上越数学教育研究，第20号，上越教育大学数学教室，2005年，pp.175-182.

中学校数学における討論を取り入れた証明指導についての考察
～説明としての機能に着目して～

灰　野　　　仁
上越教育大学大学院修士課程１年

１　はじめに

文部省(1999)は、図形指導の意義として、図形の概念形成と性質の理解と、論理的な思考力の育成との２点を挙げている。これらを受けて、証明を取り上げることを、中学校数学の大きな特徴と位置づけて以下のように述べている。

> 中学校数学の大きな特徴は、「図形」領域において、演繹的な推論の方法を活用することにある。　　　　　(文部省,1999,p.41)

生徒は小学校で、操作的な活動や直観的な取り扱い(文部省,1999) を中心とした図形学習を行っている。中学校に入ると、第１学年において、観察、操作や実験を通して、図形の直観的な見方や考え方を深める(文部省,1999) 学習を通して、第２学年で学ぶ論理的な考え方の基礎を培ってきている。第１学年においても、部分的には演繹的な方法を用いることもあるが、第２学年の証明単元から本格的に扱うことになる。

筆者はこれまでの教職経験の中で、証明に対する生徒の困難さを問題に感じていた。第１学年と第２学年との間には、推論形式の大きな転換があり、この転換を如何に生徒に理解させるかを考えてもみた。第２学年で主に取り上げる証明に対して、生徒は慣れていないので、慣れさせることが大切であると考えたこともあった。このような考えに基づいた指導では、証明の定式化に比重を置いた指導となってしまい、生徒が意欲的に証明に取り組む姿をなかなか見ることができなかった。

Balacheff(1990) は、証明の定式化について以下のように述べている。

> 証明の定式化は教師の指図によってではなく、命題の妥当性に関する生徒間の討論から生じ得る本質的な必要性によって正当化されなければならない。　　　(Balacheff,1990,p.265)

Balacheff(1990) の言葉を借りれば、筆者は生徒に討論もさせずに、証明の定式化をただ指図していただけということになる。「なぜ証明するのか」という根本的な理解を目指すのであれば、定式化に重点を置くことより、むしろ討論の形で他者とのやりとりを取り入れることが重要と見て取れる。

本稿では、証明の意味をその成り立ちと機能に着目し考察する。この考察を通して、中学校数学における証明指導に討論を取り入れることの必要性を探る。これらを通して、今後の授業改善に向けた示唆を得ることを目的とする。

２　「証明の意味」について

2.1 生徒と教師の間にあるギャップ

証明に対する生徒の取り組みの不十分さについては、多くの先行研究（杉山,1986;小関,1987）が指摘している。筆者もこれまでの教職経験から、生徒の証明に対する取り組みは芳しくないと感じており、周りの数学教師も同様の指摘をしていた。生徒に尋ねてみると異口同音に、「証明は面倒くさい」とか「な

ぜ証明しなければいけないの」という言葉が返ってきた。ある生徒が、「証明の書き方がわからない」と言ったことを受けて、どのようにして証明を書いたらよいかを教えることが、証明指導では重要であると考えるようになった。

Balacheff(1990) は、証明に対する生徒の困難さを教師がどのように見ているかについて以下のように述べている。

> 生徒たちにとって、数学的な証明とは何であるかを学ぶことは大変困難である、ということはよく知られている。しばしば、教師や研究者は証明の必要性に対する生徒たちの自覚の欠如と共に、生徒たちの不十分な論理的成熟について言及する。
>
> (Balacheff, 1990, p. 264)

筆者もBalacheff(1990) が指摘したように、生徒は、中学２年生になって初めて証明を学習するため、必要性を感じることは難しいと見ていた。論理的成熟が不十分であることを、論理的な思考に慣れていないためと捉え、練習問題を繰り返し行うことで解決できるものと考えていたのである。

