上越数学教育研究, 第 20 号, 上越教育大学数学教室, 2005 年, pp.133-142.

中学校図形領域における証明の意義の指導について

五十嵐　真
上越教育大学大学院修士課程１年

１．はじめに

証明を苦手とする生徒は多い。小関ら(1987)が、記号化、証明、図の意味、文章化、論証の意義、の５つの観点を設けて考察していることは、生徒が証明を苦手とする原因が多種多様であることを示唆している。

筆者は中学校教師としての経験から、論証のストラテジーの指導を行うならば証明を書けるようになるであろうと考えていた。事実、長谷川・三輪(2004)も、図形の論証に有効なストラテジーを用いた指導はそれを用いない指導と比べて効果が見られたと報告している。

しかし、調査問題自体の得点は高くない結果となっている。このようにストラテジーを指導しても証明の理解が十分になされないのはなぜだろうか。

証明の学習は論理的思考力を高めるのに有効であると一般的には考えられている。確かに教師の立場からみた場合、証明を指導する意義は論理的思考力を高めることである。しかし、生徒は証明を学ぶ意義を教師と同じようには捉えていないために、証明の理解がなされないのではなかろうか。

たとえば、一人の子どもが「分数の割り算」につまずいているとする。従来の学習観からすれば、これは解き方とか勘違いという「知識」の獲得状態（認知・思考）にかかわることだとされてきた。しかし、その子どもが「分数の割り算の世界に入る」こと自体を拒絶しているのかもしれない。

算数の計算という世界そのものが、自分とはカンケイナイ世界としてしか見えていないのかもしれない。これではどんなに熱心に「正しい解き方」を示されても、そしてそのときは一応「わかり」、「できるように」なったとしても、すぐにもとのもくあみになることは目に見えている。

また一方、なにかの拍子に、その子どもが「算数の割り算の世界に入る」ことを自ら納得したならば、分数の割り算のつまずきは、ほんの一言のヒントで解消するかもしれない。あるいは、他人から教えられるよりも、自分でいろいろ試行錯誤してわかりたくなり、また、わかってしまうかもしれない。（佐伯ら, 1995）

生徒は証明を学ぶことができないのではなく、「証明の世界に入る」こと自体を拒絶しているのではないか。証明の意義を理解していないから生徒は証明を学ぼうとせず、学んでもいないのに最初から苦手であると思い込み、食わず嫌いになっているのではないか。

そこで本稿は、中学校図形領域における証明の意義の指導について考えていくことを目的とする。

２．証明の意義

中学校２年生の図形領域で生徒が学ぶ図形は、小学校において既にその内容のほとんど

が実測や実験という方法で学習されている。それゆえ、証明の意義の指導なしには、生徒は証明という新たな追求方法を必要であるとは思わないと推測される。

そこでまず、証明の意義について考える。

deVilliers(1990)は証明の機能について次の５つをあげている。

①立証の手段
②説明の手段
③体系化の手段
④発見の手段
⑤コミュニケーションの手段

①立証の手段としての証明の機能について、証明は、絶対的確実さ、それゆえに推測の正当性の確立での絶対の権威を供給すると述べている。この機能は証明によって命題の一般性が保証されることを述べていると捉えられる。

②説明の手段としての証明の機能について、立証の手段としての証明の機能によって確信は増すかもしれないが、一般に説明がなぜ本当であるかを満足に提供せず、洞察あるいは理解の心理上の満足な感覚を与えないとして、説明の手段としての証明の機能の存在を指摘している。

③体系化の手段としての証明の機能について、証明は、公理、定義、定理といった演繹体系の中に種々の既習事項を体系化することにおいて不可欠な道具であると述べている。

④発見の手段としての証明について、形式的な推論の文脈の過程の中で、証明はしばしば新しい結果を導くことができるため、証明は発見・発明の手段でもあると述べている。例えば、凧形ＡＢＣＤの各辺の中点Ｅ、Ｆ、Ｇ、Ｈを結ぶとき、四角形ＥＦＧＨは常に長方形になるという命題について、証明によって、対角線が直交するという仮定が結論に影響する不可欠な特徴であり、隣接する辺が等しいという仮定は必要とされないことが発見できると述べている。

