言葉と事物の間の関係を認識者が捉えたときに生じる相対的なものと捉えられる。このことは，算数・数学の指導場面を想定した場合もそのままあてはまる。つまり，算数・数学における「意味」は，言葉や事物の間の絶対的な結びつきを示すものではなく，文化的状況や認識者の認識の状態で刻々と変化する言葉と事物の間の関係として考えるべきであるということである。また，算数・数学の知識や概念は言葉や事物それ自体ではなく，言葉や事物の間の関係であると捉えられるから，それらを直接的に表現することはできないばかりか，上述した，言葉と事物の間の関係すら逆転しうる。算数・数学にはそのような特質があることを理解しておかなければならない。

2.2.意味を捉える分析の視座

Steinbring(1997)は，このような算数・数学の特質を考慮し，尚かつ，Ogden&Richards(1967)の考え方に基づき，それを修正した概念枠組みとしてSteinbring(1997)の認識論的三角形を提唱している。Steinbring(1997)の認識論的三角形は，対象/指示の文脈(object/reference context)，象徴/記号体系(symbol/sign system)，概念(concept)という３つの構成要素の相互関係から成り立っている。



【図２】Steinbring(1997)の認識論的三角形

この枠組みの優れた点は，算数・数学の授業の中で刻々と変化する相対的で実体のない「意味」を指示の文脈と記号体系という表現の間の関係として捉え，記述することができるところにある。

本研究では，この認識論的三角形を分析の視座とし，算数の授業における子どもたちの意味の構成過程を捉えることとする。

３．小数の乗法の意味指導に関する考察

3.1.小数の乗法の意味づけの立場

小数の乗法の意味づけに関しては，いくつかの立場が考えられる。それらの立場の代表的なものとして，「同数累加」「量×量」「基準量×割合（倍)」の３つがある。筆者は「基準量×割合（倍)」で小数の乗法を意味づける立場に立つ。これは「基準量×割合（倍)」の考え方で乗法の意味を拡張していくものである。

算数指導のねらいの１つに「数学的な考え方」の育成がある。小数の乗法の意味指導は，「数学的な考え方」の１つである「拡張の考え」を育てるのによい場面となる。なぜなら，整数の乗法は「同数累加」の意味を用いて理解することができるが，乗数が小数になると「同数累加」の意味は適用できない。そこで，乗数が小数の場合の意味を新たに考える必要がでてくるからである。このように考えていく活動が乗法の意味を拡張することの必要を意識させ，「拡張の考え」を用いる機会を子どもたちに与えることができ(中島,1968b)，「拡張の考え」を育てることになると考える。

3.2.小数の乗法の意味づけのための表現

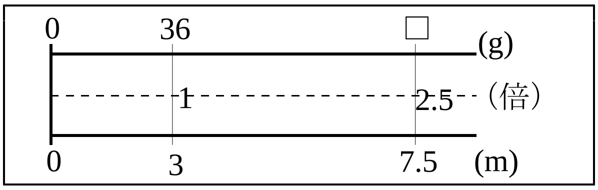
数学的意味の構成には表現が必要不可欠であり，乗法の意味づけに関しては，特に数直線が有効な表現として機能すると考えられる。

杉山(1986)は，乗法の意味の指導を行う際の数直線を用いた小数の乗法の意味づけの利点について以下のようにまとめている。

・乗法の意味を小数や分数の場合も整数の場合と同じ意味で捉えることができ，無理なく意味の拡張ができる。
・小数の場合，計算の仕方についての示唆をも与えてくれる。
・乗数が１より小さいとき，積が被乗数より小さくなるということが表現されている。

一方，乗法でも除法でも数量関係を視覚的にとらえさせるモデルとして数直線は有効性が高い表現であるが，数直線は，教師が分か

りやすいと考えていても，子どもたちが使えるようになるまでにはある程度の素地が必要な表現（白井, 1997）であり，尚かつ，小数の乗法の意味を割合（倍）によって意味づけていくとすると，数直線に「倍」の意味をいかに表現するべきか,「倍」の意味をどのように顕在化していくべきかということが問題になる。中村(1996)はこの「倍」の意味を表現する数直線モデルとして【図３】を示している。



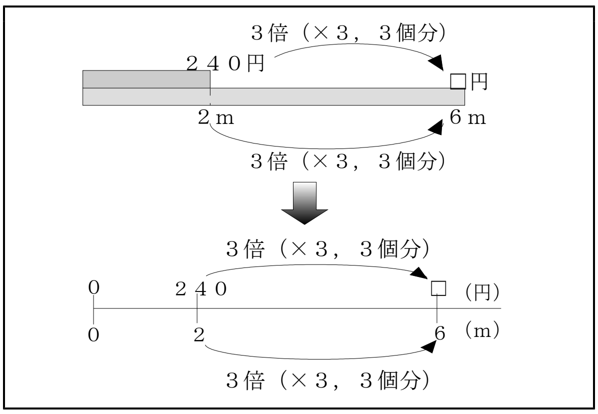
【図３】中村(1996)の数直線モデル

中村(1996)の数直線モデルは，２量の間の関係として存在する「倍」の意味を数直線上に数量として客観化して記述している点で優れている。一方，基準量を数直線上で『１』と見ることは，本質的には，包含除の考え方による測定としての理解を必要とする。また，中村(1996)の数直線モデルは，数直線上でどの２量を間の関係を対象とし比較しているのか分かりづらい面もある。そこで本研究では,「倍」の意味を表現するために矢印を伴った数直線モデルを用いていくこととする。

４．授業実践

4.1.授業の目的

小数の乗法の授業で,「倍」の意味を表現する矢印を伴った数直線モデルをテープ図からの段階的な発展によって導入する。



【図４】テープ図から数直線への発展

矢印は２量の間の関係としての「倍」の意味を表現している。これは，中村(1996)の示した数直線モデルで，３mのときを『１（倍)』とし7.5mのときは『2.5（倍)』と「倍」の意味を数直線上で数量として記述したときよりも，どの２量の間の関係を対象としているか分かり易くし,「倍」の意味を直観的に顕在化するのではないかと考える。それができれば,「基準量×割合（倍)」の意味を子どもたちは構成し，乗法の意味を拡張できるのではないかと考える。このことについて授業を通して検証して行く。

