上越数学教育研究，第 20 号，上越教育大学数学教室，2005 年，pp.183-194.

文字式の理解に関する背景的・根源的要素についての研究

古川　真哉
上越教育大学大学院修士課程 1 年

１．はじめに

文字式の学習に困難を示す生徒は少なくない。そのような状況から，文字式の重要性を示し，その指導の改善の方向を示唆する研究は数多い（杜威,1991；三輪,1996；藤井,2002；他）。しかし，それら研究成果が十分に蓄積されている現在においてもなお，文字式に関する研究論文が数多く提出されている。このことはいったい何を意味するものであろうか。

本研究においては，特に生徒が文字式を理解するために何が必要とされるのだろうかという問題意識を根底に置き，それらを文字式の理解に関する背景的・根源的要素と呼び，その解明に迫ることを目的とする。

２．理解について

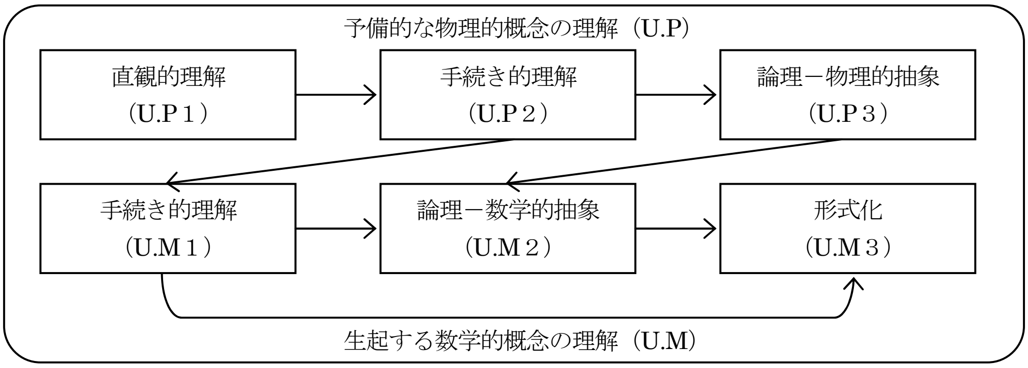
理解にはシェマと呼ばれるような前提となるものが必要とされ，その前提となるものと理解の対象とが認知的に結びつくことによって理解が達成されるものと考えられている（小山,1992；R.R.Skemp,1992）。

また，理解には様々な様相がある。R.R.Skemp(1976)が，理解を「用具的理解(Instrumental Und.)と関係的理解(Relation Und.)」とに区別したことを皮切りに，様々な理解の捉えや理解のモデルが提唱されている（R.R.Skemp,1979 ； N.Herscovics & J.Bergeron, 1983；他）。

いずれにせよ，理解には段階や水準といった類のものが存在し，その間を行き来しながら理解が深まっていく現象として捉えられる。この理解の捉えから注目しているのが，Herscovics & Bergeron（1989）が提唱する理解の二層モデル（【図１】）である。理解には前提があるという本研究の立場と一致しており，理解の段階などをその過程として捉えることができるモデルである。

2.1　Herscovics & Bergeron の理解の二層モデル

Nantais & Herscovics(1989)は，Herscovics



【図１】Herscovics と Bergeron の理解の二層モデル

& Bergeron(1988)の提唱する二層モデルに基づき，乗法の初期学習における理解過程を具体的場面から実証しているのである。それによると，

> いくつかの数学的概念の構成は，理解の二層モデルで示される。第一層は予備的な物理的概念の理解を示し，それに基づき第二層で生起する数学的概念の理解が同定される。

この理解の二層モデルについて，中原(1995)は以下のように概括している。

＜第一の層＞予備的な物理的な概念の理解（以下，U.P）の構成要素

直観的理解（以下，U.P１）

手近にある観念の全体的知覚に関わる理解。本質的に視覚的知覚に基づく考え方に起因する。およその，数的でない近似が与えられる。

＜例＞乗法場面とそうでない場面との判別。配列が異なっている２つの乗法場面，例えば下の２つの場面の視覚的比較等。

○　○　○　○　　　○ ○ ○ ○ ○
○　○　○　○　　　○ ○ ○ ○ ○
○　○　○　○　　　○ ○ ○ ○ ○

手続き的理解（以下，U.P２）

学習者が U.P１と関連づけることができ，また適切に使うことができるような，論理－物理的手続きの獲得に関わる理解。

＜例＞加法的場面の乗法的場面への変換。１対多対応的乗法（同数個ずつ配分）場面と１対１対応的乗法（１つずつの同数回の配分）場面との関連づけ等。

論理－物理的抽象（以下，U.P３）

論理－物理的不変性の構成，論理－物理的変形の可逆性と合成，そしてそれらの一般化に関わる理解。

＜例＞多様な乗法的配置における全体の不変性の構成。例えば，１２個のおはじきの２×６，３×４，４×３等々の配置における不変性の構成，おはじきを用いた，乗法の分配法則の理解等。

