上越数学教育研究, 第 20 号, 上越教育大学数学教室, 2005 年, pp.97–108.

数学的活動における数学化の過程の研究
－樹形図とベン図を通した確率の意味の形成をもとにして－

星野　正樹
上越教育大学大学院修士課程２年

1. はじめに

類推したり振り返って考えるなどの内的な活動は数学の活動の重要なものであるが表面に表れることが少なく、観察することが難しい。しかし、現実の課題などを数学の考え方で解決する活動は子どもの内面で数学化がなされて初めて可能になる。例えば、「３＋５＝８」と「８＝３＋５」が等式という構造で等質であることが子どもの中で数学化されることで、方程式などに応用することが可能になるだろう。筆者はこのように構造化された知識は、子どもにとっての新たな知識を作り出す源泉になると考え、質的な学習の大きな要点と捉えている。構造化は教師から教えられて作られるものではなく、子ども自身が活動の中から作り上げていくものである。数学的活動と数学化は手段と目的の関係にある。そこで、数学的活動の目に見えるものから内的な活動が推し量れないか、また、内的な活動が数学の本質に迫っているかを見るために数学化に注目した。そこで本論文の目的を子どもの数学化の過程を通して数学概念の形成を探ることとした。

2. 数学的活動と数学化の過程の考察

2. 1. 数学的活動についての先行研究

平成１１年中学校学習指導要領解説－数学編－(1999)では数学的活動を大きく、ア）計算処理や図形の具体操作など客観的に観察が可能な活動、イ）類推したり、振り返って考えたりするなどの内面的な活動、と２つに分けている。また、それぞれが独立しているのではなく、中学校段階では知的充足の高まりはア）とイ）の相互的かつ循環的な活動に依存するとも述べている。数学的活動の定義について能田(1983)は、学校数学において、数学に関連した思考活動を総称してよぶとしている。また、大谷(2002)は、現実の問題を、数学的な視点から意味付けることと述べ、内的な概念の形成を行うことを帰着点としている。従って数学的活動は概念の形成する内的な活動によって一定の概念へ帰着し、新たな外的な活動へと進むことがわかる。学習指導要領解説(1999)において、発言や筆記したものなどの外的な活動は、類推したり振り返ったりする内的な活動を誘発すると述べられている。外的な活動と内的な活動は表裏一体のもので、外的な活動は内的な活動を見取る手がかりと見ることができる。

内的な活動を外的な活動から見取ることと捉えると、数学的活動をより的確に考察できると考える。また、やみくもな活動ではなく、大谷(2002)が述べるように、一定の解決への見通しを持ったものを数学的活動と考えることが妥当である。数学的活動を通して数学の持つよさ、価値を創り出すことは子ども自身が数学を心的に構成することである。数学を心的に構成することを数学化の過程として捉える。

2. 2. 数学化の認知過程の先行研究

2. 2. 1. Bruner,Jの先行研究

(1) 活動の認知過程について

Bruner(1968)は認知の成長をその表象から捉える研究を行っている。その発達の過程をEIS原理として理論化した。これは動作的(enactive)、映像的(iconic)、象徴的(symbolic)の順に表象手段を獲得していくというものである。そして「成人ではそれらの3つが相互的に作用しながら存続している・・・」(Bruner,1968)と述べている。つまり、表象の手段は獲得される順序はあるが、前のものが消えるわけではなく、相互に関係しながら概念形成に働くということである。

Bruner(2004)は動作的表象を、手段－目的系、手続き的様式と呼び、方向づけられた活動が含まれると述べている。また映像的表現については、典型的なイメージや類似性にもとづいて世界を描写する力、一種の前概念的構造を我々にもたらしてくれると述べ、あらためて動作的表象と映像的表現は、新しい概念を形成する際の思考の手段として重要であることを指摘している。

(2) 文化的アプローチについて

Bruner(1999)は意味は文化的に形成されたものであり、人間が共有し生活しているものであると述べている。さらにBruner(1999)は人が認知するときには、その文化的背景を考察しなければならないと指摘している。個人によって解釈の様相や筋道は異なるが、文化として確立されたもの、数学でいえば一般的に用いられる表記や記号などとの関わりによって、他人とも分かり合える知識となる。