⑤コミュニケーションの手段としての証明の機能について、証明は数学的な成果を伝達する独特な方法であると述べている。

では、これら５つの証明の機能のうち、数学教育の場で指導されるべき証明の意義はどれであろうか。

時松(1997)は、deVilliers の証明の５つの機能とギリシア数学史において証明が必要となった場面や状況について調べ、中学校数学における証明の機能が５つのどれかに偏った指導が行われるなら、子どもたちは証明の必要性を感じない。また、証明の機能を知るということは証明の必要性を感じるために必要なことではあるが十分ではないと報告している。

さらに今後の課題として、子どもたちを証明の機能が必要となる状況に置くと本当に証明の必要を感じてくれるのか実践研究を行って検証すること、証明の機能の中には証明ができあがってからでないとわからないものもあり、子どもたちが証明をつくれるようにするための研究を行うことが必要であると指摘している。

Hanna(1996)は、数学での証明の主な機能が正当化と確証（①）であるのに対して、数学教育での主な働きは確かに説明の機能（②）であり、証明は、生徒がなぜ命題が真であるかという洞察を得るのを援助することにおいて一番初めにあり、最も重要な方法であると述べている。

茅野(2003)は、今日、証明の機能にあらためて着目する理由として、数学や数学教育でのコンピュータ利用の増加に伴い、普遍妥当性を確かめるといった立証の機能（①）のメリットが薄れてきていると指摘している。コンピュータを用いるなどの帰納による検証は説明することへの好奇心をそそることを指摘する研究もある一方、コンピュータで推測の

普遍妥当性についての確信を得るために証明の必要性をもちにくいと指摘する研究もあるからである。

そして、発見（③）の内容を、生徒が何もないところから新しいことを見つけるという趣旨ではなく、生徒が証明の分析を通して新たな定理を生成することであるとし、素朴な定理を洗練するときに発見は必要となるゆえ、学校数学においてこそ証明の機能としての発見を用いることが相応しいと述べている。

このように、deVilliers は５つの意義をあげているが、数学教育においては、Hanna は説明の機能に重点を置くべきであり、茅野は発見の機能に重点を置くべきであるとする。説明と発見の意義に重点を置きつつ、どの意義に意義を見出すかはそれぞれの生徒によって異なると予想されるため、時松がいうように５つの意義すべてを指導していくことが妥当であると考える。

教師側は以上のように証明の意義について述べているが、学ぶ主体である生徒は deVilliers のあげる５つの証明の意義のうち、どの意義に証明を学ぶ意義を見出す傾向があり、また、どれくらい証明の意義を理解し、理解の様相はどのようになっているのであろうか。

３．証明の意義の理解に関する研究

小関ら(1987)は、論証の意義（一般性・しくみ）を理解しているか否かを判定した結果、演繹的に証明しなければならないことの意味を理解している段階まで達している生徒は中学校２年生で８％、中学校３年生で 23 ％であると報告している。

梅川(2001)による中学３年生を対象にした調査においても、演繹的証明の意義を理解している生徒は有効回答の 24.5 ％と小関らとほぼ同様の結果が報告されている。

また、梅川は、特殊な正三角形による説明は一般的でないことを指摘しながらも任意の「適当」な１つの三角形で成立すれば一般性をもつと認識している生徒が 148 名中 18 名いたこと、生徒達の選択理由の記述から生徒がよい説明と考える判断基準は「わかりやすさ」であり、これは演繹的証明の意義を理解していると思われる生徒にも、そうでないと思われる生徒にも共通に見られる特徴であることを報告している。

さらに、梅川(2002)は、基礎学力の定着が不十分な生徒の中にも数学的活動を実現させて演繹的証明の説明性の意義を認識している生徒がいるなど、基礎学力の定着と証明の意義理解との間に明らかな相関関係は見られないと報告している。