＜第二の層＞生起する数学的概念の理解（以下，U.M）の構成要素

手続き的理解（以下，U.M１）

学習者が，基礎をなす準備的な物理的な概念と関連づけることができ，適切に使うことができ，明白な論理－数学的手続きの獲得に関わる理解。

＜例＞数直線や図などを利用して，３飛び，４飛びで全体の個数を求めること。累加の使用等。

論理－数学的抽象（以下，U.M２）

論理－数学的不変性の構成，論理－数学的可逆性と合成，そしてそれらの一般化などに関わる理解。

＜例＞具体物に頼ることなく，乗法の結果の一意性やある数の因数への分解，加法に対する乗法の分配法則などの獲得に関わるもの。

形式化（以下，U.M３）

数学的概念をきちんと定義すること。手続き的理解や抽象の結果を数学的な記号で表すこと。公理化や数学的証明を行うこと。

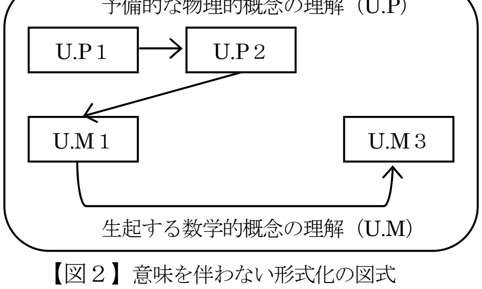
＜例＞４×３，○×（△＋□）＝○×△＋○×□などと表すことに関わるもの。

2.2　理解の二層モデルが示す危険性

なお，Herscovics らはこのモデルで注意すべき点として次のことを挙げている。

> 予備的な物理的概念の理解の段階での３つのレベルは線形的であり，この手続き的理解なしには論理－物理的抽象は期待できない。（中略）生起する数学的概念の理解に移るのは予備的物理的概念理解の完成を待つ必要はなく，しかも数学的概念理解の３つのレベルは非線形的であり，形式化は論理－数学的抽象を待つまでもない。

このことは次のような危険性を伴うことを指摘していることになる（【図２】)。



【図２】意味を伴わない形式化の図式

ともすればこの図式は現在の教育現場での

問題点をあからさまに表しているものではないであろうか。意味の伴わない手続きのみの習得を急ぎ「できた」からといって満足してしまう，そんな状況があり得るということである。Herscovics も次のように警告している。

内容を伴わない形式は無意味であり，早すぎる形式化，不当な形式化は関係的理解の逆効果になる。

３．文字式固有の理解について

3.1　国宗ら(1997)の研究より

国宗らは「文字や文字式について理解している」ことを次のように捉えている。

・数量や数量の関係を文字式によって表現できる。
・文字式の計算ができる。
・数学学習における文字や文字式を使うことの意義を理解し，実際に文字式をいろいろな場面で利用することができる。

さらに，文字や文字式をどのように理解しているかを捉えるには，次の 1)～4) について検討することが重要であるとしている。

1)数量や数量の関係を文字式によって表現すること　「表現」
2)文字式を計算すること　「計算」
3)文字式の表す内容を読み取ること　「読式」
4)文字を変数としてとらえるということ　「変数」

数多くの調査や実験授業等から分析・考察を加え,「変数」についての理解という側面を考慮しながらも，文字式の基本的な内容についての理解を「計算」「表現」「読式」の３つの能力で捉え，子どもの発達水準を４つの段階に定めている。文字の学習を始めた最初の段階では，文字に対する抵抗が大きいが，そのうち「計算」の力がつき，しだいに「表現」「読式」の能力が高まり，いろいろな文字利用の場面を通して徐々に「変数」についての理解が深まるようになることを示している。

3.2　大塚(2004)の指摘

大塚は, 文字式のよさを一般性のみならず, 形式性，構造性をも含めてよさとし，生徒が文字式のどのようなよさをどのように認識しているのかを調査研究した。それによると，生徒は文字式の一般性の指摘は難しいが，形式性や構造性は指摘しやすいこと，文字式のよさを指摘できない生徒は文字式の表現力と読式力が不足していることなどを統計的に示している。それらから文字式指導への示唆として次の２点を挙げている。

・一般性だけを強調するのではなく形式性や構造性を積極的に認めること。
・さらに文字式の計算力だけでなく，同時に特に表現力と読式力を高めることに力点をおくこと。

これらのことは，単に文字式の理解が単純になされるものではないことを示していると考えられる。文字式を理解するためには表現力，読式力が必要とされ，さらにそれらの力を高めるための背景的要素の存在を明らかにする必要がある。どうすれば表現や読式についての力を高めることができるのか。また，それらの力を支える背景的・根源的要素とは何か。これらの点について考察する。

４．文字式理解の背景的・根源的要素

文字式には，操作的な見方と構造的な見方の双方が必要とされる。しかし，文字式が過程と結果の双方の意味をもつことの理解は困難とされており（A.Sfard,1991)，過程と結果に焦点を当てた研究がいくつかある。（横田,1995；小岩,2004；など）

4.1　A.Sfard の数学的概念作用の２面性について

A.Sfard(1991)は, 数学的概念の理解へのアプローチを，数学的概念作用の２面性(duality)と呼び，２つの数学的概念作用の重要性と困難性を示している。以下に概括する。

数学的概念は, 本質的に異なる２つのやり方で理解される。すなわち過程として操作的に，と対象として構造的に。数学的概念は操作的概念作用と構造的概念作用の入り組んだ相互作用から成る。概念作用とは，そ

の概念によって引き出された内的な表象や連合の全体とされ，人間の知識の内的・主観的な世界における概念の補完物である。さらに，数概念の歴史的発達過程に基づき，数学における概念形成において，計算的操作から抽象的な対象への変換を，

内面化(interiorization)

凝縮化(condensation)

具象化(reification)

の３つの段階から達成され，長くて本質的に困難な過程であり，特に具象化という複雑な現象に特別な注意を与えなければいけない。

操作的概念作用と構造的概念作用の間には，存在論的な深いギャップがある。生徒はある具体的な事柄を操作的に理解する。その操作に十分習熟し，そのことを成熟した対象と考えることができるようになったときに構造的な理解の段階に移る。つまり，概念形成のモデルとしては，数学的概念は操作的にも構造的にも理解され得たときのみ十分に発達したとみなされるべきである。反面，操作的なやり方に止まっている限りは対象として扱うことはできず，構造的概念作用の働きは起こらない。そのことは学習者のさらなる発達を妨げる危険性がある。