これには教師の役割が大きく関わってくる。数学を文化の1つと捉えたとき、数学固有の文化と子どもとの接点を図ることは重要である。

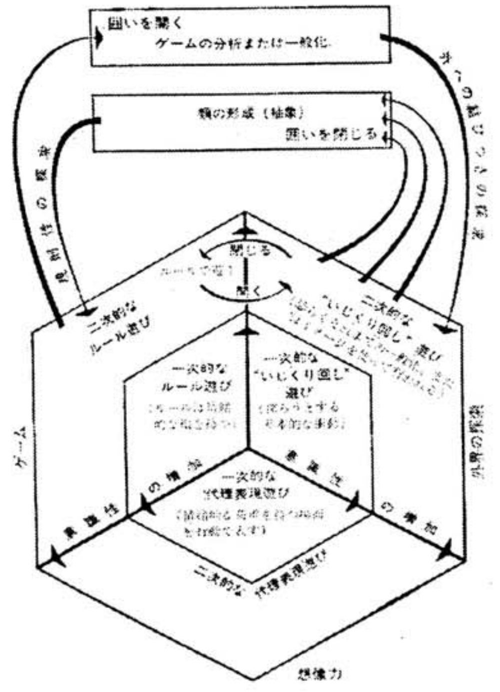

図1　子どもの活動の様相

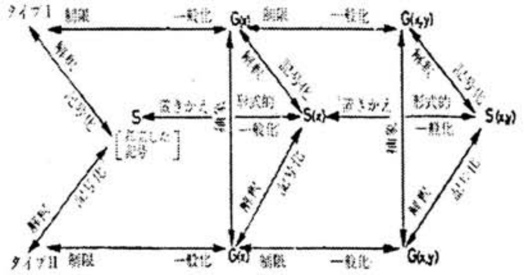

図2　具体物の操作から数学の構造を形成するまでの流れ

2. 2. 2. Dienes,Z.Pの先行研究

Dienes(1977b)の実験を中心に考察する。Dienesの教授実験の対象は6才から8才までである。活動では無目的に積み木をいじるなどの遊びから何らかのパターンを見いだしたり、類を形成する過程を繰り返し、教師による意図的な助言が加わることで数学の概念が形成されていく。子どもによってその形成過程は異なり、図1で示されるようにサイクル状に活動を行き来しながら概念を獲得していく。また、図1の類の開閉をさらに細かく抽

象、具体化、一般化、特殊化、記号化、解釈、形式的と分析し、まとめている（図２）。

Dienes(1977a)は Bruner(1968)のＥＩＳ原理を参考に実験授業を行い、学習過程を、①自由遊び②ゲーム③共通性の探求④表象・表現⑤記号化⑥形式化、の順に起きるとした。Dienes(1977b)は「類が開く」という表現で抽象化を、「類が閉じる」という表現で一般化を示している。

中原(1999)はゲームを図や具体物で表現したものから、共通性を探求するものが多いとして、表象・表現と共通性の探求の順序を入れ替え、修正６段階とした。それが①自由遊び②構造化されたゲーム③表現④共通性の探求⑤共通性の記述⑥公理化である。公理化についてはDienesの形式化とほぼ同義である。Bruner(1968)によれば中学生の段階で映像的、記号的な表象・表現が多くなる。そこで概念の形成も具体物操作よりも図などの映像的（以下イメージとよぶ）操作、計算などの記号的操作が多くなる。また中学生段階では自由遊びや構造化されたゲームの段階は希薄になり、課題から表現を行うことが出発点となることが多い。

3．数学化を捉える視点

数学的活動による数学化の過程を見取るものは外的活動である。Bruner の表象に関する研究より、EIS 原理を目に見える活動の見取りの基本とする。数学化については中原(1999)の修正６段階を用いて考察する。特にイメージ図などのイメージ操作や計算などの記号操作を介して、表現、共通性の探求、共通性の記述、公理化を見ていくことにする。文化的アプローチについては次の２点を考慮する。１点目は個人の文脈から概念の形成の過程を見ることである。子どもが新しい概念を形成する道筋には独自のものがあるという考え方である。２点目は数学文化における思考の道具との接点を持たせるということである。これは既成の文化と個人が関わり合いながら解釈をし、概念を形成していくという考えによるものである。

4．実験授業の構想と概要

4．1．題材と数学的活動及び数学化について

実験授業の単元として中学校３年生において確率の授業を行う。ベン図などの集合の考え方を用いて計算を行ったり、全体構造を考察して確信を得たりする活動を試みることは数学化の過程を探求するのに有効なのではないか。また、確率は生徒にとって興味のある課題であり、かつ、日常生活でよく使われる考え方でもある。類題も多く身近に存在するため、形成した概念を用いる場面が多い。

中学校の確率の学習でよく用いられるものに、表や樹形図がある。特に樹形図はよく用いられる。しかし、全体構造を把握するという面では意識されにくい。そこで教師がベン図を紹介し、確率の計算を行うよう求めることで、ベン図と樹形図が持つ割合という共通性から確率の概念を抽象化できないかと考えた。適度な困難性をもたせるために条件付き確率の課題を設定した。ベン図を紹介することは、数学の文化的道具の提示であり、それを生徒が解釈し、計算の過程まで進める数学化を促進するものである。

4．2．実験授業の構想

各時の課題は下記の通りである。

①課題１「当たりくじが２本、はずれくじが３本入っている袋がある。Ａさんが先に１本引く。次にＢさんが１本引く。それぞれの当たる確率はいくつになるか。」

②課題２「全ての場合を樹形図などを用いずに求めることはできないか。また、確率そのものを計算で求めることはできないか。」

③課題３「ベン図を用いて、確率を計算で求める。」

④課題４「黒の玉が２個、白の玉が１個入っている袋が３つある。これをＡ、Ｂ、Ｃとする。ここから１個ずつ取りだしてＤの袋に入れる。Ｄから１個取りだしたとき、白の玉である確率を求めなさい。」

⑤類題　「黒の玉が３個、白の玉が２個入っている袋が３つある。これをＡ、Ｂ、Ｃとする。ここから１個ずつ取りだしてＤの袋に入れる。Ｄから１個取りだしたとき、白の玉である確率を求めなさい。また黒玉である確率を求めなさい。」