Balacheff(1990) は、教師や研究者の言及に対してある程度同意するとしながらも、以下のような質問を提示している。

> 専門家としての数学者にとっての数学的証明とは何か？また、教えるべき内容における数学的証明とは何か？教室の中での数学的活動の一部としての数学的証明とは何か？
>
> (Balacheff, 1990, p. 264)

Balacheff(1990) は、専門家にとっての証明と、生徒にとっての証明を区別している。筆者はこの点について漠然と考え、「生徒にとっての」という視点を見落とし、「証明とはこのようなものだ」ということを専門家の立場で生徒に理解させようとしていたのである。教師は既に多くの証明問題を解いてきており、その経験から証明のよさを知っている。生徒はまだ、証明とはどういうものかを理解していない。生徒と教師の間には、証明の意味についての大きなギャップが存在するのである。初めて証明を学ぶ生徒は、証明の意味を自らの経験を通して理解していくことになる。数学者にとっての数学的証明を期待するのではなく、生徒にとって意味のある証明を作り上げることが本当の理解につながる。

2.2 証明の意味

矢野(1968)は、証明について以下のように記述している。

> 証明［proof］（別)論証　：真と認められているいくつかの命題から、有効な推論によって、他の命題の真であることを示すこと。
>
> (矢野, 1968, p. 255)

辞書の意味からすれば証明は、「ある命題が真であることを根拠を明らかにして述べること」となる。多少の語句の違いはあるにせよ、現行の教科書の何れも証明については上記のように記述している。教師がいくら辞書の記述のような証明の定義を繰り返し指導しても、生徒は「なぜそうすることが必要か」「何のために証明するのか」という言葉を口にする。生徒は、証明の意味を機能として見ていないからである。

そこで、証明の意味を明らかにするために、先ずはその成り立ちについて考察する。

赤(1988)は、数学を文化の中で重要な位置を占めるものと捉え、文化の理解には数学の性質の徹底した究明が必要であることを述べている。この中で赤(1988)は、証明の起源は古代ギリシアにあり、他の地域では起こらなかったと記している。これは当時のギリシアの政治形態ポリスが何らかの形で関わっているとし、以下のように述べている。

> 民主主義の基礎は対話や討論である。対話や討論に際しては、まず自分の主張することの根拠をあきらかにしなければならない。そして、それにもとづいて論理的に結論を導き出してこなければならない。
>
> (赤, 1988, pp. 30-31)

このように、証明には、他者との対話や討論というものが根本に根付いていると見て取れる。

杉山(1986)は、ポリスを形成する基礎として、平等の精神を挙げ、数学がこの精神によって生み出され、教育的な価値を実現する可能性を持っているとしている。現在の数学教育に対して、以下のように厳しい目を向けている。

> しかるに、現在の数学教育は往々にしてその精神を忘れ、単なる知識・技能の伝達に終わっているように見受けられる。
>
> (杉山,1986,p.45)

筆者がこれまで行ってきた証明指導も、知識・技能の伝達で終始してしまい、本来的な証明の姿を生徒に伝えてこなかったのかもしれない。数学の授業の中で、筆者は生徒にただ答えを言うのではなく、その解き方も尋ねてきたし、そのような解き方を考えた根拠も明らかにするように求めてきた。理由付けをさせたり、その必要性を説いてきているのに、肝心の証明単元ではそれを行わずに定式化に重点を置いていたのである。証明の意義を理解させづらいことを理由に、証明本来の姿を見失っていたのであれば本末転倒である。

証明本来の姿を考慮すれば、そこには対話や討論といった、他者とのやりとりを見出すことができる。このやりとりを通して生徒自らが証明のイメージを形作ることこそが、本来求められている証明指導なのではないか。そのためには、特に証明に初めて接する生徒には、いきなり定式化をさせるのではなく、討論を積極的に取り入れていく必要性が見えてくる。