4.2.主要場面の分析と解釈

今回の授業は，2004年５月24日から５月28日までの期間に５時間実施した。子どもたちは,「小数×整数」「小数÷整数」「小数倍」の学習を終えた直後であった。

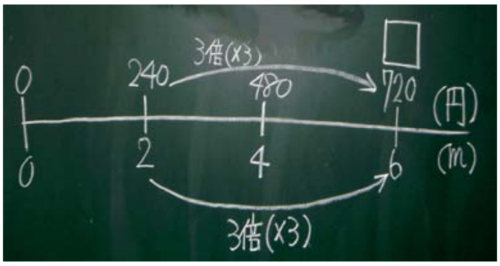
主要場面としては,「整数倍」の意味を構成していく場面,「×小数」の式を考える場面，計算の仕方を考えていく場面,「×純小数」の立式の場面,「小数×小数」の計算式を考える場面を取り上げる。尚，登場する子どもたちの名前は仮名である。

4.2.1.「整数倍」の意味を構成していく場面

問題Ⅰ
２ｍで240円のリボンがあります。
このリボン６ｍのねだんは何円ですか。

子どもたちによる問題Ⅰの自力解決後，教師はいくつかの解答例を何人かの子どもたちに発表させる。その中に記されていた「×３」について「『×３』とはどのようなことなのか」教師は子どもたちに尋ねる。すると子どもたちから「２ｍの値段が３つのこと」「２ｍの３倍が６ｍということ」といった回答がある。教師はそのことを図示するために，まずテープ図を導入する。さらに,「×３」を右向きの矢印で表し「３倍」と記述する。そして，教師と子どもたちとのやりとりの中でテープ図を数直線へと変化させていく。その際，一人の児童が「間もかいちゃった。４ｍで480円。」

と述べるので，教師はその児童に尋ねながらその目盛りと数値も数直線に記す。

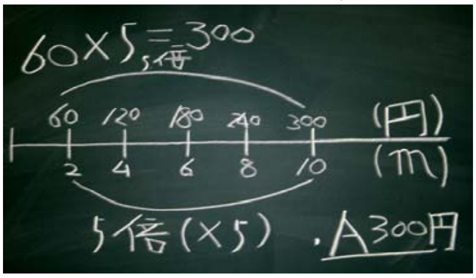


【図５】数直線と「３倍」

続いて,教師は子どもたちに練習問題を課す。

練習問題Ａ ２ｍで60円のリボンがあります。 このリボン10ｍのねだんは何円ですか。

教師は高井を指名し，練習問題Ａの解き方を板書させる。高井は板書後，説明をする。



【図６】高井の板書

*1：高井：式は60×５で，数直線で表しました。２ｍの時は60円，４ｍの時は120円で，10ｍの時は300円になりました。答え300円です。

高井の板書に記された表現から，高井は「５倍（×５）」の意味を「長さが５倍になるから値段も５倍になる」と捉えているように見える。しかし，高井の発言(*1)を考慮するとむしろ「累加」の考え方が強く出ていると捉えられる。

ここで，認識論的三角形を用いてこの場面の高井の立場を捉えてみる。以後，Ⓡは指示の文脈，Ⓢは記号体系，Ⓒは概念とする。

Ⓡ【図６】の間の入った数直線（部分）	⟷	Ⓢ【図６】の弧の入った数直線（全体）
	Ⓒ数直線上の数量関係の捉え〔累加〕	

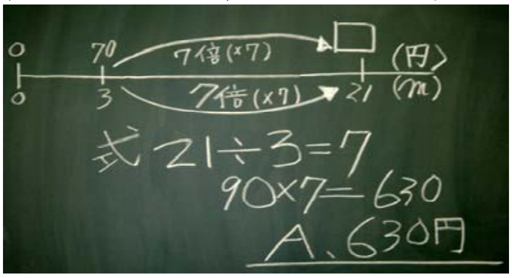
【図７】認識論的三角形と高井の考え

高井は【図６】で,「×整数」を「整数倍」として弧とともに視覚化してはいるが,２量(2ｍと10ｍ；60円と300円)の関係を「累加」として意味づけている。つまり，高井は弧の部分の「５倍(×５)」よりも間の目盛りの数で「５つ分」と考えている。【図６】は，まさに,「累加」の考え方と「整数倍」の考え方の混在した過渡期の表現であると考えられる。

ここで第１時が終了となり，子どもたちは宿題として練習問題Ｂを解いてくる。

練習問題Ｂ ３ｍで90円のリボンがあります。 このリボン21ｍのねだんは何円ですか。

教師は第２時が始まる前に宿題を確認し，代表的な考え方の西脇を指名し，練習問題Ｂの解き方を板書させ，説明を求める。



【図８】西脇の板書

*2：西脇：３ｍの長さは90円。そして21 ｍは□円。90円から□円は７倍。３ｍから21ｍは７倍。式は，21ｍは３ｍの７倍なので×７。３ｍで90円なので，90×７。答えは630 円。

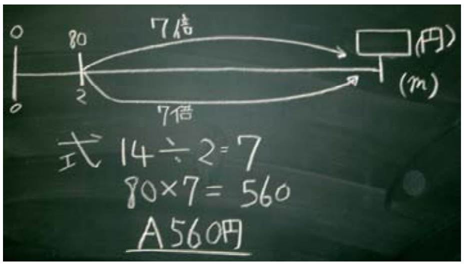
この西脇の発言(*2)は注目に値する。なぜなら，高井が２量の関係を「累加」の考え方で意味づけていたのに対し，西脇は「整数倍」の考え方で意味づけていると捉えられるからである。

続く練習問題Ｃでは，教師は「なるべく数直線を用いて考えてみよう」と指示し，取り組ませる。

練習問題Ｃ ２ｍで80円のリボンがあります。 このリボン14ｍのねだんは何円ですか。

教師は子どもたちの解決の様子を確認した上で，代表的な解き方をしている中代を指名

し板書させる。



【図９】中代の板書

答えの確認後，中代のかいた数直線を用いて，数直線をかく上での注意点，「矢印は『もと』にする量から出ていること」や「間の目盛りや数値がかかれなくなってきていること」を教師と子どもたちとで振り返る。

西脇や中代は，練習問題Ｂ・Ｃの解決を通して，【図８】【図９】の数直線のように，「×整数」を「整数倍」で視覚化することに慣れてきていると捉えられる。

この場面の西脇や仲代の立場を認識論的三角形で捉えてみる。

Ⓡ【図８】【図９】の数直線　　Ⓢ式（×整数）

ⓒ数直線上の数量関係の捉え〔整数倍〕

【図10】認識論的三角形と西脇・仲代の考え

ここでは，数直線を指示の文脈として，式との間に「基準量×割合（整数倍）」の意味を構成していると捉えられる。それは，西脇の発言(*2)や【図８】【図９】の数直線で，【図６】の数直線に見られた間の目盛りや数値が捨象されていること，矢印も確実にかけていること，求めるべき値段が□で表されるようになってきていることに見られるように，数直線自体が洗練されてきていることから裏付けられる。