※⑤類題は抽出生のみの活動である。

5．授業における子どもの活動と数学化の過程の解釈と考察

5．1．抽出生（いずれも仮名）の活動と解釈

(1) 高橋の数学化の過程の解釈

＜課題１＞樹形図での解決法で類が閉じている場面

教師が課題１のプリントを配り、これまで学習した方法のどれを用いても良いと補足した。各自課題に取り組み始めた場面である。

○子どもの活動と解釈

高１：配られたプリントを読み、すぐに樹形図を記入し始めた。

高２：図３を５個かき、a,b,c,d,e とアルファベットをつけ加えて図４を作った。

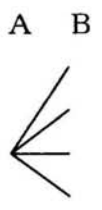

図３　高橋が最初にかいた樹形図

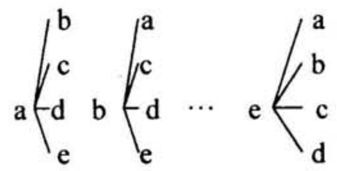

図４　樹形図にａ、ｂ、ｃ、ｄ、ｅを記した図

高３：「当たりを a,b はずれを c,d,e とすると」とプリントに記入し、全ての a,b の横に○をかいた（図５）。

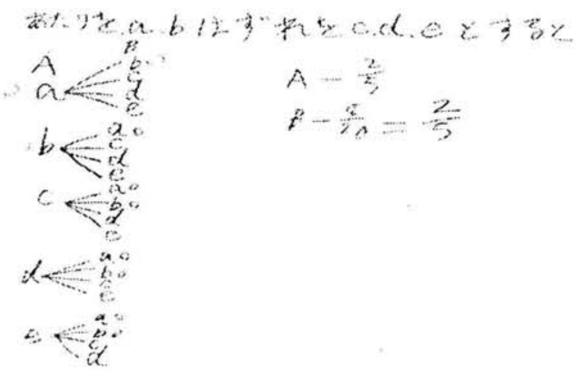

図５　高橋がかいた樹形図

高４：プリントをちらっと見て「Ａ2/5」と記入した。Ｂの○の数を鉛筆の先で数え、「Ｂ8/20＝2/5」と記入した。

高２，３，４より、樹形図を記号として用いており、形式的に処理できる段階である。類が閉じた状態である。高２より、最初に図３を５個かいたことから全体構造についてある程度のイメージをもっていることがわかる。高橋がＡの確率を求めるときプリントを少し見ただけで確率を書いた（高４）のは、Ａの確率の分母に２０が見られないように場合の数が５通りで、○がついている数が２通りであると捉えたためである。高橋はＡの確率を求めるために全体の数を求める必要はないと判断した。Ｂの確率を求めるときは○の数を全て数え、全ての場合の数を２０通りと捉えている。

＜課題２＞ベン図を紹介されイメージ操作を行う場面

教師が樹形図で数えた20通りを計算で求めることができないかと問いかけ、樹形図を用

いて５×４の式の意味を説明した後、図６のベン図を紹介し、Ｂの確率を表す図をかき込むように求めた場面である。

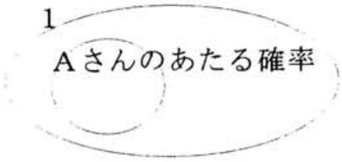

図６　教師が示したベン図

○子どもの活動と解釈

高６：じっと図を見て考え込んでいる。

高７：よくわからないと発言した。

高８：図７をかき（Ｂ当たりの○)、じっと図を見ていたが、やがて消した。

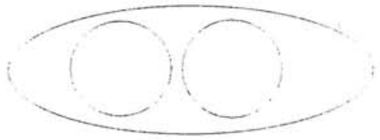

図７　高橋がかき込んだベン図

教師がベン図を紹介したが、わからないと言ったことからベン図について必要感を感じていないことがわかる。ベン図を自分なりに解釈しようとしているが、図に違和感を感じているという様子が見られる。教師が導入した数学の道具であるベン図の意味やなぜ教師がベン図を持ち出したのかという意図がわからず、困惑している。図７ではＡとＢの重なりがないことやＡの○をそのまま模した図をかいたことからもベン図に意味を感じ取れないことがわかる。

<課題３>ベン図のイメージ操作と計算の記号操作を行き来し、類が開きかけている場面

課題２で班ごとに発表したベン図を用いて、確率の計算方法を教師が問うた場面で、割合の計算の方法を教師が図８を用いて説明した後の活動である。

○子どもの活動と解釈

Ｔ：課題２の時に他の生徒が黒板にかいたベン図を元に、計算で確率を求めることを指示した。

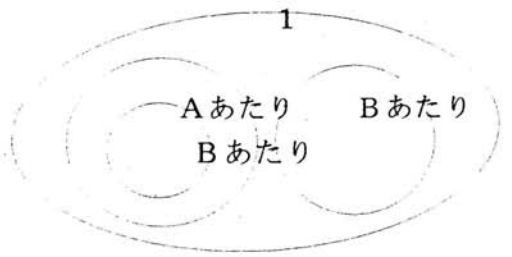

図８　教師が示したベン図

高９：黒板に書かれた2/5×1/4をプリントに写した。
2/5×1/4＝1/10、
3/5×3/4＝9/20と書き、
2/5×1/4＝1/10
＝2/20と書き加えた。