構造的概念作用を引き起こすためには具象化が必要であり，相当の熟練を要するが，ただ反復的に学習するだけではなく，自分が慣れ親しんだ操作と同様の操作で新しい対象を扱うこと，すなわち既習のアルゴリズムと新しいアルゴリズムとの関係づけが必要である。しかし，その類似点に気づくことは困難であり，そのためにはより高いレベルでのいくつかの過程を経験することが必要であり，そこに過程を対象に変える根拠が引き出されるのである。

このことから，文字式を理解するためには，文字式を操作的に慣れ親しむことと構造的に扱うことが必要とされている。このことが，先の表現や読式の力とどのように関わってくるのかを考察する。

4.2　文字式理解の難しさ

まず，表現の難しさについて述べる。数学学習において，文字式で表現する場面は一般的には次のように整理される。

・未知の数量を文字で表す場面。（未知数）

・一般的な数を文字で表す場面。（任意定数）

・変数を文字で表す場面。（変数）

中学校数学の立場では，最終的な文字理解を変数の理解としている。しかし本研究では，文字式の初期学習における文字式理解の過程に焦点をあてるため，一般的な数としての文字（任意定数）の理解を目標とする。その中でも，特に生徒が表現することに困難を示すものが，偶数や奇数，２桁の自然数などがある。例えば，偶数の表現の難しさについて，先の Sfard の視点から分析する。

生徒に「偶数とは何か」と尋ねると，はじめは「２，４，６，８，…」のように具体数を挙げて示す。更に「それはどんな数ですか」と尋ねると，「２で割れる数」というように答える。これは，偶数は２で割ると割り切れる，という手続きを通して操作的に偶数を理解しているものであり，内面化として捉えられる。

さらに１２８や３６４０といった少し大きな数でも２で割り切れることから偶数を捉え，偶数の理解が操作的な段階で凝縮化される。

さらに，一の位の数に注目したり，２×１２３や４×７７７７といったものでも偶数であることが判断できる段階がある。はじめは計算した結果を２で割る操作をするかもしれないが，その形で判断できるようになるまで熟練することが必要であり，それによって，偶数の理解が，２×（整数）や２の倍数といった構造的な見方へと変換される。すなわち具象化の達成が必要である。このことにより，偶数を文字を用いて２ｎと表現できる背景が形作られる。

偶数の理解が操作的な段階，すなわち，２で割るという操作を介した理解にとどまったままでは構造的な概念作用の働きは起こらず，２ｎと表現することが難しいということである。

このように，偶数や奇数，２桁の自然数な

どを文字を使って表現するためには，それを構造的に理解しているということが必要とされる。

読式においても式を構造的に読み取ることなしには正しい解釈はできない。例えば，２ｎ＋１が奇数であることを読み取るためには，ｎが自然数を表し，２ｎが偶数を表しているのでそれに１を加えたものは奇数である，という構造的な理解が求められる。この難しさは２（ｍ＋ｎ）＋１になったときに顕著に現れる。これが奇数であるということを正しく読み取るには，（ｍ＋ｎ）自体を一つのものとして扱うことが必要である。例えばXと置き，２X＋１とするのはその構造に目を向けやすくするためである。さらに（ｍ＋ｎ）が整数を表していることを示さなければならない。２×0.5＋１などといった場合では奇数を示さないためである。

文字式で表現したり，文字式を正しく読み取るためには，文字式の構造的な扱いが可能であることが求められる。しかしながら，Sfard がいうように，操作的概念作用と構造的概念作用の間には深いギャップが存在し，構造的な扱いができるようになるまでに長く困難な過程がある。そこに表現の難しさ，読式の難しさの根源があるものと考えられる。

ここで，Sfard の「操作的な概念作用と構造的な概念作用は入り組んだ相互作用から成る」に注目する。すなわち，操作的概念作用はそれ以前の，ある低次の構造的概念作用から引き起こされるのである。文字式概念より低次のもの，つまり文字式の前段階にあたるものは数の段階での概念であると考える。

4.3　数から文字への理解過程

文字式理解のための背景的・根源的要素として数の段階での理解が重要となるであろう。それはいったい何なのか。数の段階でどのような理解が求められるのかを，以下で探る。

4.3.1　北川ら（1977）の調査とその成果

北川らは，slow learner といわれる生徒たちを対象とし，数学学習の障害箇所をつきとめるための調査研究を行った。

第１次調査と呼ばれるものでは，特に，数から文字へのわたりの部分の解明をねらった。いくつかの学校で共通テストを行い，その結果を分析して，これらの問題の徹底した究明を行おうということになったのである。調査問題は，各教師が自分の経験から文字式学習のために重要であると思われるものを出し合い，特に，分数の指導に問題点が多いという共通点から，まず数の概念および計算に関することを取り上げることになった。そして，それが中学校での文字式学習にどのようにかかわってくるのかを調べたのである。

その調査では，まず次の問題に注目した。

⑩ 50kg の$\frac{2}{3}$は，（　）kg である。
⑭ ３個の重さが１kg であるとき，７個の重さは（　）kg である。　　＊問題番号は，使われている問題の番号

この問題に正答できなかった生徒は，中学校の文字，式などについての問題の正答も悪く，双方は非常に高い相関関係にあった。しかし，計算などの問題については他の問題との間に高い相関を見ることはなかった。