4.2.2.「×小数」の式を考える場面

教師は，次の練習問題Ｄの数値を子どもたちに決めさせる。

*3：Ｔ　：はい，数字…だれか言ってくれる人？じゃ，森本さん。
*4：森本：４ｍで150円。
*5：Ｔ　：４ｍで150円。何m分求めましょうかね…。はい，南谷さん。
*6：南谷：はい。えとー…23m？
*7：Ｔ　：23m！
*8：Ｓｓ：うわー（どっとざわめく）
*9：Ｔ　：23mはちょっと難しいかもしれないね。23はちょっと難しい…。
*10：南谷：…24m。

練習問題Ｄは以下のように設定される。

練習問題Ｄ
４ｍで150円のリボンがあります。
このリボン24mのねだんは何円ですか。

練習問題Ｄの答えの確認が済んだ後，教師は，南谷が「23ｍ」と述べた時のことについて子どもたちに問いかける。

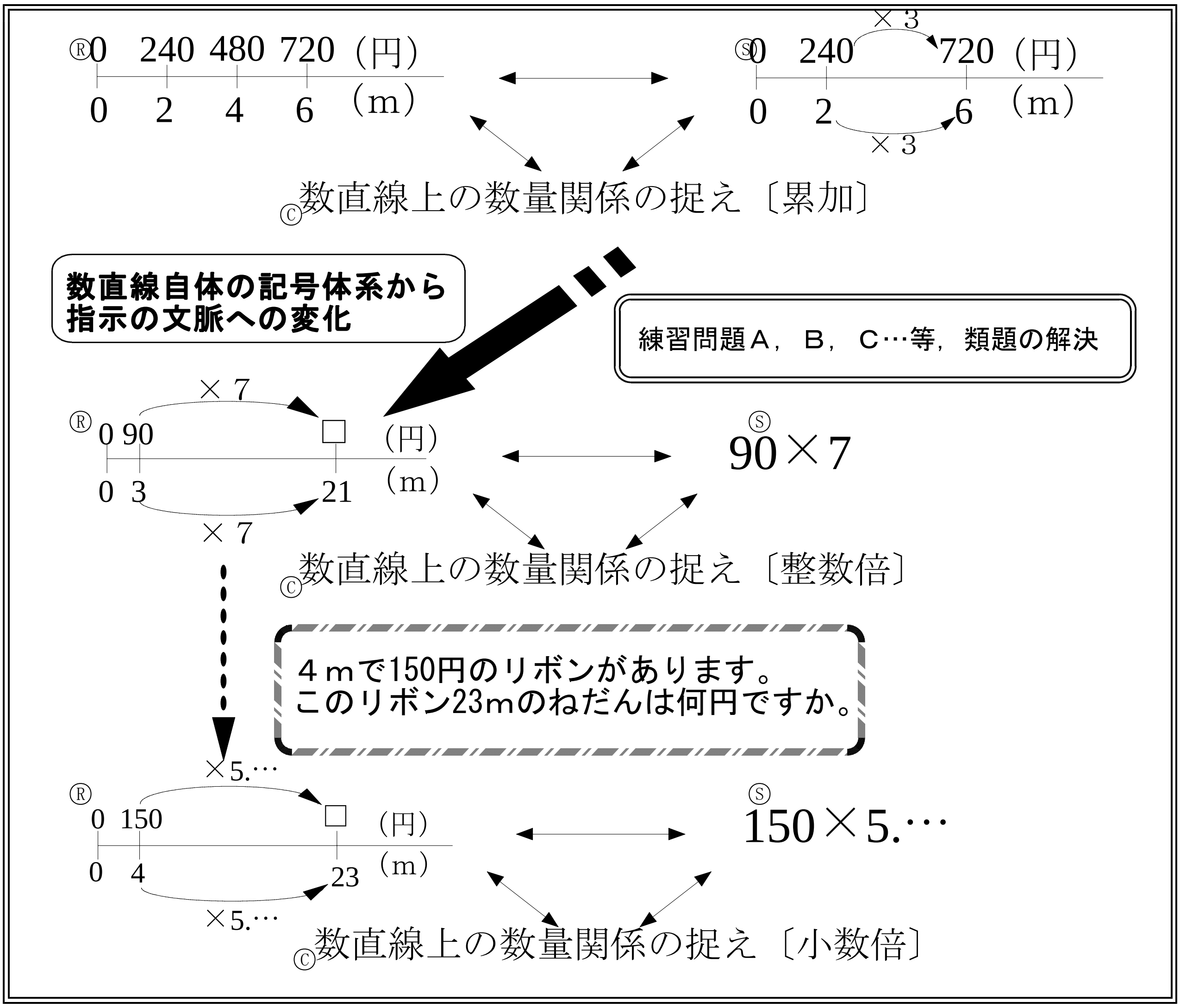
*11：Ｔ　：南谷さんが23mって言った時に，先生，止めたよね。これには理由があるんです，実は…。
*12：野末：分かった。分かった。
*13：Ｔ　：え？
*14：前野：できない。
*15：Ｔ　：できない？本当？保倉さん何で？
*16：保倉：はい。23mだと，答え…，あの…，倍の計算の答えが小数になっちゃう。
*17：Ｔ　：小数になっちゃうんか。小数だとできなそう？
*18：野末：整数で割り切れないって言うんだ…。
*19：Ｔ　：あれ？整数で…整数で割り切れない？
*20：野末：うん。整数で割ると小数になるから…，小数が…だから出る。
*21：Ｔ　：うん。小数…，何？前野さん何？
*22：前野：小数できる。
*23：Ｔ　：小数できる？小数になってもできる？本当？みんなはどう？
*24：斉木：うーん，なんとなく…難しそう。