３　証明の機能について

「なぜ証明をするの」と言う生徒の中には、証明そのものの働きがわかっていない者もいる。何のために証明しているかがわからないのである。ここでは証明の機能について考えてみる。

de Villiers(1990) は、証明を教室での意味ある活動にするために、証明の機能に着目している。伝統的には数学的命題の確かさを立証する働きが注目されていて、たくさんの数学教師が、数学の証明が立証の機能を持つという形式主義者的な見方をしていると推測し、これまでの研究においては証明の機能の一面しか見てこなかったことを指摘している。更にde Villiers(1990) は、証明の機能を分類する中で、命題が真であることを表す機能としての立証と、なぜ命題が真であるかの洞察を与えてくれる機能としての説明とを明確に区別している。

Hanna(1995)は、証明の説明の機能に注目し、以下のように述べている。

> 数学実践における証明の最も主要な機能は正当化と検証であるのに対し、数学教育におけるその主要な機能は確かに説明の機能である。
>
> (Hanna,1995,p.47)

Hanna(1995)の主張は、de Villiers(1990) と同様に、教室で行われる証明が、数学者の行う証明とは違うものであることを表している。更にHanna(1995) は、証明のための証明と説明のための証明の違いを、１からｎまでの整数の和Ｓ（ｎ）がｎ（ｎ＋１）／２に等しくなることを例に挙げ説明している。この定理は、一般的には数学的帰納法で証明されるが、Hanna(1995) は、その証明では命題が真であることは説明できても、なぜ真であるかについては生徒に伝えられないとしている。

一方、説明のための証明としては、以下のものを挙げている。

> 説明のための証明は、以下のようなその和の２つの表現の対称性に基づくことによって、なぜ定理が真なのかを示すことができた。

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 + \cdots + n \\ S &= n + (n-1) + \cdots + 1 \\ 2S &= (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) \\ &= n(n+1) \end{aligned}$$

S＝n（n＋1）／2　(Hanna, 1995, p. 48)

Hanna(1995) のいう「証明のための証明」は、de Villiers(1990) の言う「立証」の機能を表しており、「説明のための証明」は文字通り「説明」の機能を表している。

辞書や教科書に述べられていることは、まさに、de Villiers(1990) の分類にある立証の機能のことである。「証明って何？」と生徒に尋ねられたときに、筆者は証明の立証の機能だけを説明していたのである。先にも述べたが、このような説明は証明の一面しか示していないので、生徒は証明が「如何なるものか」を理解できないのである。

de Villiers(1990) は、数学者が実際に行っている数学的証明において、命題が真であることを述べていても、それが何故真であるかという説明が欠けているものがあることを挙げている。命題が真であることを言うのであれば、生徒が小学校までに経験してきた帰納的な方法でも良いことになり、演繹的な証明に必要性を感じないのも無理はない。生徒が「なぜ証明するか」と言う原因は、「なぜその証明で命題が真といえるか」についての認識が十分でないままに形式的な証明に移行していることが考えられる。生徒が演繹的な証明の必要性を感じるためには、説明の機能に目を向ける必要がある。

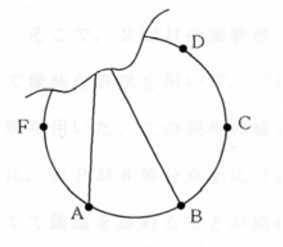
4　討論の場の設定について

証明の歴史的な成り立ちや、その有する機能に着目したときに、他者とのやりとりや説明に着目することが必要であることがわかった。筆者はこのやりとりや説明を、「討論」という形で授業に取り入れたい。

ラカトシュ(1976)は、数学が思索と批判、証明と論駁によって改良され、成長していく様子を、架空の教室でのやりとりの形で示している。「オイラーの定理」について、生徒が反例を考えたり、その反例に耐えうるように新たに立体を定義し直す活動を通して、証明を作り上げていく姿が描かれている。ここに描かれている生徒は、一方では自分の推測の正当性を主張しようとし、他方では相手の主張の不備な点を指摘し合っている。