次に，分数を数としてどのようにみているのかという問題に注目した。

④ 次の（　）にあてはまる数を書け。
(1) $\frac{2}{3}$ は，１を同じ大きさの（　）個にわけた（　）つ分
(2) $\frac{2}{3}$ は，２を同じ大きさの（　）個にわけた（　）つ分
(4) $\frac{2}{3}$ は，２の（　）倍の数　　＊(6)まであるが詳細略

(1)では正答率はよい。ところが(2)になると極めて悪くなる。ここに学習指導上の盲点があり，分数学習上の関門と位置づけている。つまり，(2)の理解は 2/3 を，２を３で割った数という結果としての分数の理解が必要であり，それが分数の数としての認識という点で注目に値するということである。また，(4)は分数倍のことであり，同じく正答率が悪い。

これらの理由として考えられたことは，2/3

などの分数を一つの数として捉えるという考えができず，分数を整数と同じように，数として馴染み，同じような扱い方・考え方ができるようになる段階に達していないことが原因として挙げられている。

第１次および第２次の調査から得られたデータ解析に基づいて作成できたのがブロック系統図と呼ばれるものである。それは，数から文字式への過程において，学習をブロック（障害）ならしめている教材内容が，互いにどんな関連をもって結びついているのかを一つのモデルとして表したものである。その有用性は高いものであり，その後の継続研究でもブロック系統図に基づいて診断テストや治療プログラムを開発している。

4.3.2　分数の理解の重要性

北川らは，ブロック系統図の中心に分数についての理解を置き，文字式の理解のための第１関門として挙げている。単に分数の計算ができるといった類の理解ではなく，分数の本当の力が身についていることが肝心であるという。なぜ分数の理解が文字式の理解のために重要視されているのか，この点について以下のように述べている。

> 数の概念は，抽象ということによって成り立っている。分数には更に高度の抽象の働きが要求される。例えば，２つの数を使って１つの数とみなすことや 2/3 と 4/6 を同じものとみなすことがある。前者は二元のものを一元化することであり，後者は同値関係にある無限のものを同一化して見ることである。それらは抽象化の考えが必要とされ，また高度なものである。初めは量の分割の操作を通して同じものとして捉えた分数を，それを完全に数の形に抽象化して獲得することが必要であり，分数の把握が操作の段階でとまっていては，数として十分昇華されていないということである。
>
> もう一つの要素として，比がある。これは分数より更に高度の抽象性をもった概念であるともいえる。ａ：ｂという表示は，確定した数を表すものではなく，ａとｂの間の一つの関係を表している。基準としているものを固定せず，一方が他方の何倍かという見方をするとき，比はその価値を表してくる。ここに分数倍が現れる。乗法は倍概念を基礎とする。整数の乗法の場合は累加の考え方でも解釈できるが，小数，分数になると難しく，倍という考えで乗法の意味の一般化が必要になる。ここで，分数が数として把握されていないと，×（分数）を分数倍として扱えず，倍概念の構築に支障をきたす。倍という概念が把握されていなければ，割合，比（比の値）についても望ましい理解には到達できない。先の問題⑩や⑭が，数から文字へのわたりをつける場所として調査から導かれたことを考えても，分数に表現される割合，比，倍の概念がその後の数学学習にとって重要な役割を果たしている。つまりこれらの概念は，二つの数量間の関係を洞察させ，数学の諸概念を形成させていくために重要な基本的概念であるといえる。数についての熟したセンスはこれらの概念の獲得に負うところが大きい。

このように，文字への抽象化の壁を乗り越えるためには，数の世界における分数の理解の位置づけが重要視されている。特に，分数を数として捉えること，分数の意味，特に，倍の概念を把握し，そこから割合，比の概念が分数概念に結びついていることが挙げられている。

4.3.3　数から文字へ

さらに，北川らは文字への理解過程を次のように述べている。

> 小学校算数以来，数の拡張を通した数の概念形成と数の抽象化・一般化を通して，文字の理解，文字式へと発展がはかられる。

その過程を４つの段階に設定し，それぞれの問題点およびそれらがどのように影響しあっているのかを追究している。

⑴ 数の抽象化・一般化
⑵ 数の文字による置き換え
⑶ 文字を含んだ演算
⑷ 関数概念

本研究においては，ここでの⑴⑵に焦点をあて，文字式の理解のための背景的・根源的

要素に迫っていく。

北川らは，まず(1)において，数から文字へのわたりについて次のように述べている。

> 数から文字へのわたりを抽象化・一般化として捉え，数についての熟した考え方が必要である。

数についての熟した考え方とは先に示した多面的かつ抽象的な概念を内包する分数の理解，および整数の中でも特に負の数の理解をも含めている。負の数は，分数より一層抽象度が高く，演算関係でこの傾向が顕著に現れる。例えば，２－（－３）^{2}や０より－３大きい数，などといった問題がイメージをもちにくい例として紹介されている。そのため，負の数は，文字により近い数として文字式の理解のための第２関門として位置づけられている。分数の理解，および負の数の理解が進むと，次の段階である(2)文字による置き換えができるようになるとしている。数の世界での和の形，積の形，分数概念の理解が文字の世界へのスムーズな置き換えを可能にするということが，具体的な問題とともに示されている。

$\boxed{1}$ 和の形
次の数のうちで，「４の倍数」になっているものを，すべて選べ。
４×７７７７，４×７７７７＋３，３×７７７７＋４，
４×７７７７＋８，４×（７７７７＋３）

$\boxed{2}$ 積の形
次の数のうちで，「$2^5\times3\times7^2$の約数」になっているものを，すべて選べ。
５，2^3，$2^3\times3^2$，$2^4\times7$

$\boxed{3}$ 分数概念
(1) 50kg の 2/3 は何 kg か。
(2) 同じ重さのコインがいくつかある。３個の重さが10kg のとき，７個の重さは何 kg か。