ここで，第２時が終了したため，教師は，それ以上の追求をやめる。

南谷の発言(*6)は，教室内に大きなざわめきを引き起こした。このざわめきが起こったわけは，ざわついた子どもたちが，「４ｍ」と

「23m」の間の関係を「倍」で意味づけたときに，それまでと異なり「倍」を表す数値が整数にならないことに気付いたからだと考えられる。このことは，保倉の発言(*16)から裏付けることができる。この場面は偶然「×小数」が出てくる場面で，前野は「できる」(*22)斉木は「難しそう」(*24)と述べているが，２人とも「×小数」が出てくるということを認識していると考えられる。そうでないと「できる」「難しそう」とは言えないからである。前野や斉木は，何を根拠にかけ算の式に「×小数」が出てくると考えたか。どのようにしてそのような認識が可能になったのか。１つはこれまでの立式のパターンが考えられる。もう１つは立式の意味を支えている数直線上の関係が考えられる。前野と斉木はその根拠としているものは違うかもしれないが，２人とも「×小数」について意識しているという点では同じ認識の状態であると捉えられる。この場面では，整数倍を掛ける意味を捉えるための新しい表現（記号体系）として導入された数直線が，問題を解く過程でだんだんと親しみのある表現（指示の文脈）へと発展し，小数倍を掛ける意味を捉える上でも指示の文脈として機能していることを示唆している。

この場面の前野や斉木の考えに基づく指示の文脈の変化を捉えてみる。

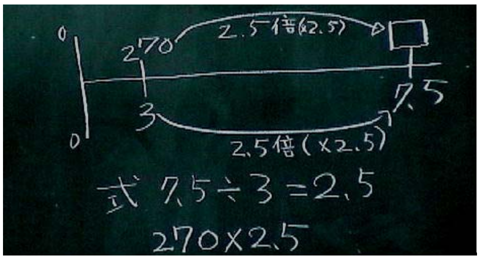


【図11】前野・斉木の考えに基づく指示の文脈の変化

このことは，第３時で問題Ⅱの解決を図った時により明らかになる。

問題Ⅱ ３ｍで270円のリボンがあります。 このリボン7.5ｍのねだんは何円ですか。

問題Ⅱの自力解決後，教師は小森を指名し，板書させ，説明させる。



【図12】小森の板書

*25：小森：7.5÷３で倍を出して2.5なので，もとの数の270と倍の2.5を掛けてこういう式にしました。

１ｍの値段を求める方法の式については新滝が「270÷３＝90で90×7.5」と述べる。そして教師は，２つの式の正当性について子どもたちに尋ねる。

*26：Ｔ　：2.5のところあるいは7.5のところ，これ何倍って言うの？何倍って変だな…これ（乗数）今までは…どう？
*27：野末：整数だった。
*28：南谷：それが小数になった。
*29：野末：小数の…。
*30：Ｔ　：小数になったね。
*31：斉木：小数点！
*32：Ｔ　：うん。式はでもこれで…
*33：南谷：あってる。
*34：野末：あってる。

「270×2.5」の式は，【図12】の数直線が示されて，子どもたちに容易に受け入れられた。これは発話［*26-*34］から捉えられる。この事実は，【図12】の数直線が子どもたちの指示の文脈として機能していることを示している。このことは小森の発言(*25)で裏付けることができる。

「×整数」を「整数倍」の関係として捉えることを子どもたちに促すために数直線を導入した。最初の段階では，数直線は新しい記号体系で，記述上は「累加」の関係が残り，「基準量×割合(整数倍)」の意味づけは曖昧だった。やがて，数直線の中から「累加」の関係が間の目盛りの捨象等とともに抜け，矢印による「基準量×割合（整数倍)」の意味づけができるようになり，数直線が指示の文脈として機能するようになった。そして，これをもとに子どもたちは新しい表現である「×小数」の式を「基準量×割合（小数倍)」として意味づけができるようになった。

このことが示唆することは，小数の乗法の意味を構成するためには数直線を指示の文脈として子どもたち自身が十分に発展させていくことが大切となるということである。

4.2.3.計算の仕方を考えていく場面

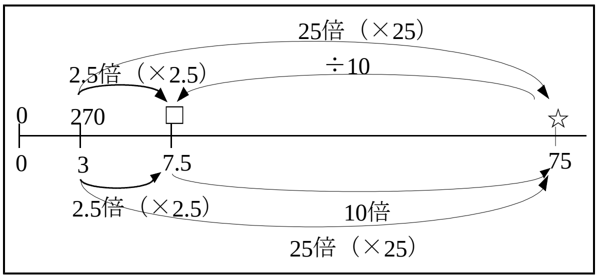
「270×2.5」「90×7.5」と立式した後，教師は子どもたちに式を計算で説明するよう促す。教師はしばらく子どもたちの計算の仕方の様子を見る。子どもたちの計算の仕方は筆算の形式でかかれているものが多い。教師は，筆算の形式で考えていこうとしている子どもたちを誉め，さらに，筆算の形式で計算してよい理由を尋ねる。前野や野末はその理由を述べるのではなく，どのようなやり方で答えを出すのかを説明する。その応答中，前野や野末の考えを教師は板書する。

$$\begin{array}{r} 270 \\ \times\ \ 2.5 \\ \hline \end{array} \quad \underset{\xleftarrow{\div 10}}{\xrightarrow{\times 10}} \quad \begin{array}{r} 270 \\ \times\ \ 25 \\ \hline \end{array}$$

【図13】前野や野末の考えによる筆算形式

このクラスでは，「小数×整数」の時に「被乗数を10倍して整数にして『整数×整数』で計算をして積を出し，その積を10で割ると正しい答えになる」という方法を当然のこととして使用している様子が見られた。「×10して÷10したら答えはかわらない」という考え（以後「×10÷10方式」）に支えられて【図13】の表現をつくり出したと考えられる。

この後，教師は，「×10÷10方式」とは何をやっていることなのか説明するために数直線を用いる。教師は，子どもたちとのやりとりの中で数直線を完成させる。



【図14】「×10÷10方式」を説明するための数直線

【図14】が示された後，野末は「横から見た目」，前野は「うわー，かわいそう。いっぱい走らなくちゃ…」と述べている。この発言から，野末や前野にとっては，この数直線があまり重要でないものと映っていると捉えることができる。つまり，【図14】は「×10÷10方式」の意味構成を促す指示の文脈とならない難しいものとなっていると考えられる。

この後，第４時では，「×10÷10方式」と「÷10して×10したら答えはかわらない」という考え（以後「÷10×10方式」）について意味構成を図るために計算式を導入し，計算式そのもので考えていく。まず，「270×2.5」について答えを求める。計算式①は子どもたちとのやりとりの中で教師が板書したものであり，計算式②は前野が板書したものである。