ラカトシュ(1976)はこの姿を通して、証明が何を前提とするかで変わりうることを示そうとしていると見るが、筆者はむしろ、そこでの生徒の姿に注目したい。相手の推測の不備を指摘するには、そのための根拠を提示しなければならない。これは学習指導要領でも掲げている、「自ら学び、自ら考える」姿と見ることができる。

金山(1997)は、学級の合意作りとして証明を捉え、研究を行った。与える課題は一部欠けた円において、そこにできる円周角の大きさを求めさせる問題である。（図１）



「左の図は、円の一部分が破れたものです。円周上の５点Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄ，Ｆはもとの円を６等分した点です。ところで、２点Ａ，Ｂから 引かれた線分は破れた円周上でちょうど交わっ ていました。その交点をＰとします。

このとき、∠ＡＰＢの大きさを求める方法を考えて下さい。そして、あなたの方法で友達も角の大きさを求められるように解法を教えてあげて下さい。ただし、破れたところには一切描き込むことができません

図１　合意作りのための課題(金山, 1997, p. 147)

金山(1997)は、討論を喚起するための課題の要件として、多くの解法が見いだせることが必要としている。多くの解法があることによって、他者に対して自分の考えを受け入れさせるために討論が活発に行われることが期待されると述べている。多くの解法があることで、生徒がどの解法を選ぶか選択の余地が

生まれる。自分の解法と他者の解法とでは、どこに違いがあるか、それを認めるか否かという判断基準が生徒に与えられることになる。

金山(1997)の実験授業において、生徒は班ごとに解法を作り、全体の前で発表している。課題では、点Ｐの部分が欠けているため、例えばＦＡ//ＰＢのように、点Ｐの位置を円の６等分点上にあるような解答が出てくる。この発表から、クラスの中に討論が生じてくる姿が記されている。点Ｐの部分が欠けているため、６等分点上にあると見る生徒と、条件には記されていないから６等分点上にあると言い切れないと考える生徒が出てくることになる。言い切れないと考える生徒は、ＦＡ//ＰＢだから…という解答を聞き、何故そうなるのかという素朴な疑問が生じてくる。この素朴な疑問が質問の形に表れ、やがて討論へと発展していくのである。

筆者はこれまでの証明指導の中で、仮定・結論が明記されている証明問題を見て、生徒が何を明らかにすればいいのかについて困惑する姿を目にしてきた。これは結論が明示されていることによって、素朴な疑問が生じないためであると考えられる。討論を引き起こすためには、生徒の素朴な疑問が出てくる課題を設定することが必要である。

５　討論を取り入れた指導の構想

5.1 討論が起こるための課題

Hadas et al.(2000)は、幾何学ソフトウェアを用いた動的な幾何学環境で、矛盾や不確実性を与える２つの問題場面を設定し、生徒が演繹的説明を行うようになったことを調査している。矛盾のある問題場面としては、多角形の内角の和と外角の和を求める場面を取り上げている。内角の和が、辺の数が増加するにつれて大きくなっていることを確かめた後で、外角の和について推測させている。一方、不確実性のある問題場面としては、三角形の合同を考える場面を取り上げている。辺と角の全６個の要素の中で、４個の要素が等しくても合同にならない場合があり、６個の要素を持った非合同な三角形が作図不可能であることを調べた後、５個の要素であればどうなるかについて考察している。学生はそれぞれの問題場面において、幾何学ソフトウェアを用いて実測や、図形の変形を行い、自分たちの立てた推測について調べている。

Hadas et al.(2000)は、学生たちの応答を分析することを通して、以下のように結論づけている。

> 学生は、課題の解法に関する推測を作り、この推測がなぜ真であるかという理由を見つけ出した。理由はしばしば常識に根付いているか、または以前の学習に基づいていた。
>
> (Hadas et al.,2000,p.148)