このことに関して Hadas ら(2000)も、証明という儀式の機能を成功した学生であっても、常にその意味に気付いていたというわけではなく、特に命題が学習者による発見のない出来合いの事実として与えられたときは、証明のポイントや証明の必要性をめったに理解しなかったと報告している。

梅川(2002)は、証明の学習意義は学力の定着に伴って自然に理解されるものではなく教師の意図的な指導が必要であり、一般性や説明性の意義を理解できる「適切な文脈」を教師が意図的に設定することが必要であると述べている。さらに、証明の意義の理解は学力とは関係なく実現しうることであると述べている。

以上の研究から、従来の指導を行った場合、証明の意義を理解している生徒は中学校２年生で約１割、中学校３年生でも２割～３割であること、証明の手続きの理解と証明の意義の理解のと間には相関関係がないこと、生徒は立証性（一般性）よりも説明性に証明の意義を見出す傾向があることが分かる。

４．証明の意義の指導に関する研究

生徒の証明の意義の理解度が低いという調査結果や、意義の理解は意図的になされるべ

きであるとの報告を受けて、証明の意義の指導の先行研究がいくつかなされている。

4.1　榛葉らの研究

榛葉ら(2002)は、①中学校２年生の図形の論証の学習では、小学校及び中学校１年生で学習した図形の性質を学級で共有して既知のものとして認め、生徒の疑問から生じた問題を解決することを中心に授業を展開すること、②基本作図を中学校１年生で扱わず、中学校２年生で取り上げ、その方法が正しいことの証明を考えるという展開を重視して論証の指導につなげること、この２つの方針に基づいた授業を行うことで、生徒は単元の最初から証明の意味をつかんだり、証明の方法を理解することができ、教師が唐突に必然性のない問題を提示することがほとんどなくなったと報告している。

しかし、唐突でなく必然性がある提示であっても、教師が提示した問題が約半数あった。また、単元終了時までに、教科書とほぼ同様あるいはそれ以上の図形の性質がまとめられ、得られた定理は証明できた時点で「図形の性質のまとめプリント」に書き加えていったため生徒の混乱はほとんど見られなかったが、「平行四辺形になるための条件」が１つあがったからといって他の条件も続けて扱うことになるとは限らなかったり、「２角の等しい三角形は二等辺三角形である」ことの証明で、既に証明されていた平行四辺形の性質を利用する生徒がいたりするなど、教科書のように系統的に整理した形で授業は進まなかった。

教科書のように系統的に整理した形の授業によってより多くの生徒が証明の手続きを理解し、かつ、より多くの生徒が単元の最初から証明の意義を理解できるための指導はどうあればよいのであろうか。

4.2　Hadas らの研究

Hadas ら(2000)の矛盾と不確実性を創り出す指導実践は、教科書のように系統的に整理した形の授業によってより多くの生徒が証明の方法を理解し、かつ、より多くの生徒が単元の最初から証明の意義を理解できるための指導の示唆を与えてくれるものである。

Hadas らは、予想された図形の性質の普遍性について、生徒は動的な幾何学環境における活動によって実証されると感じる可能性があるが、演繹的な説明では確信をあまり感じないとして、動的な幾何学環境における経験のみに基づいた生徒の確信にうまく対処して演繹的な説明の必要性を生み出すために、矛盾と不確実性を創り出すことを意図した指導を行った。

矛盾と不確実性を創り出すために、Hadas らは次の６つの動的な幾何学環境の媒介的機能を利用した。

①推測を立てるための学習環境として役立てること ②（動的な幾何学ツールの有無に関わらず定式化された）最初の推測を論駁（あるいは確認）し、論駁された場合、期待された結果と実際の調査結果との間で矛盾を創り出すこと ③推測が論駁されも確認されもしない場合において（すなわち、不確実性の状況において）、最初の推測から第２の推測へと生徒を「押す」こと ④帰納的な試行に基づいて、結論は正しいと確信するように生徒を導くこと ⑤存在例の構築を可能にすること ⑥説明の追加の源を提供すること