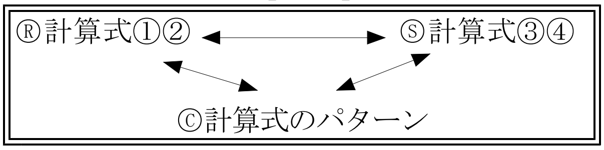
270×2.5＝270×(2.5×10)÷10
＝270×25÷10
＝6750÷10
＝675・・・・・〔計算式①〕
270×2.5＝（270÷10）×(2.5×10)
＝27×25
＝675・・・・・〔計算式②〕

続いて，「90×7.5」の式の答えを求めていく。計算式③を仲代が，計算式④を雨崎が板書する。

90×7.5＝90×(7.5×10)÷10
＝90×75÷10
＝6750÷10
＝675・・・・・〔計算式③〕
90×2.5＝（90÷10）×(7.5×10)
＝9×75
＝675・・・・・〔計算式④〕

計算式を用いて子どもたちはまず最初に「270×2.5」の正答を導き，続いて「90×7.5」の正答を求めた。ここでは，計算式①②を参照しながら，計算式③④を記述したと考えられる。

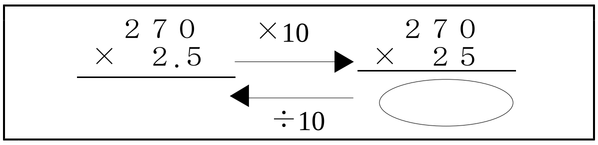
この場面の仲代や雨崎の立場を認識論的三角形で捉えてみる（【図15】参照)。



【図15】認識論的三角形と仲代・雨崎の考え

その後，いくつかの類題に関して，教師は計算式を主に用いて答えを求めるよう子どもたちに指示する。ほとんどの子どもたちは計算式によって正答を導くことができるようになる。

子どもたちは，最初，筆算で答えを求めた。その理由を尋ねると，【図13】のように計算していることが授業の中で浮かび上がった。



【図13】前野や野末の考えによる筆算形式

そこでは，数直線は参照されなかった。そこで教師は，筆算形式が示す「×10÷10方式」の意味を捉えさせようとして数直線をかき説明をした。しかし，それはむしろ子どもたちを混乱させる結果となった。一部理解できた子どもたちもいたが，大半の子どもたちにとっては，数直線による説明はむしろ難しかったと見受けられた。そこで，計算式そのものによってパターンを捉えさせ，「×10÷10方式」「÷10×10方式」の意味構成を図っていった。

この場面が示唆することは，教師が期待していた指示の文脈で意味づけを図るよりも，

もっと柔軟に子どもたちが持っている指示の文脈を見極めていくことが授業展開の瞬間瞬間で大切になってくるということである。この場面では，子どもたちのアイディアそのものではないが，そのアイディアに近い計算式を用いながら指導が展開していった。

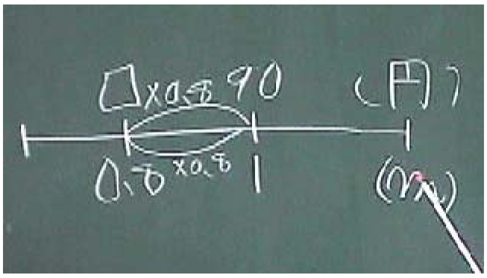
何が指示の文脈になるかは教師が決めるものではなくて，むしろ子どもたちが決めることであるということである。より便利なもの，より分かりやすいものがあればそれをむしろどんどん取り入れていくべきである。子どもたちの指示の文脈は，子どもたちが対象を理解しようとするときに，参照しうる身近で親しみのあるもの（岩崎, 1998）であるから，教師はそれらを柔軟に見取らなければならない。

4.2.4. 「×純小数」の立式の場面

第５時では，子どもたちは純小数を掛けることになる問題Ⅲを解いていく。

問題Ⅲ
１ｍで90円のリボンがあります。 このリボン0.8ｍのねだんは何円ですか。

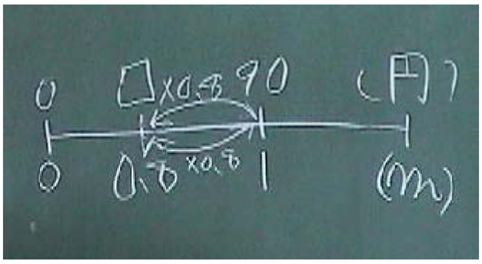
教師は，山川を指名し数直線を板書させる。最初，山川の数直線には，矢印の向きが示されない。



【図16】山川の板書した数直線①

教師は矢印がどちらを向くのか全体に問いかける。前野や山川はすぐさま「左」と述べる。一方，教師は他の子どもたちにもさらに尋ねる。斉木は「右に付けた」と述べる。教師は「左に向いている方がいいのはどうしてか」全体に尋ねると，高井は「右に行ったら0.8ｍの値段が分からなくなっちゃう。」と答える。この発言は，基準量（90円）を意識していて，求めるべき比較量（0.8ｍの値段）が基準量より小さくなることを捉えた上での発言であると考えられる。

教師は，この言葉を受けて【図16】の弧に左向きの矢印をかきこむ。



【図17】山川の板書した数直線②

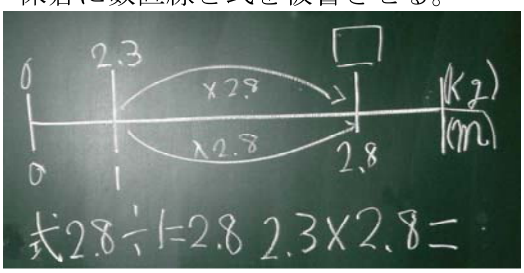
この場面で，矢印の向きが左右に分かれる。これは，「純小数倍」を捉えられる子どもと捉えられない子どもが出てきたということである。換言すれば，「×整数倍」「×小数倍」を捉える上で，ほとんどの子どもたちの指示の文脈となっていた矢印を伴う数直線が，「×純小数倍」を捉える上では，指示の文脈として機能したりしなかったりしたということである。子どもたちには，数直線上で「倍」を表現する左向きの矢印と「倍」は増えるという信念に基づく右向きの矢印のイメージとの間の葛藤があるように思われた。