Ｔ：2/20を指し、「どうしたの？これ？」

高10：「通分した。」

Ｔ：「通分？」

高11：「でもいいかな、これ。」といい
2/20を消した。

Ｔ：ここ（3/5×3/4)、はずれる確率を計算してくれたよね。（Ａはずれて）Ｂさんの当たる確率の計算、自分では今どう思う？

高12：だいぶわかった。

Ｔ：そうするとこれ（ＡはずれＢ当たりの確率）は何かける何？

高13：3/5×2/4

高９より、Ａが当たりＢも当たる確率の計算はできた。もう一方でＢのはずれる確率を計算しようとしている。教師の計算の模倣ではあるが、記号の操作での表象を試みている場面である。もう一方で計算した結果と通分している（高９，１０）ことから、２つの確率の和を求めようとしていることがわかる。ベン図のイメージ操作から、Ｂさんの当たる確率は２つの和で求められると判断したからであろう。イメージ操作と記号操作の行き来がある。ベン図と計算の類が開きかけた場面

である。

＜課題４＞樹形図と計算を相互に行き来し、
類が開いた場面

課題１から３までの授業を通して学習したものを用いて、条件付き確率の課題４に取り組んだ場面である。個人個人で取り組み、教師は机間を回りながら支援を行った。

○子どもの活動と解釈

高 14：図９をかき、全ての場合を求めようとする。「８通り」、「あたりが入っている～７通り」と書くが消し、「４通り」、と書いた。自信なさそうに確率を書いたり消したりした。

高 15：図９を斜線で消し、図10をかいた。しかし図10を斜線で消し、図11をかいた。自信を持った表情で1/3と書き、図10の最後に、1/3とつけ加えた。

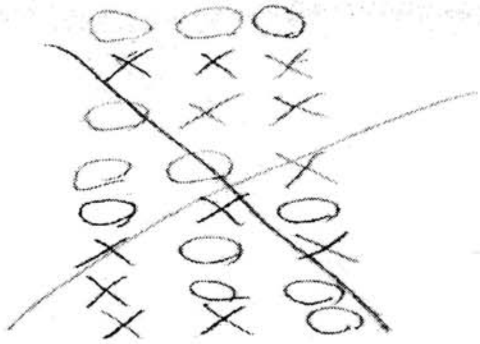

図９　高橋の樹形図に近い考え方

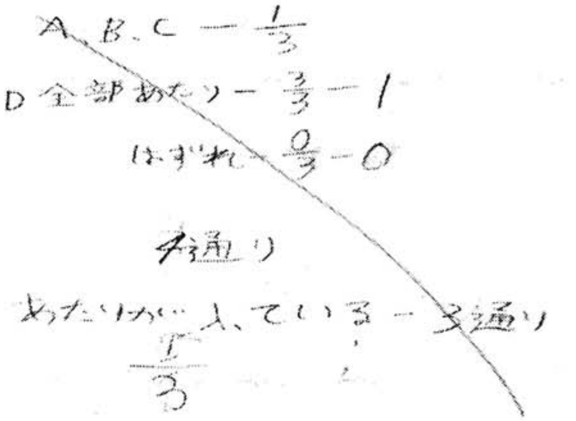

図10　高橋の割合を用いた考え方

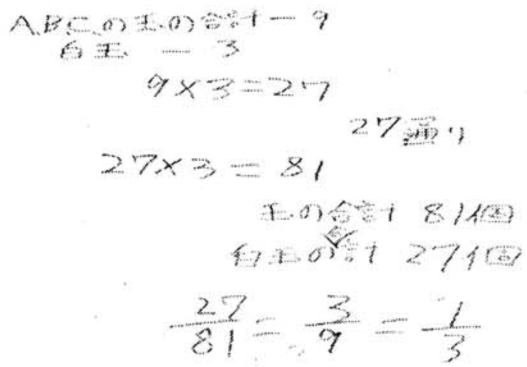

図11　高橋の全体構造を捉えようとした考え方

高14より、図９で○×という樹形図の操作に近い活動を行ったが、図10で「A,B,C～1/3」という記述に見られるようにベン図で考えた割合も使おうとしている。図10では、全体の構造を割合で捉えようとしている。しかし割合の計算の処理に困り、斜線で消している。そこで図11では樹形図での数え上げを併用し、全ての玉の個数を合計して考えようとしている。計算によって複雑な場合分けの樹形図の数え上げを求められないかと考えたためである。記号の操作による表象で２段階の玉の引き方を１つにまとめて考えようとしている。樹形図での全ての場合の計算の考えがベン図のイメージより強く解決の手法に流れている。しかし、全体構造を捉えようとするイメージはある。樹形図での数え上げという固定した考え方から、全体の数を数え上げることと、計算することには共通点があることを見いだしているため、類が開いた状態である。