これら①～⑥の動的な幾何学環境の媒介的な機能を利用するために、次のような課題系列で課題を提示し、授業を実践している。

課題１：多角形の内角の和を求めよ。 そのことを証明せよ。 課題２：多角形の外角の和について仮説を立てよ。

このような課題系列で課題を提示し、授業を構成することによって、多くの生徒は「多角形の内角の和は角の数に伴って増加する」

ことから「多角形の外角の和も角の数に伴って増加するであろう」との推測を生み出した。多角形の外角の和の命題を既に知っている生徒でさえも、角の数が増加するのに伴って外角の和も共に増加するという直観的信念が非常に強いということを示した。この推測をチェックすることで、この信念が矛盾と驚きを生み出し、その矛盾が説明の必要性の引き金を引いたと報告している。

Hadas らは、このような課題系列が証明の説明性の意義にとって有効であったことを報告しているが、課題や課題系列が先の６つの媒介的機能とどのように関連し、どのように生徒を証明へと向かわせたのかについては明確に述べていない。そこで、課題や課題系列が先の６つの媒介的機能とどのように関連し、どのように生徒を証明へと向かわせたかについて考察する。

なお、「②（動的な幾何学ツールの有無に関わらず定式化された）最初の推測を論駁（あるいは確認）し、論駁された場合、期待された結果と実際の調査結果との間で矛盾を創り出すこと」は、「②－１最初の推測の論駁あるいは確認」と「②－２期待と実際との間の矛盾の創造」の２つの項目に分けて考察する。

①推測を立てるための学習環境

「課題１：多角形の内角の和を求めよ」に対して、生徒はツールを操作して「多角形の内角の和は角の数に伴って増える」という最初の推測をする。

②－１最初の推測の論駁あるいは確認

「課題１：そのことを証明せよ」により、生徒は「ｎ角形の内角の和は 180°×(n-2)である」と最初の推測を確認し、「多角形の外角の和も同様であろう」との期待を高める。

②－２期待と実際との間の矛盾の創造

「課題２：多角形の外角の和について仮説を立てよ」により、「多角形の内角の和は角の数に伴って増えたから、外角の和も角の数に伴って増えるであろう」との期待をもっている生徒たちは、期待と同じ仮説を立てる。しかし、実際にツールでいくつかの多角形の外角の和を求めると、「常に等しい」という期待と矛盾する結果が生ずる。

③不確実性の状況において、最初の推測から第２の推測へ生徒を「押す」こと

矛盾の発生により「何が正しいのか」との不確実性の状況に置かれた生徒は、「多角形の内角の和も外角の和も角の数に伴って増加する」という最初の推測から、「多角形の内角の和は角の数に伴って増加するが、外角の和は角の数に関係なく一定である」という第２の推測を立てる。

④帰納的な試行に基づいて、結論は正しいと確信するように生徒を導くこと

いろいろな多角形の外角の和を実測により求めることで、第２の推測は正しいと確信する。

⑤存在例の構築を可能にすること

動的な幾何学環境において、多角形をかき、その内角や外角の和を求めることは容易である。

⑥説明の追加の源を提供すること

②－１におけるｎ角形の内角の和を求める証明が、多角形の外角は 360°であるという証明の源を提供する。

Hadas らは６つの媒介的機能の順序性について触れていないが、以上の考察から、①～④は順序性があり、⑤と⑥は順序性がないと捉えることができる。

なお、④の帰納的な試行により、演繹的な証明の必要性が失われる危惧があるが、確信のない不確実性の状況のままでは、生徒は「反例が存在するかもしれない」と考え、反例を探そうとし証明しようとしないと考えられる。帰納的な試行により「結論は正しい」と確信することは、意義とは別に証明の実行に取りかかる上で必要なことである。

帰納的な試行により結論は正しいと確信す

るように導かれたとしても、その前の②－２での矛盾と不確実性の発生によって生徒は「なぜ最初の推測ではなく、第２の推測の方が正しいのか」と、最初の推測と第２の推測との間の矛盾を解消するための説明を求めて証明しようとすると考えられる。