4.2.5. 「小数×小数」の計算式を考える場面

問題Ⅲの解決が済んだ後，教師は問題場面を変えて問題Ⅳを示す。問題Ⅳはパイプの長さと重さの関係についての問題であるため，比較的比例関係の捉えやすい問題である。

問題Ⅳ
１ｍで2.3kgのパイプがあります。 このパイプ2.8ｍのねだんは何円ですか。

教師は，子どもたちの解決の様子を見ながら，保倉に数直線と式を板書させる。



【図18】保倉の板書

保倉の示した「2.8÷１＝2.8」の式は重要である。なぜなら，この式は２量の間の関係である「倍」の意味を捉えていることを明らかにしていて，「倍」の意味による乗法の意味の拡張が実現されている１つの証拠として考えられるからである。

教師は，答えを求める計算式を荒木と山川に板書させ説明させる。

〔荒木の場合〕

2.3×2.8＝2.3×(2.8×10)÷10
＝2.3×28÷10
＝64.4÷10
＝6.44・・・・・〔計算式⑤〕

*35：荒木：私は×10÷10をしました。2.3×2.8の2.8を10…，×10して，2.3×28をして，答えは64.4になって，それを÷10して答えがでました。

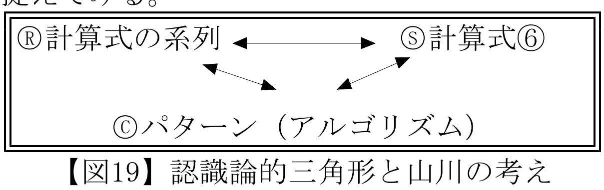
〔山川の場合〕

2.3×2.8＝（2.3×10）×(2.8×10)÷100
＝23×28÷100
＝644÷100
＝6.44・・・・・〔計算式⑥〕

*36：山川：ぼくは，２回…２回「×10」したから「÷100」にしました。

荒木も山川も，「整数×小数」のときに行った計算式をもとに「小数×小数の式」の計算の仕方を考えている。詳述すれば，荒木は計算式①③が示すパターンそのものによって「小数×小数の式」の計算の仕方を考えているのに対し，山川は計算式①－④から示唆されるより一般的なパターン（アルゴリズム）によって「小数×小数の式」の計算の仕方を考えていると考えられる。このことは山川の発言（*36）から捉えられる。

この場面の山川の立場を認識論的三角形で捉えてみる。



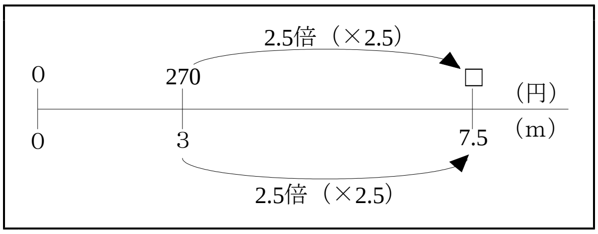
【図19】認識論的三角形と山川の考え

山川は，計算式①－④の習熟の中で，計算式そのものが身近な分かりやすい表現となり，アルゴリズムに近いパターンの意味を自分自身で構成したと考えられる。

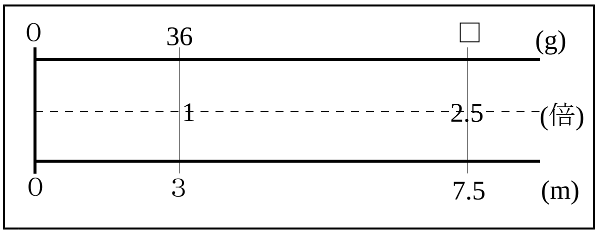
4.3.考察

4.3.1.数直線と立式について

本研究では，「基準量×割合（倍）」で小数の乗法の意味づけをする立場に立ち，小数の乗法の授業を展開した。その中では，実体のない数学的概念である「倍」を『矢印』で表現した数直線モデルを用いた（【図20】参照）。これは，中村（1996）の数直線モデルとは異なるものである（【図21】参照）。



【図20】本研究の数直線モデル



【図21】中村(1996)の数直線モデル

本研究の数直線モデルは，「基準量×割合（倍)」の関係が非常に直観的に示されている。その上で，「基準量×割合（倍）」の関係がより意識的になるように数値設定された類題を何問も解決しながら数直線を表現すること自体に習熟し，「もとめる長さをもとの長さで割った数値が倍となる」ということを何度もやりながら子どもたちは「倍」の意味を捉えていった。

授業実践の中で子どもたちの用いた表現から判断すると，倍の意味を顕在化したり「基準量×割合（倍)」の関係で乗法の意味を拡張したりすることにおいては，本研究の数直線モデルは非常に分かりやすく有効であったと考える。

一方，純小数倍を掛ける立式の場面では，本研究の数直線の限界が指摘される。その限界とは，矢印によって純小数倍を直観的に表現することができない点にある。本研究の数直線で純小数倍の意味を構成するためには，矢印の向きの逆転現象を考慮に入れたり，「倍は増加する」という暗黙のうちに了解されている信念を「減少する倍（純小数倍）もある」と子どもたち自身が納得して認識を変えたりしなければならない。このことは，矢印によって表現された２量の間の関係としての「倍」の意味をより一般化して構成できた上で可能であると考えられ，中村(1996)の数直線モデルと比較すると，むしろ子どもたちに認識の負担を強いることになると考えられる。

4.3.2. 数直線と計算の仕方について

今回の授業実践では，子どもたちは「×小数」の立式ができたら，子どもたちが当然のこととして使っている計算のきまり（【図13】；筆算形式）を用いて考え，正答を導いた。このように子どもたちが考えたのは，それまでにいろいろな式の構造を捉えることをやって来ていたからである。故に，数直線を参照しながら意味を考えるよりも計算のきまりを参照して計算の仕方を捉える方が有利であったと考えられる。そう考えると，計算の仕方を考える段階では，数直線で「0.1の時に……で，10倍すると……で」というような意味づけを図ることに固執するのではなく，形式的なものでも子どもたちにとって身近なものとなっているものをもっと積極的に利用してもいいと考えられる。そしてこのことは「式」を単に計算の対象としてではなく，関係を捉えるための対象としてみていくことに繋がり，抽象化された数学の世界への足掛かりとなると考えられる。

その意味で，計算の仕方を考える場面では，数のパターンや構造等，関係自体を捉えるために，いろいろな数値で遊んだり，確かめたりする中で，数の操作を豊かにしておくことは重要である。単に計算をやらせるのではなく，その計算にも構造を捉えられるような意図を組み込み，継続的に実施してくることで，数の操作の感覚が豊かになり，式で表現される数の関係それ自体が，小数を掛ける場面においても「計算の仕方はどうすればよいか」という場面において指示の文脈として機能するであろう。