$\boxed{1}$，$\boxed{2}$の問題については計算することなく式の形だけで解答できること，すなわち積の意味を理解していることが肝心であり，これらが次の問題での文字による置き換えに直ちに関係してくる。

$\boxed{4}$ 和の形
次のうちで，つねに「４の倍数」になっているものを選べ。ただし，ａは正の整数である。
４ａ，４ａ＋３，３ａ＋４，
４ａ＋８，４（ａ＋３）

$\boxed{5}$ 積の形
次のうちで，「a^5bc^2の約数」になっているものを，すべて選べ。
a^3，a^3b^2，a^4c

$\boxed{6}$ 分数と対応
(1) 同じ重さの品物がある。３個の重さが x kg のとき，y 個の重さは（　）kg である。＊(2)以降の問題は略

このように，数から文字へ，文字から数への両者が密接に結びついて理解されなければならないことが示されている。

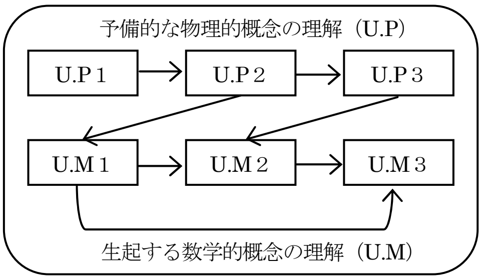
５．分数などの理解が文字式の理解のために重要視されていることの意味

文字式を理解するためには熟した数の世界を背景にもっている必要があること，その中でも特に，多面的かつ抽象的な概念を内包する分数の理解が重要な位置にあることを詳しくみてきた。北川らは「数の概念は抽象ということによって成り立っている」と述べている。数から文字へのわたりを抽象化・一般化として捉えたときに，多様な概念を内包する分数の理解が重要視されるということである。すなわち，分数を理解したという結果が重要視されるというよりも，むしろ分数などを理解する過程における抽象化・一般化の体得が文字式を理解するときの力として発揮される，という意味においてより重要視されるものであると考える。

5.1　文字式の理解の背景的・根源的要素を捉えるための分析の視座

文字式の理解のための背景的・根源的要素についてまた別の観点から捉えてみる。ここ

での分析の視座（概念枠組み）として，Herscovics & Bergeron の理解の二層モデル【図１’】を用いる。このことにより，上述してきた分数などの理解が重要視されていることの意味（抽象化・一般化）がより一層明確になるのである。