Hadas et al.(2000)の調査から、生徒は以前の学習内容と関連づけて推測を理由づけている。既に知っていることを理由に自分の推測を正当化することは、まさに演繹的な考え方である。自分の立てた推測の正当性を示すために説明しようとする生徒からは、「なぜ証明するの」という言葉は出てこないであろう。問題場面に矛盾や不確実性を含ませることによって、生徒が証明に対して意欲的に取り組む望ましい姿が期待できる。

前節で取り上げた金山(1997)の課題は、点Ｐの位置が明示していないことが生徒にとっては不確実な状態となり、討論が起こるための素朴な疑問が生じる結果となったのである。

5.2　想定プロトコル

証明に討論を取り入れるためには、証明の定式化の前段階から理由付けの仕方に経験を積んでおくことが必要である。矛盾や不確実な状況が含まれている課題が、討論のきっかけとなり得ることから、生徒が推測を立てられる課題を考えたい。その推測を説明する授業についての想定プロトコルを以下に提示する。提示する課題はテープの折り返しの問題である。（図２）

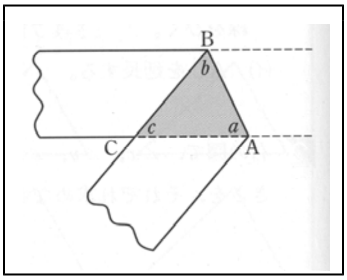


図２テープの折り返しの問題(福森他, 2001, p. 94)

尚、以下のプロトコルにおいて、Ｔは教師、Ａ，Ｂ，Ｃは生徒を表すものとする。

Ｔ１：このテープの重なっている部分の△ＡＢＣについてどんなことが言えるか調べてみよう。（生徒は実測に取り組む）

Ａ１：∠ａと∠ｂが同じ大きさ。

Ｂ１：３つの角を合わせると１８０°

Ｃ１：３つの角ってどこのこと？

Ｂ２：∠ａと∠ｂと∠ｃ。

Ａ２：あと、△ＡＢＣは二等辺三角形。

Ｃ２：えっ、私のは直角三角形なんだけど…。

Ｂ３：何で？どう見ても二等辺三角形だよ。

Ｔ２：ちょっと意見が分かれたね。では、∠ａと∠ｂが同じ大きさとか、３つの角を合わせると１８０°というのは誰も異議がないかな？（生徒頷く）では、△ＡＢＣが二等辺三角形か直角三角形かについて討論してみよう。