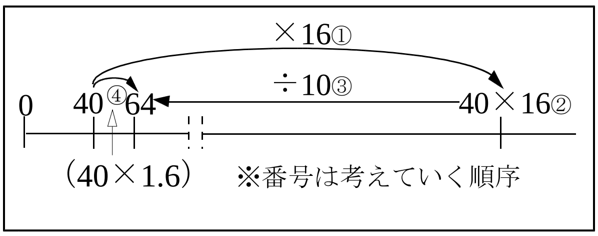
その上で，「それで本当にいいのか」という側面についても授業の中では議論したい。以下は授業で正答が導けるようになってからの展開である。次の例題で考えて見る。

例題
２ｍで40円のリボンがあります。
このリボン3.2ｍのねだんは何円ですか。

問題文の数量の関係を数直線に表してみると，求める値段の式は「40×1.6」となる。これは，整数の場合と同じように数直線を示して考えれば説明がつく。一方，「40×1.6」の式の正答を求めることは，小数が入っているので直接は計算できない。そこで，1.6に10をかけて16にし，「40×16」という整数のかけ算で積を求めて，その積を10で割ることで求めたい答えが出せると考えていく。

$$
\begin{aligned}
40\times1.6 &= 40\times(1.6\times10)\div10\\
&= 40\times16\div10\\
&= 640\div10\\
&= 64
\end{aligned}
$$

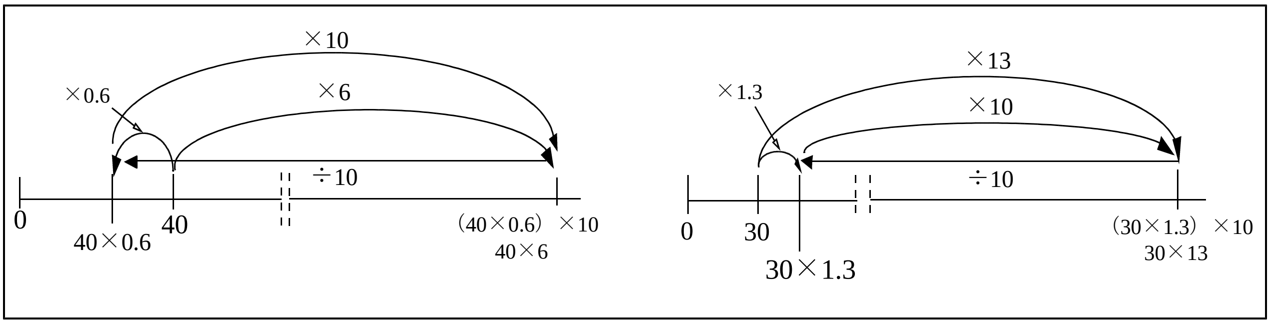
数直線上で確かめていくと，「40×16（1.6×10）÷10」は64となる。ここで，40と64の関係は40をもとにすると64は1.6倍の関係になっている。だから，「40×16（1.6×10）÷10」の式は「40×1.6」の式を計算したことになると言える。これは，事実と一致している。



【図22】「×10÷10方式」の確かめの例

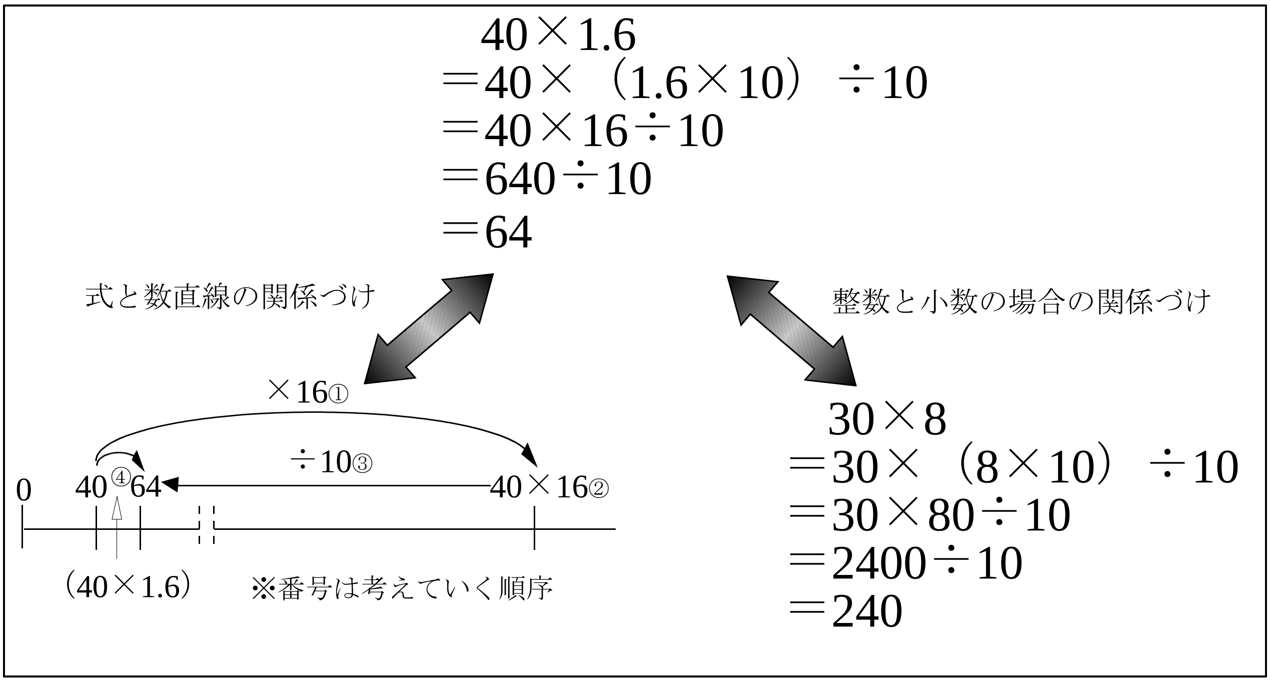
「40×1.6」と「40×16÷10」が等しいということは結果が一致するということによって正しいと言えるが，「『×10÷10方式』がどうして常に成立するのか」「その方式が常に正しい答えを導くのはどうしてなのか」という問題が残る。その一般化のプロセスについての理解が成されないと，例えば「30×1.3」の時にも「×10÷10方式」を使って正答となることを【図22】のように１つ１つ説明しなければならなくなる。