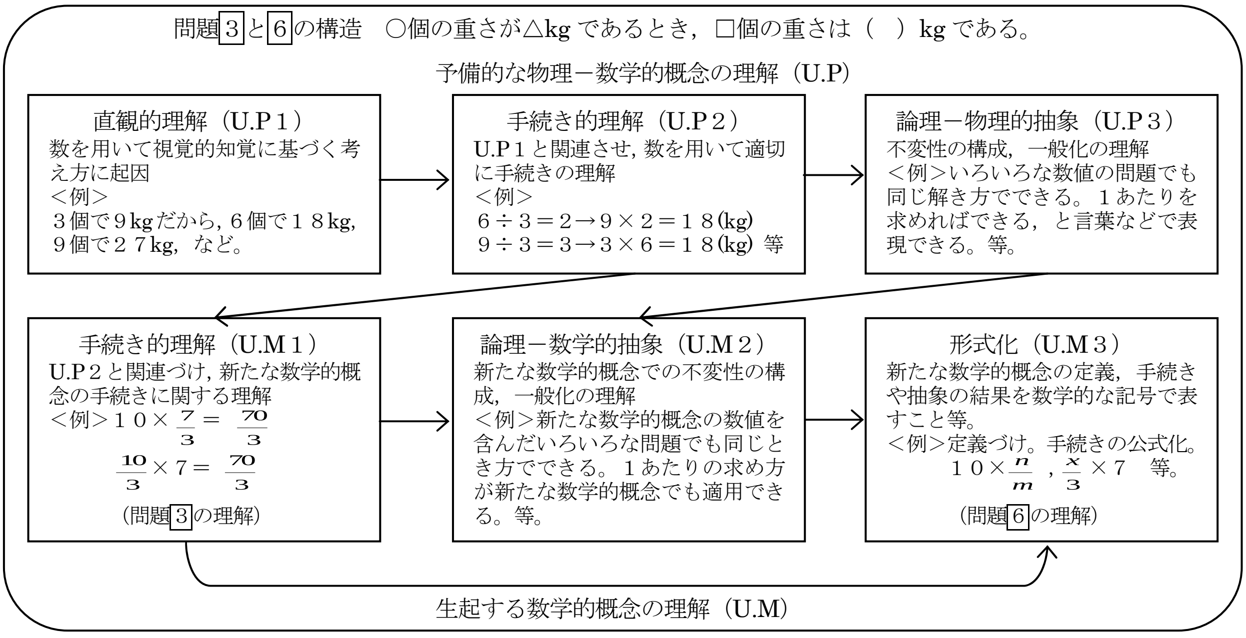
【図１’】Herscovics と Bergeron の理解の二層モデル

5.1.1　数から文字～二層モデルの理解の位置づけ～

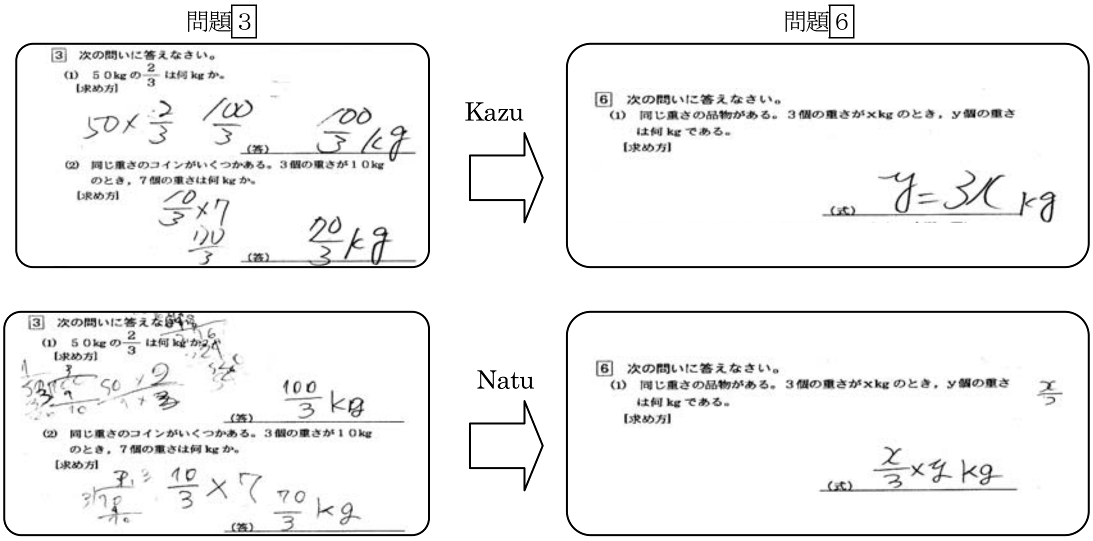
文字式の理解のために重要視されている分数などの理解を文字式理解の前提と捉え，数から文字への理解過程を，自然数ー分数などー文字式，という段階に設定する。したがって，数学的概念の前提にあたる予備的な物理的概念の層は，ここでは純粋に物理的なものという捉えではなく，ある程度，数の概念に関する理解が達成された状態とみなす。例えば，生徒は，自然数などの数的記号自体をすでに操作の対象としてみなすことができるようになっている段階をいい，数の初期的概念の理解，ここでは自然数の理解を U.P の層に相当させる。これを予備的な物理ー数学的概念の層（U.P）とし，U.M の層には，分数から文字式への理解を位置づける。これは，数学的概念は高次の抽象概念であり，文字の前段階が数であるという捉えから仮定したものである。そして，U.M３（形式化）に，文字の理解が達成された段階を設定する。このようにして，数から文字への移行過程を捉えるために想定したものを，理解の拡張二層モデル【図２】とする。なお，位置づけの根拠と例を図中に示しておいた。

5.1.2　分析の対象

北川らが示した問題$\boxed{3}$から問題$\boxed{6}$への移行過程を，数から文字への移行過程として分析する。この分析を行うにあたり子どもの理解の傾向をつかむために予備的な調査を実施している。調査問題は，北川らの調査問題に基づき作成したものを使用した。平成１６年１２月，新潟県内の中学校において，３年生を対象とし，数学学習に対し比較的優良な生徒４名，比較的苦手意識をもつ生徒５名，計



【図２】文字理解の拡張二層モデル



【図３】 実際の２人の生徒の解答

９名を抽出して行ったものである。ここで注目したものは問題$\boxed{3}$と問題$\boxed{6}$との関係である。両問は問題構造が同じであり，数を文字で置き換えた形で同じく理解されるように思われた。しかし,そうではなかったのである。特にKazuという生徒とNatuという生徒(生徒名は仮名）にこの差が現れた（【図３】)。２人の理解の違いに注目し，数から文字への理解の移行過程を分析する。

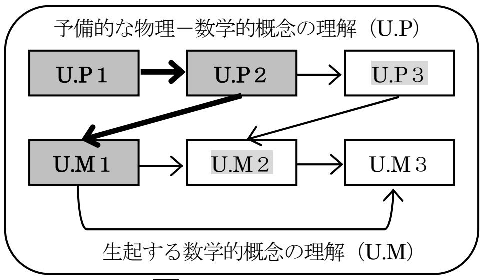
5.2　問題$\boxed{3}$の理解

問題$\boxed{3}$については，２人とも正しく解答している。これはU.M１の理解が達成されている段階である。この理解を支える背景を探る。矢印をさかのぼると U.P２，U.P１がある。問題$\boxed{3}$での２人の解答は，手続きとしての分数倍や１に戻って整数倍するということが理解されていた。そのことから，自然数の範囲でもその手続きが理解されていると見なすことは妥当であろう。したがって，U.P２は達成されていると捉える。さらに，U.P の層の線形性から U.P１が達成されていることは明らかである。

U.P２が達成されていれば，U.P３が達成されている可能性もある。しかし，この調査からでは U.P３の達成は判断できない。「いろいろな問題でもできる」といった不変性や一般化に関する理解をみとることができなかったのである。

同じことが U.M２にもいえる。U.M１が達成されていれば，U.M２の達成の可能性はある。しかし，ここでも不変性や一般化に関する理解をみとることができないのであり，別に調査が必要となる。

以上より，問題$\boxed{3}$の理解とその背景として明らかなのは【図４】のように示される。



【図４】問題$\boxed{3}$Kazu と Natu の理解の背景

枠内網掛け：理解が達成されている状態
文字網掛け：理解が達成されているかどうか判断できない状態
太 線 矢 印 ：理解が達成された過程
細 線 矢 印 ：理解の二層モデル上の達成過程