さらに、⑥の説明の追加の源の提供により、その源を参考にして、自力で証明を行うことも期待できる。

4.3 Balacheff の研究

証明の説明の意義の指導における矛盾の利用については、Balacheff(1997)も述べている。

Balacheff は、矛盾を創り出す方法として「証拠としての反例」と「触媒としての社会的認知葛藤」の２つがあると述べ、「証拠としての反例」について、次の事例で示している。

> 課題１：平行四辺形ＡＢＣＤをかく。
> 点Ａ′は点Ｂに対するＡの対称点。Ｂ′は点Ｃに対するＡの対称点。他も同様。その結果Ａ′Ｂ′Ｃ′Ｄ′を結んだ図形はどんな図形になるか。証明もせよ。
> 課題２：四角形ＡＢＣＤが正方形ならば四角形Ａ′Ｂ′Ｃ′Ｄ′はどうなるか。
> 課題３：長方形についてはどうか。

四角形Ａ′Ｂ′Ｃ′Ｄ′は、課題１では平行四辺形になり、課題２では正方形になるが、課題３では長方形にはならない。

この課題３での反例の意味が問題になり、生徒は「どこに問題があるのか。証明が間違っているのか。推測が間違っているのか。例として正方形が非常に特殊すぎたのか」などと問い始めると述べている。

Balacheff のこの課題系列を Hadas らの矛盾と不確実性を創り出すための６つの媒介的機能から見ると、次のようにいえる。

<u>①推測を立てるための学習環境</u>

課題１によって、生徒は「平行四辺形の周りには平行四辺形ができる」と推測し、証明によって確証を得る。

<u>②－１最初の推測の論駁あるいは確認</u>

課題２によって、生徒は「正方形の周りには正方形がでできる」と推測し、課題１の結果と合わせて「四角形の周りには同じ形の四角形ができる」と推測する。

<u>②－２期待と実際との間の矛盾の創造</u>

課題３によって、生徒は「四角形の周りには同じ形の四角形ができる」との推測から、「長方形の周りには長方形ができる」と期待している。しかし、実際にできた四角形は長方形ではなく平行四辺形であることから、矛盾を感じる。

<u>③不確実性の状況において、最初の推測から第２の推測へ生徒を「押す」こと</u>

矛盾が発生した②の時点で、生徒は「四角形の周りには同じ形の四角形ができる」という推測は不確実で、「四角形の周りには常に平行四辺形ができる」という推測が正しいのではないかと第２の推測を立てる。

<u>④帰納的な試行に基づいて、結論は正しいと確信するように生徒を導くこと</u>

生徒は、③で第２の推測を立てると同時に「平行四辺形、正方形、長方形以外の四角形では、周りにできる四角形は何になるのか」と追求心をもち、条件を満たす図をいくつかかく。この活動を通じて生徒は「(この条件では）四角形の周りには常に平行四辺形ができる」という第２の推測は正しいと確信する。

<u>⑤存在例の構築を可能にすること</u>

動的な幾何学環境がなくても、このような条件で四角形の周囲に別の四角形をかくことは容易にできる。

<u>⑥説明の追加の源を提供すること</u>

①での証明を振り返ることにより、長方形の周りにできる四角形は長方形ではないことが説明される。

Balacheff の課題系列は、②－１の最初の推測の確認が強力になされるため、Hadas ら

の課題系列以上に生徒に正しくない期待を抱かせるものである。正しくない期待が強化される分、矛盾も大きく、生徒の「なぜか」と思う気持ちを大きくすると考えられる。

4.4　榛葉ら、Hadas ら、Balacheff の研究について

証明の意義の指導において重要なことは、図形のもつ性質を自明なものではなく、明らかにしたいものとして、生徒が認識することであるといえる。

榛葉らは、生徒たちにとって自明な性質は学級で共有して既知のものとして認め、生徒が明らかにしたい命題を解決することを中心に授業を展開することで、証明の意義の指導を図っている。