子どもたちは，【図23】に示すように，「×10÷10方式」でいつも同じ結果（正答）が示されることをいくつかの例を通して一般化して理解することができると考える。



【図23】「×10÷10方式」でもとに戻る例

これまでの指導では「数直線から計算の仕方を考える」というように一方通行であったと反省する。数直線だけで何とかしようとするのではなく，式表現を媒介とした数の関係も用い，それらを対比させながら２つの間の関係を付けていくようにすることもできる。その前段として，整数の段階で「×10÷10方式」の関係を作ることも重要になってくる。



【図24】計算の仕方を考えるための相関図の例

「×10÷10方式」を子どもたちが分からないものとして見なし，それを導くように数直

線を使っていくよりは，「×10÷10方式」は分かっているので，それをよりはっきり意味づけるための補助的な表現として数直線を活用することもできるであろう。

５．本研究のまとめと今後の課題

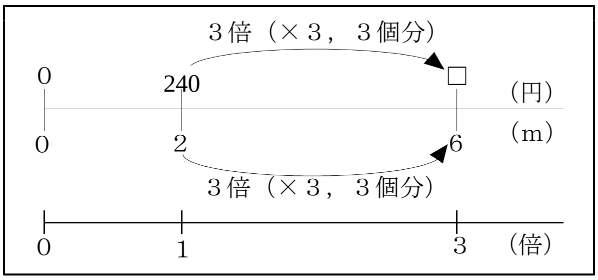
小数の乗法の授業設計において示唆される本研究の主要な結論は以下の通りである。

①倍の意味を媒介する表現である数直線自体を自明のものとするのではなく，それ自体を指示の文脈として意図的に発展させる。特に，子どもたちにとって身近な整数倍を扱う問題場面を設定し，多くの類題を考えさせ，数直線を表現することに慣れるまで時間をかけることが重要である。

②子どもたちにとって指示の文脈となりうるものは何なのかということを常に授業のプロセスの中で見極めていく柔軟さが必要である。特に，子どもたちが好んで選ぶもの，それが優先されなければならない。

③指示の文脈としての表現は，子どもたちのイメージと整合する場合には，子どもたちを助けるが，整合しない場合には，むしろ混乱させる結果となる。したがって，その表現方法の開発が非常に大切になってくる。

③に関連して，本研究の場合，計算の仕方を考えたり，純小数倍を扱う問題場面にも対応できたりするように，（倍）を表すもう１本の数直線を付け加えて，その表現方法を発展させるということが考えられる。



【図25】数直線の発展的例

これらの結論は，「記号体系と構造上の指示の文脈の間の生産的な『緊張』を創り出すことが必要であり，また，この緊張を発展させ，維持することが必要である」(Steinbring, 1997) ことや「生徒たちの『指示の文脈』を見極め，それを発達させる」（岩崎, 1998）ことに通じ，同氏等の主張を支持するものとなる。一方で，指示の文脈を慎重に見極め発達させようと教師が意図しても，子どもたちの用いた表現の方がより分かりやすい場合もあることが今回の実践では明らかになった。そのような場合には，より分かりやすい表現を指示の文脈として発展させていくよう授業を修正し，子どもたちの意味の構成を促していくことが必要となるという知見を得た。

また，本研究を通して，指導そのものに対する教師の姿勢に関する以下のような示唆を得た。

○教材を認識論的視点から深く分析し，子どもたちの困難を想定しておくことが非常に重要である

○子どもたちがどのように理解しているのかを掴むために，教師と子どもたちとの対話や議論を活発にし，その時には，教師はできるだけ『聞く姿勢』を保つべきである

本研究の示唆に基づき，小数の乗法の授業の展開を再構成し，その展開の有効性を検証すること，さらに，「小数の乗法」以外の教材における子どもたちの意味の構成に関しても焦点をあて，指示の文脈となりうる表現を開発していくことが今後の課題である。

【引用・参考文献】

岩崎　浩.(1998).メタ知識を視点とした授業改善へのアプローチ－「指示の文脈」と「記号体系」との間の相互作用－.全国数学教育学会誌,数学教育学研究,4,pp.83-103.

岩崎　浩.(2003).メタ知識の構造化，意味の明確化の試み－概念の相補性の視座から－.全国数学教育学会第 17 回研究発表会配付資料.

榎薗高士他.(1983).関数の考えを用いた乗法の指導(5 年小数のかけ算)－数直線を使った指導を通して－.日本数学教育学会誌,65(6),pp.34-38.

国立教育政策研究所.(2003).平成 13 年度小中

学校教育課程実施状況調査報告書－小学校算数－.東洋館出版社.

白井一之他.(1997).乗法・除法の演算決定にはたらく数直線の指導.日本数学教育学会誌,79(6),51-56.

杉山吉茂(1987).公理的方法に基づく算数・数学の学習指導.東洋館出版社.

中島健三.(1968a).乗法の意味の指導について.日本数学教育会誌,50(2),pp.2-6.

中島健三.(1968b).乗法の意味についての論争と問題点についての考察.日本数学教育会誌,50(6),pp.2-5.

中島健三.(1980).算数・数学教育と数学的な考え方－その進展のための考察＜第２版＞.金子書房.

中村享史.(1996).小数の乗法の割合による意味づけ.日本数学教育学会誌,78(10),pp.-13.

平林一榮.(1994).算数教育における数学史的文章題－「量」に関して－.皇學館大學出版部.

文部省.(1986).小学校算数指導資料　数と計算の指導.大日本図書.

文部省.(1989).小学校学習指導要領指導書　算数編.東洋館出版社.

文部省.(1999).小学校学習指導要領解説　算数編.東洋館出版社.

山本正明.(1995).問題解決における数直線や線分図等の図の効果.日本数学教育学会誌,77(8),pp.2-9.

C.K.オグデン,I.A.リチャーズ（石橋幸太郎訳）.(1967).意味の意味(第１刷).ぺりかん社.

Steinbring,H.(1997).Epistemological Investigation of Classroom Interaction in Elementary Mathematics Teaching. *Educational Studies in Mathematics*, *32(1)*, pp.49-92.

Steinbring,H.(1998).From“Stoffdidaktik”to Social Interactionnism:An Evolution of Approaches to the Study of Language and Communication in German Mathematics Education Research.*Language and Communication in the MathematicsClassroom,NCTM,Reston,Virginia*, pp.102-119.

Steinbring,H.(2000).Interaction Analysis of Mathematical Communication in Primary Teaching:The Epistemological Perspecive.*Zentralblatt für Didaktik der Mathematik,32(5)*, pp.138-148.