＜類題＞

放課後に抽出生のみで課題４の類題を行った。少人数で教師が支援をしながら課題解決を行った。

○子どもの活動と解釈

高 16：A、B、Cの袋の玉の数をペンで指さして数えた。５×15＝75、75通りと書いた。

高 17：しばらく考えて75×５を計算し、「玉の数・・・375個　　あたり玉

個」と書いた。

高 18：15×５をもう一度計算し、あたり玉75個と書いた。

高 19：75/375を計算し、1/5と書いた。

Ｔ：「15×５はどういう計算？」

高 20：考え込んだ。「前の時こういう計算だった。」

Ｔ：「この５って何？」

高 21：「１つの袋に５個入っているから。」

Ｔ：「この15は？」

高 22：「３つの袋の合計。」

Ｔ：「１袋の数と３つの合計をどうしてかけるの？」

高 23：考え込んだ。

Ｔ：「この袋（５個入り）が15個ある？」

「どうしてこういう計算になるのかな？」

高 24：「そう思ったから。」と言い考え込んだ。プリントの記述を全て消し図12をかいた。

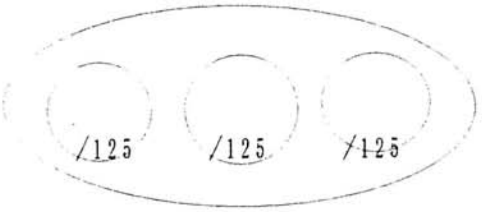

図12　高橋がかいたベン図

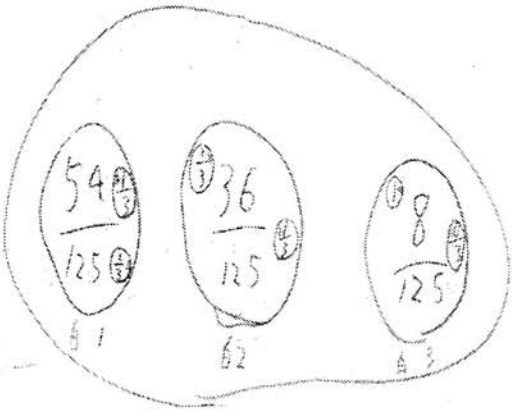

図13　高橋が計算の前にかいたベン図

高 25：「15625＝125²　」「白」と書いた。

高 26：図13をかいた。

Ｔ：「この1/3と54/125は別々じゃないんですよ。」

高 27：１人でしばらく考えていたが、

54/125×1/3＝18/125

36/125×2/3＝24/125

18/125＋24/125＋8/125

＝50/125=10/25＝2/5

と書いた。

高 28：54/125×2/3＝36/125

36/125×1/3＝12/125

36/125＋12/125

＝48/125

と書いた。

高20では課題４での全ての玉の個数を計算して求める考え方を用いようとしている様子が見られる。しかし、教師が15×５の意味をたずねると問われた意味を考え直した。数字をかけ算するという意識だけが残っている状態であり、課題４でＤの袋に３個入ったことから３をかけたのに対して類題ではＤの袋に５個入ると考えたため15×５の式になったと考えられる。

図12をかいたのはベン図が解決に役に立つかもしれないと考えたからである。図12をかいたことから、計算の前の全体像をイメージ操作できた。

高27で確率を正確に計算しだしたのは、その直前の教師の発言によるものである。ここでベン図を割合の計算のヒントとして考えるという数学的道具の助けが高橋の割合の計算という文脈に近づいた。

２つ目の設問を迷わず計算で行ったことから、確率の計算が記号化された。アンケートでは確率の計算を他の問題にも応用したいと考えていることから確率の全体構造をつかむ自信が生まれた。

(2) 佐藤の数学化の過程の解釈

<課題１>樹形図での解決法で類が閉じている場面

佐藤は友達と確率実験器を用いて、実験を1時間行った。樹形図や表などを用いての解決を試みる姿は見られなかった。プリントの記入は直後のインタビュー時のものである。インタビューを行いながら指導を行った。

○子どもの活動と解釈

T：そうか、じゃあ樹形図はどういうふうにかく？

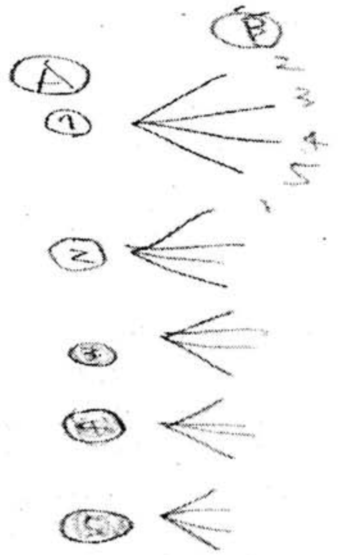

図14　佐藤がかいた樹形図

佐1：こうやってこうやって（図14)。

T：この樹形図を表でかいたら？

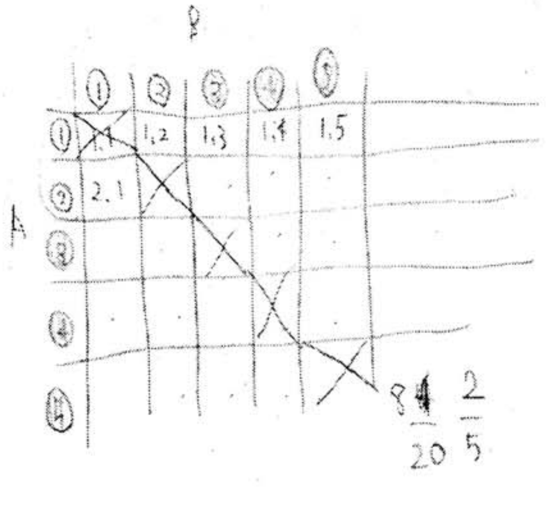

図15 佐藤がかいた表

佐2：(表をかく。）えーどうやるの？

佐3：Aさんがいて B さんがいて・・・。（図15)