ここまでの２人の理解は同じ過程を示している。しかし，問題$\boxed{6}$において，２人の理解の違いが現象として現れた。

5.2.2　問題$\boxed{6}$で現れた２人の理解の相違点

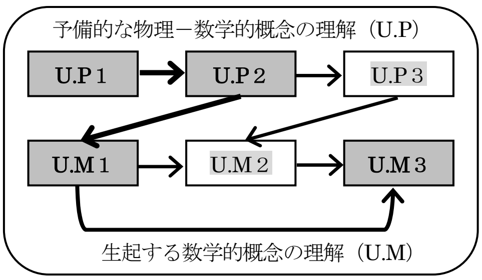
まず，正答した Natu の理解をみる。

Natu は, x/3 に y をかけて解答としている。３個の重さが x kg であることから１個あたりに戻り x/3 kg を求めてから，それを y 倍したものと推測できる。Natu は文字式を用いて解答できた。U.M１から何らかの手続き

の理解や抽象の結果を数学的な記号（文字）で表すことができたことになり，U.M３が達成されていると捉える。

では，U.M２はどうか。Natu の理解の中で，論理－数学的不変性が構成され，それらが一般化された理解として捉えられるであろうか。確かに Natu は，問題$\boxed{3}$から何らかの手続きを理解し抽象したかもしれない。しかし，それが不変性として構成されたかどうかは明らかでない。このことは[求め方]の欄が未記入であることから判断される。もし，Natu が問題$\boxed{6}$を独立した問題とみなし，[求め方]にその手続きなりを文字式でも適用できるとしているならば，それは不変性に関わる理解とも捉えられるであろう。しかし，ここでは問題$\boxed{3}$⑵と同じ問題構造であるため，この２つの問題間固有の手続きをあてはめただけとも見ることができる。ここで U.M２が達成されていると断言できる根拠は示せないのである。

このことから，Natu の理解は【図５】のように図示できるであろう。



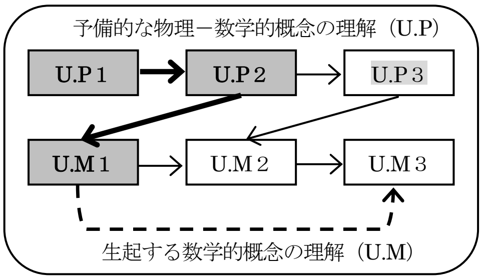
【図５】Natu の理解過程

これに対して，Kazu の理解はどうか。Kazu は問題$\boxed{6}$の解答について次のように説明している。

Kazu：これ（問題）をみたら比例かなって。ｘとｙがでてきたから何となくそうかなぁって思った。

これは，問題の文脈から比例の関係を読み取ったが，３とｘとｙの関係を正しく読み取ることができず，単に比例の式ｙ＝ａｘにあてはまるよう３とｘとｙを配置したものと推測できる。Kazu は問題$\boxed{3}$⑵では１に戻る求め方で具体を念頭に置きながら正答することができた。しかし，この問題$\boxed{6}$では何となく数学記号を用いたものである。問題の文脈から単に比例の手続きを判断しそれを形式的にあてはめたものであるから U.M３へと向かってはいるが達成されてはいないものと捉える。

このことから，Kazu の理解は【図６】のように図示できるであろう。



【図６】Kazu の理解過程

5.3 考察

上述したように，問題$\boxed{6}$に現れた Natu と Kazu の理解の違いは，理解の二層モデルを用いて分析したときに，その理解過程の違いとして現れた。【図４】と【図５】を比較したときに，Natu は何れかの過程をたどり U.M３に到達したのに対し，Kazu は，U.M１から先の段階へ移行できていない状況を示している。なぜ Natu は U.M３へ移行でき，Kazu は移行できなかったのか。ここで北川らの論を参照すれば，「抽象化・一般化」の問題が関わってくるであろう。すなわち，Kazu にとってみれば U.M１の手続きからあるべき対象が抽象されておらず，その手続き自体も反省的に理解されていないため，一般化へは発展されず，U.M２もしくは U.M３へと移行できなかったのではないかと考える。また，Kazu の理解過程の図式は，Herscovics が警告している「意味の伴わない形式化」の図式である。何となく比例の式にあてはめた Kazu にとっては，形式化への意味づけがなされていない状況を示している。

一方で Natu は，先の北川らの調査問題$\boxed{1}$に答えた後，次のように説明している。

Natu：４×７７７７は計算してみた。あとは計算し

ていない。４×７７７７＋３は＋３が４で割れない。３×７７７７＋４は３×だから４で割れない。

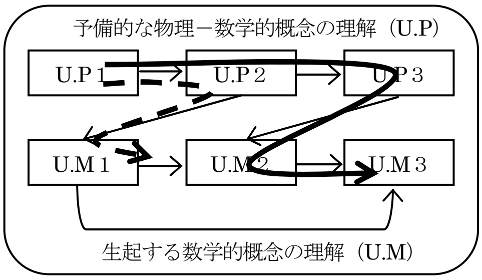
このことから考えられる Natu の思考の傾向は，はじめは手続きから理解しようとするが，一旦理解できればその手続きの結果を用いて他の問題にも適用しようとすることが推測される。すなわち，Natu の理解の中では手続きを一般化させ得る力が備わっており，U.M３への移行が実現できたのではないかと推測される。

数から文字へのわたりを抽象化・一般化として捉えたときに，その重要性がここに現れているのであろう。

ここで, U.M１から U.M２への移行過程を考えたとき，それは論理－数学的な不変性の構成および一般化が問われることになる。ここには Sfard が指摘する「存在論的なギャップ」の問題が関わってくるであろう。U.M１から U.M２へ移行するためには構造的な扱いが実現されなければならない。Kazu は U.M１においてある数学的な手続きは理解できている。しかしそこから次の段階へと移行するためには，その手続き自体が何らかの形で構造化されていることが求められよう（手続きを公式的に扱うことなど)。つまり，手続きの不変性の構成である。さらにその手続きが自然数でも，小数・分数でも可能であると拡張的に一般化されたとき U.M２が達成されたとみなされるべきであろう。ここに手続き的操作から構造的扱いへのギャップが関わり，Kazu のような状況として現れているのではないかと考える。