Ａ３：Ｃさんは、どうやって折ったんですか？

Ｃ３：私はテープをきれいに折ったら…。

Ｂ４：きれいにってどういうこと？

Ｔ３：人が説明しているときはまずは聞くことが大事。質問は後からしましょう。

Ｃ４：きれいにって言うか、直角になるように折りました。

Ｔ４：Ｃさん、前で実演してください。

Ｃ５：はい。ここ（∠ｂの左側）が９０°になるように折りました。

Ａ４：そしたらなるに決まってるよ。そこを直角にすれば、∠ｃが直角になるんだから。

Ｂ５：そうなるように折ってるんだから、決まってるよ。

Ｔ５：どうしてそうなるんだろう。

Ａ５：だって、テープは平行だからここ（∠ｂの左側）を直角にすれば、ここ（∠ｃ）と、ここ（∠ｃの外角）も同じになるよ。

Ｔ６：ということは、直角三角形と言える？

Ａ６：こういうふうに折れば、言える。

Ｂ６：それは、たまたまそのときだけで…二等辺三角形でないわけじゃあ…あっ！

Ｔ７：んっ？Ｂ君、何？

Ｂ７：直角三角形なんだけど、それはたまたまそういう角を持っているだけで、二等辺三角には違いない。

Ｔ８：じゃあ、何三角形だ？

Ｂ８：直角二等辺三角形。

Ａ７：あ、そっか。直角三角形だからといって二等辺三角形でないということではないんだ。

Ｃ６：二等辺三角形の中の特別な場合なんだ。

Ｔ９：じゃあ、二等辺三角形になるということは、みんな納得？

生徒：納得。

Ｔ１０：じゃあ、こっちの（図３）ではどうだろう？さっき言えたことは言えるかな？調べる前に予想を立ててみよう。

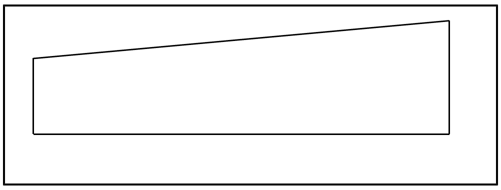


図３　平行ではないテープ

Ａ８：言えるでしょう。だって、このテープでも折って重なったところが三角形なんだったら、３つの角の和は１８０°になる。

Ｔ１１：３つの角の和が１８０°というのは、異論がないかな？

Ｂ、Ｃ：いいと思います。

Ｔ１２：では、二等辺三角形と言えるかな？

Ｂ９：どうだろう…言えないような気がする。

Ｃ７：言えるかな…測ってみないと…。

Ｔ１３：では実際に折って調べてみましょう。

（生徒は実験・実測に取り組む）

Ａ９：うーん、微妙。なりそうかな？

Ｃ８：いや、ならないよ。

Ｔ１４：実測しても決まらないみたいだね？

Ａ１０：先生、実測してもＣＡとＣＢが同じような値になり、多分なるとしか言えません。

Ｃ９：平行ではないテープなんだから、私はもっと極端なテープを考えてみました。これを使って測ったら、なりませんでした。

Ｔ１５：極端なテープで考えるか…なるほど。Ａ君、これで納得する？

Ａ１１：そう言われれば、二等辺三角形にならないような気もするし、納得。

Ｔ１６：ここまでのことを確認すると、平行なテープでなら、△ＡＢＣは二等辺三角形と言えるが、平行でないテープでは二等辺三角形にならない。どうしてだろうね？

Ｂ１０：実測してみてわかったんですけど、平行のテープだと、∠ａと∠ｂが同じ大きさになるんだけど、平行じゃないテープの方では、∠ａと∠ｂの大きさが変わってしまいます。

Ａ１２：二等辺三角形になるかどうかは角に関係あるの？

Ｂ１１：だって、二等辺三角形は、２つの辺が等しくて、２つの角も等しい三角形だったはず。だから、平行のテープの方は二等辺三角形。

Ｃ１０：じゃあ、平行じゃないテープの方だと、∠ａと∠ｂの大きさが違うから二等辺三角形にならないって言えばいいの？

Ｔ１７：確認するよ。△ＡＢＣが二等辺三角形になると言えるかどうかは、∠ａと∠ｂの大きさに関係していそうだ。それから、∠ａと∠ｂの大きさは、平行かどうかできまりそうだ。ここまでいい？

生徒：いいです。

5.3　考察

生徒が討論を取り入れて証明を理解していくためには、まず課題が討論を引き起こすものでなければならない。また、生徒がどのように討論を進めていくかを教師が適切に見取り、方向付けていくことも必要であろう。これは、生徒が討論を通してどのように理解していくかを見る視点とも言える。以上のことから、上記想定プロトコルを、課題の内容と教師の働きかけの２点について考察する。

5.3.1　課題について

仮定・結論が明示されている命題の形で課題を提示しても、生徒は何について考えればよいかわからずに困惑することがあることから、まずは生徒に様々な性質を調べさせている。導入場面では、△ＡＢＣが直角三角形か二等辺三角形かという対立が起こり、直角三角形になることは折り方に依存していることが明らかになる。更に二等辺三角形であることに変わりがなく、二等辺三角形の特別な場合として直角二等辺三角形が位置づけられる。

金山(1997)は解法の多様さを討論が起こる課題の要件として挙げたが、テープを折る課題においては、折り方によって様々な問題場面になることも、討論を引き起こす要件となり得る。