T：(表のかき方を指導する。）問題はAさんが引いたら戻さない。

佐4：あーそうかそうか。

授業では樹形図は用いなかった。樹形図と表をかくように教師が求めると、樹形図については佐1のように素早くかくことができた。表をかくとき、とまどったのは、これまで表で確率の課題を解決した経験が少なかったからである。

佐4で表に斜線を引くが、教師の支援がなければそのまま（1，1）や（2，2）とかき、確率を求めると考えられる。しかし教師の支援で斜線を引くことは佐藤にとって納得がいくことであった。樹形図や表のイメージ操作は解決の道具として用いることができた。

＜課題2＞教師がベン図を紹介し、イメージ操作間、イメージ操作と記号操作の相互の行き来が見られた場面

教師が樹形図で数えた20通りを計算で求める方法を樹形図を用いて説明した後、高橋同様、ベン図を紹介し、Bの確率を表す図をかき込むように求めた場面である。

○子どもの活動と解釈

佐5：教師が説明する全体の数を求める方法をじっと聞いている。教師がベン図にBの当たる○をかくよう指示した後、図16をかいた。

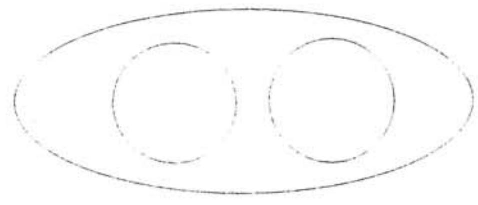

図16　佐藤が中にある右の○をかき加えたベン図

佐6：図16を消し、かなり悩んで図17をかいた。

図17　佐藤がかき直したベン図

佐７：教師の説明を聞き、「Ａだけあたる」「Ｂだけあたる」と書き込んだ。

佐８：友達の説明を聞き「これが１？これが５個あって？」と図18をかいた。

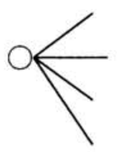

図18　佐藤がかいた樹形図

佐９：「やっぱり違うよね。」と笑いながら図18を消した。

佐10：友達の説明を聞いた。「これが１，２，３，４，５で４ずつある。」（図19）

○○●●●

図19　くじを並べてかいた図

佐５ではＡとＢが結びついていない。これは２つの確率が別々のものであるという認識によるものである。しかし佐４に見られるように、２つの確率が関連しあっていることがイメージで表象できたことは全体構造を把握しつつあることを示している。

佐８より、いったん樹形図に考えを戻してベン図の解釈に用いようとしており共通性の探求が行われてるがやはりベン図と結びつきが希薄である。

＜課題３＞樹形図とベン図の類が開いた場面

課題２で作成したベン図を用いて、計算で確率を求める場面である。

○子どもの活動と解釈

佐11：友達にベン図を示しながら、「ここが1/2で、ここが2/4でしょ？それでこれが2/5。」と説明した。

佐12：$2/5 \times 1/4 + 3/5 \times 2/4$
$= 2/20 + 6/20 = 8/20$
$= 2/5$
と書いた。プリントを見て考え込んだ。「何でかけたり足したり、こんな式なんだろう。」と言った。

佐11よりベン図を用いて課題を解決しようとしている。全体構造は見えたものの実際の計算は難しく樹形図の考え方を用いようとしている様子が見られた。

しかし佐12で割合の計算をしようとしているように、樹形図による数え上げから割合による計算へ移行している。これは樹形図で求めた結果をベン図のイメージに当てはめ、割合を用いて理解しようとしている表れである。

樹形図とベン図が計算結果という記号操作を介してつながりかけようとしているが、計算そのものにはつまずいている。

課題２では計算方法に納得したものの、佐12より「かける」ことの意味に疑問を持っていることがわかる。ベン図のイメージ操作での全体構造の把握が計算の記号操作につながらない。

＜課題４＞ベン図によって確率のイメージの類が開かれ、計算に移行しようとするが混乱する場面

課題４を解決するために個人で追求したり友達と相談する場面である。

○子どもの活動と解釈

佐13：じっとプリントを見ているがわからず、考え込んでいた。プリントに「A,B,Cのあたる確率は各→1/3
はずれの確率は各→2/3」と書いた。その後、図20をかいたが、計算まで至らなかった。