この U.M１から U.M２へのギャップを軽減し得るポイントとして U.P３の達成が挙げられよう。生徒が数的物理的にイメージしやすい世界において不変性を構成し，一般化した経験を背景にもっていることは，新たな数学的な世界においても同定さえ得るということが示されているのではないか。すなわち，文字式への形式化が達成されるためには，生徒が慣れ親しんだ数の世界における不変性の構成および一般化を理解していることがその背景として重要視されるのではないかと考える。

以上の点から，文字式理解の重要な移行過程として【図７】を挙げる。Kazu の移行過程（破線矢印）に対して，Natu の移行過程（実線矢印）が，その違いとして現れたものと考えるのである。



【図７】Kazu と Natu の理解過程の違い

このことをまとめると次のようになる。

①U.M１から U.M３の方向への移行を可能にする決定的ポイントとして U.M２の理解の達成が挙げられるのではないか。
②しかし，U.M１から U.M２への移行は困難さを伴う。それを解決し得るカギとして U.P３の理解の達成が重要視されるのではないか。

この２点を本研究における理論的仮説と設定する。

６．おわりに

本研究は，文字式を理解するための背景的・根源的要素を探るために，文字式の問題が解決できた Natu と解決できなかった Kazu の２人の生徒に注目し，それぞれの理解過程を理解の拡張二層モデルを通して分析した。さらに北川らが主張する分数理解の重要性すなわち「数の世界における抽象化・一般化の体得」という視点から考察を加えた結果，U.M２の理解が文字式理解のための根源的要素であるのではないかということがみえてきた。すなわち，文字式の理解のためには論理－数学的不変性の構成および一般化に関する理解の達成が関わっている。つまり，数

学的な手続きからその不変性を構成し，そこから一般化が達成できるよう反省的に理解を深めることが必要であるということである。

しかし，そこには「存在論的なギャップ」があり，それを軽減し得るもの，すなわち文字式理解のための背景的要素としてU.P３の理解が挙げられるのではないかということがみえてきた。生徒が慣れ親しんでいる物理的もしくは数的世界における不変性の構成および一般化の経験が，理解の第二層において有効に作用し得る可能性があるということである。

以上，本研究からみえてきたことを理論的仮説として設定した。今後２人の生徒にU.M２およびU.P３に焦点をあてたインタビュー調査を実施し，更なる分析，考察を加えながら，この理論的仮説をより信頼し得るものに高めることが今後の課題として挙げられる。

また，不変性の構成と一般化を含めたU.M２およびU.P３の理解の実現とはどうあるべきかの詳細について検討することも必要であろう。例えば，U.P３は文字式の前段階における数での指導の重要性に関わってくる。大きくは小学校算数の中での指導が関わってくるものと考えられる。すなわち，数の世界において不変性の構成に焦点をあて，式の構造や手続き自体の構造化を目的とした指導が小学校段階でも求められるということである。そのためには，分数を理解するための過程を重視した学習や式自体を考察の対象とした学習などが考えられる。しかし，具体操作のよさを重視する小学校算数においてはその限界もあろう。そこでそのギャップを埋めるための中学校数学のカリキュラム開発が求められる。形式化を急ぐのではなく，生徒が慣れ親しんだ数の世界において式を構造的に扱うことができるような指導の開発が必要であり，この点も今後の課題として挙げられる。

引用・参考文献

杜威(1991)：「学校数学における文字式の学習に関する研究」：数の世界から文字の世界へ，東洋館出版社

三輪辰郎(1996)：「文字式の指導序説」，筑波数学教育研究，15，1-14

藤井斉亮(2002a)：「数と計算の学習指導における擬変数の役割に関する研究」，第 35 回数学教育論文発表会論文集，日本数学教育学会，163-168,

小山正孝(1992)：「数学教育の新展開」岩合一男先生退官記念出版会，数学教育における理解のモデルについて，172-183，聖文社

R R Skemp(1992)：「新しい学習理論にもとづく算数教育-小学校の数学-」, 51.平林一榮監訳.東洋館出版所

R.R.Skemp(1976)：Relational Understanding and Instrumental Understanding,MT,No.77,

R.R.Skemp(1979)： Goals of Learning and Qualities of Understanding, MT, No.88,

N. Herscovics & J.Bergeron(1983)；Models of Understanding，ZDM，Jahrgang 15 ，Heft 2, April .75-83

N.Nantais & N.Herscovics(1989)：Epistemological analysis of early multiplication. P.M.E. 13, vol.3, (juillet) , pp.18-24

中原忠男(1995)：「算数・数学教育における構成的アプローチの研究」，120-123，聖文社

国宗進他(1997)：「確かな理解をめざした文字式の学習指」導.中学校数学科・新しい授業づくり５.明治図書

大塚高央(2004)：「文字式のよさの指導に関する基礎的研究」，上越教育大学修士論文，27，104

横田誠(1995)：「文字式の意味における二元性に関する研究」，上越教育大学修士論文

Anna Sfard(1991)：On the Dual Nature of Mathematical Conceptions ： Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. ESIM, Vol.22, No.1, 1-36

北川如矢他(1987)：「分数・文字式を教えるということ」.算数・数学教育全書-１.大阪数学教育研究会.明治図書