平行なテープでの実験から重なる部分が二等辺三角形になることを知っているため、Ａ８のように生徒は、テープが平行でなくても、二等辺三角形になると考えている。実測の結果、このことが言えそうにない状況に置かれた生徒は、二等辺三角形の特性に着目し、判断しようとしている。生徒は、導入場面で実測を用いて判断し、平行でないテープの場面で、推測したことが実測では言い切れないことを経験する。この経験から、Ｂ11のように、実測以外の理由付けに目が向くことになる。これは、Hadas et al.(2000)が指摘したように、自分の既習事項に理由を求めようとしている姿である。ここでの生徒の理由付けは二等辺三角形の性質と、二等辺三角形になるための条件が混同しているが、既習事項に理由

を求めるという演繹的な考え方の基礎としては、課題が有効であったと言える。

5.3.2　教師の働きかけについて

教師はＴ２やＴ16のように、どこに討論の余地があるかを明確にしている。何についての討論かが不明確にならないように、教師は舵取り役に徹している。結論の真偽についてはＴ９，Ｔ11、Ｔ15、Ｔ17ように、判定を生徒に任せている。赤(1988)の指摘のように、討論を通して相手を説得する経験をすることが、証明の本質的な姿に迫るものと捉えている。Ｃ３：「きれいに折ったら」という発言に対して、Ｂ４：「きれいにってどういうこと？」という質問が出ている。Ｃの折り方の表現がＢに伝わらなかったことが素朴な疑問となり得たのである。Ｃは相手にわかるように、Ｃ４：「きれいにって言うか、直角になるように」と明確な表現に言い直している。他者を説得させるには、相手のわかる表現を用いなければならない。表現形式を共有するための定式化という価値付けができる場面である。

６　まとめと今後の課題

本稿では、先行研究の考察を通して、証明の意味を文化的、教育的な視点から明らかにした。文化的な視点からは、証明の成り立ちを民主主義社会における対話や討論に求め、教育的な視点からは、証明の機能の中で説明の機能に着目した。説明の機能に着目し、証明を討論を通して作り上げていくことで、生徒が証明を本質的に理解できる可能性があることが見えてきた。今まで証明の定式化に重点を置いて指導をしてきた筆者にとって、証明の本質に目を向けた指導への示唆を得ることができたことは成果として挙げたい。

一方、今回の授業分析は、想定プロトコルでしか行っていない。主に証明の導入期における授業を考察した。他の題材でも討論を引き出すことができるかどうかについては、更に考察しなければならない。実際の授業において討論という枠組みが妥当かどうか検討するためには、コミュニケーションや理解という点についての先行研究を調べる必要もある。生徒が証明の理解を討論を引き起こすための課題の要件、教師の働きかけ等の妥当性を明らかにし、今後の指導の指針としたい。

〈引用・参考文献〉

Balacheff(1990).Towards a *problematique* for research on mathematics teaching. Journal for Research in Mathematics Education.21(4).pp.258-272.

de Villiers(1990).The role and function of proof in Mathematics.Pythagoras. 24.pp.17-24

福森信夫　他(2001).数学２年. 啓林館.

Hadas et al.(2000).The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments.Educational Studies in Mathematics.44.pp127-150

Hanna(1995).Challenges to the importance of proof.For the Learning of Mathematics.15,3,pp42-49

金山光宏(1997). 生徒の証明のとらえ方の変容を促す証明指導の研究. 上越教育大学大学院修士論文.

小関熙純(1987). 図形の論証指導. 明治図書.

ラカトシュ(1976). 数学的発見の論理ー証明と論駁ー. （訳：佐々木力）. 共立出版.

文部科学省(1999). 中学校学習指導要領（平成１０年１２月）解説ー数学編ー.

杉山吉茂(1986). 公理的方法に基づく算数・数学の学習指導. 東洋館出版.

赤攝也(1988). 数学と文化. 筑摩書房

矢野健太郎　編(1968). 数学小辞典. 共立出版.