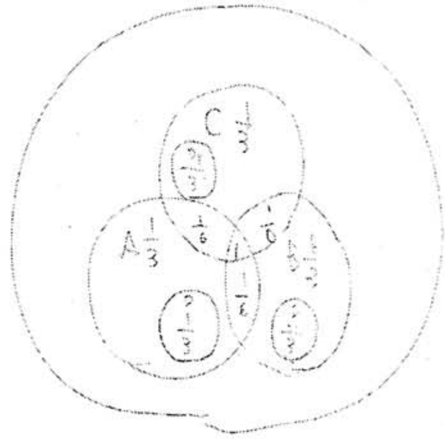

図20　佐藤が隣の生徒のかいた図を参考にかいたベン図

図20で友達とその意味を解釈しようとしてる様子から、全体構造をベン図で捉えようとしている姿が見られる。課題３の活動からイメージ操作の主体が樹形図や表からベン図に移行している。ベン図については記号化できているがベン図の部分の解釈については不十分である。樹形図との行き来が希薄になったことから数え上げの方法への戻りがなく確証がもてない状態になっていた。計算の処理がイメージ操作とつながらないため困惑している姿が見られた。

<類題>

○子どもの活動と解釈

佐 14：「どうやるの」とため息をついた。

T：「図をかいてみたら？」

佐 15：ベン図をかき始めた。(図21)

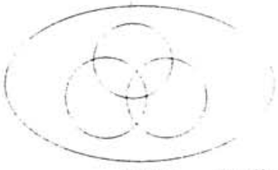

図21　佐藤がかいたベン図

佐 16：ベン図に2/5と記入した。

T：「これだとかなり厳しいのでこの○の中に、最初に白が３個の場合と２個の場合と１個の場合を並べるといい。」

佐 17：ベン図を消し、「白が１つ？２つ？３つ？」と言って図22をかいた。

図22　佐藤が図21の次にかいたベン図

T佐：教師がヒントを与えながら計算を始める。

佐 18：「かけるとさ、増えるんじゃないの。」

T：「1/3をかけるということは何することと同じですか？」

T：「かける1/3というのは、わる？３？」

佐 19：考える。

佐 20：「ふーん。」と納得しない様子だった。「待って、かける1/3？わる３の方がいいよ。」釈然としない様子で計算を始めた。

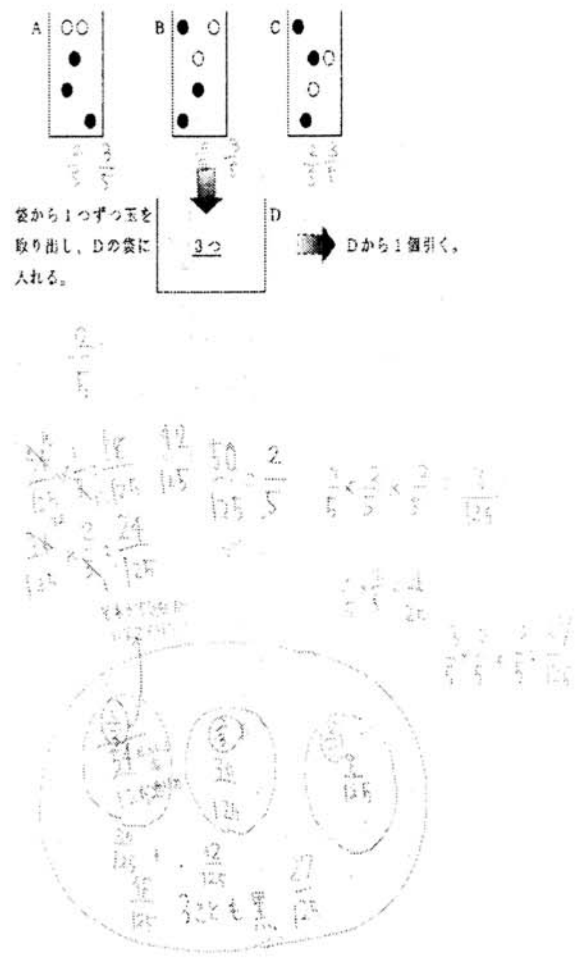

図23　佐藤が最終的にかいた図

課題４で作成したベン図を利用しようとしたが教師のアドバイスで図22をかいた。しかし教師の支援なしでは計算が行えない状態であった。図の意味しているところがわからず、とまどっている。1/3をかけることと３で割ることの意味がつながらないため割合の計算が障壁となり、イメージの操作は行われているが記号操作に結びついていない状態である。

5．2．2人の解釈からの考察

高橋はベン図に対して大きな抵抗を示したが、類題に至ってベン図で全体構造を把握し、計算という記号化まで進むことができた。高橋の数学的活動は主として記号を課題解決の道具として用いるというものであった。樹形図はイメージ操作を超えて見通しを持った活動として記号的に扱われている。課題解決のための全く新しい道具としてベン図を認識した。ベン図は計算へのつながりがあって初めて機能するものである。高橋はベン図というイメージ操作と計算という記号操作を行き来しながら、ベン図の表す意味をつかみ、類題での解決を可能にした。割合の計算の意味という、あらかじめ高橋の文脈に沿って存在していたものがベン図の文脈に結びついたとき、類題の解決が一気に進んだ。最初にベン図に興味を示さなかったのは高橋がイメージ操作の探求ではなく、初めから記号化を意識した活動をしようとしたためである。従って高橋の数学化の過程は記号化を模索する段階で共通性の探求や、表現が行われている。高橋の数学学習の姿勢は記号化をねらいとしたものであるといえる。

一方、佐藤はベン図に対して抵抗感がなく全体構造は正確に把握しているものの、計算の段階で混乱を来し、記号化まで達することはできなかった。数学化の過程がこのように推移した原因には次の３点が考えられる。１点目は、ベン図を紹介したことによって樹形図との抽象化を図ったが、樹形図とベン図がうまく結びつかず、別の方法として理解してしまったこと、２点目はベン図を確率の計算と結びつけるためには「割合の計算」が佐藤の文脈に根付いていなければならなかったこと、３点目は計算などの記号を用いることができず、樹形図やベン図のイメージ操作で解決しようとしていたことである。

２人の解決法の違いはイメージ操作の扱いに表れる。高橋は記号化を意識して、佐藤はイメージ操作を中心にして解決を試みている。しかしイメージ操作にのみ頼った方法では行き詰まってしまう。佐藤の類題での方法がその例に挙げられるであろう。従って数学的活動の中でイメージ操作や記号操作を効果的に行わせるためには、記号操作へ意識付けが重要である。１つの概念が公理化されるまでには樹形図からベン図へというような単線型の活動ではなく、樹形図と要素の数、ベン図と要素の数、そしてその割合の計算という複線型の活動が相互に関連しあうことが重要となる。

以上のことをまとめると次の２点がこれからの授業への示唆となる。１点目は数学的活動ではイメージ操作と記号操作が有効に行き来できる状態であるとき学習が促進されること、２点目は記号化を意識した活動と、記号化を意識せずイメージ操作を中心にした活動では、記号化を意識した活動がより構造を把握するために重要であることである。

6．今後の課題と研究の方向への示唆

確率を樹形図での数え上げという手続き的様式から、ベン図による全体構造の把握と計算という記号化に進むために、記号化を意識したイメージ操作が重要であることがわかった。また、記号操作に必要な割合の計算などの概念をイメージ操作と結びつけるための手だてが必要である。割合の概念に結びつける手だてとして統計的確率の場面での割合

と、数学的確率の場面での割合の整合性を体験する必要があるのではないか。樹形図や表をもとに集合の要素を把握し、ベン図を要素の集まりと認識するという橋渡しが必要であることも明らかになった。また記号化を目的をすることで数学化の進み方に違いがあることがわかった。これは文化的な道具を子どもにそのまま与えても、子どもの文脈に沿ったものでなければ受け入れは困難であるということである。数学化の過程を子どもの文脈に沿った形で進めるためには、それぞれの子どもの状況を的確に把握するとともに、文化的な数学の道具をどのように導入するかをさらに考察する必要がある。

一方、子どもの表象から数学化の過程が解釈できることを確認することができた。外的な活動から内的な活動を推し量る１つの方法としてさらに研究を進めていきたい。

１つの概念が公理化されるまでにはイメージから記号へというような単線型の活動では概念の形成には不十分であることもわかった。イメージと記号の相互作用や具体物との相互作用など複線型の活動が関連しあうことが必要であり、それぞれの活動を有機的に作用させるための手だてを研究していかなければならない。

【引用・参考文献】

Bruner,J.(1984).教育の過程.(鈴木祥蔵,佐藤三郎訳.初版 1963).岩波書店.

Bruner,J.(1969).思考の研究.(平光昭久訳).明治図書.

Bruner,J.(1968).認識能力の成長上.(岡本夏木他訳).明治図書.

Bruner,J.(1978).認識の心理学下.(平光昭久訳).明治図書.

Bruner,J.(1999).意味の復権フォークサイコロジーに向けて.(岡本夏木,仲渡一美,吉村啓子訳).ミネルヴァ書房.

Bruner,J.(2004).教育という文化.(岡本夏木,池上貴美子,岡本佳子訳).岩波書店.

中学校学習指導要領（平成１０年１２月）解説－数学編－.(1999).文部省

Dienes,Z.P.(1977a).算数・数学の創造的学習.(吉田耕作,赤攝也監修,片桐重男訳).新数社.

Dienes,Z.P.(1977b).算数・数学学習の実験的研究.(吉田耕作,赤攝也監修,沢村昴一訳).新数社.

能田伸彦.(1979).算数・数学科　授業の設計と実際－評価を中心にした科学的方法－.東洋館出版社.

能田伸彦.(1983).算数・数学科　オープンアプローチによる指導の研究－授業の構成と評価－.東洋館出版社.

中島健三.(1982).算数・数学教育と数学的な考え方　その進展のための考察.金子書房.

根本博.(1999).中学校数学科　数学的活動と反省的経験　数学を学ぶことの楽しさを実現する.東洋館出版社.

大谷実.(2002).学校数学の一斉授業における数学的活動の社会的構成.風間書房.

大村平.(1980).確率のはなし－基礎・応用・娯楽－.日科技連出版社.

清水静海.(1996).学ぶ意欲を育てる算数授業の創造.明治図書.

北山忍.(1998).自己と感情：文化心理学による問いかけ.認知モノグラフ/日本認知科学会編.共立出版.