一方、Hadas らは、矛盾や不確実性を生徒に抱かせることによって、証明の意義の理解を図っている。Hadas らや Balacheff の研究からは、単元中の題材の配列を変えなくても、矛盾や不確実性を生徒に抱かせることで自明である性質が、生徒にとって明らかにしたい事柄になり得ることが示唆として得られる。知識の系統性や手続きの定着を重視した教科書の題材配列を崩すことなく、生徒に対して証明の意義の理解を指導できる可能性があるという示唆が得られる。

また、Hadas らが示した６つの媒介的機能は、動的な幾何学環境が学習対象と学習者との間を媒介するときにはたらく機能のことであるが、動的な幾何学環境にない日常の授業においても、これらの媒介的機能を参考にして矛盾と不確実性を生じさせることで証明の説明の意義を指導できると推測される。証明によって矛盾が解消できたことにより、生徒は証明は他の方法に比べてわかりにくくても証明には理由や仕組みが明らかになる意義があることを理解するからである。

矛盾と不確実性を用いる指導により、よい説明の判断基準を「わかりやすさ」であるとしている大部分の生徒に、「理由や仕組みが明らかになる」という判断基準を付加することができると考えられる。

５．証明の意義の指導の構想

本節では、これまでに得られた知見をもとに、「二等辺三角形の２つの底角は等しい」という題材を例として、証明の意義の指導について考える。

5.1　教科書の扱いについて

「二等辺三角形の２つの底角は等しい」という題材について、教科書では一般に次のように扱われている。

課題１：二等辺三角形の形の紙を折るとぴったり重なる。

課題２：二等辺三角形の２つの底角は等しくなりそうである。△ＡＢＣにおいて、ＡＢ＝ＡＣならば∠Ｂ＝∠Ｃであることを証明せよ（図１）。

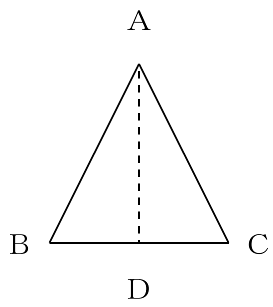

図１

［証明］∠Ａの二等分線を引き、辺ＢＣとの交点をＤとする。

△ＡＢＤと△ＡＣＤで

仮定から、　ＡＢ＝ＡＣ　①

作図から、∠ＢＡＤ＝∠ＣＡＤ　②

共通だから、　ＡＤ＝ＡＤ　③

①、②、③より、２組の辺とそのはさむ角がそれぞれ等しいから、

△ＡＢＤ≡△ＡＣＤ

したがって、　∠Ｂ＝∠Ｃ（証明終）

課題１は、操作活動による意欲の喚起や、頂角の二等分線を引くと合同な三角形ができるという証明する際のアイデアの付与を目的

にしたものと考えられる。

しかし、課題１からは二等辺三角形の２つの底角が等しいことを証明する意義にはつながらない。生徒の多くは「二等辺三角形とは２つの辺が等しくて２つの角が等しい三角形である」と認識しているため、二等辺三角形の紙を折って辺や角が重なるのは当然のことであるからである。このことを考慮して、証明前は「二等辺三角形」という用語を使わない配慮をしている教科書もある。

紙を折るという操作は、証明の意義につながらないばかりか、証明の意義の理解を阻害する可能性も秘めている。Balacheff(1997)は、生成的な例は、実践的な証明では命題の根拠とされ、知的な証明では命題の性質とされると述べている。よって、この単元のねらいがこれまでの実践的な証明から新たな知的な証明の段階に移行することであるならば、二等辺三角形の紙を折って重ねる操作は命題の根拠ではなく性質とされるべき事柄であるといえる。中学校の図形領域においては「折って重なるから合同である」のではなく、「合同だから折って重なる」のであると生徒が思考する課題系列でなければならない。

課題２も証明の意義の理解にはつながらない。課題２では教科書に問題だけでなく証明も記述されており、生徒自身が証明を記述することは期待されていない。この証明には補助線も必要であることや、ここは証明という新しい追求方法に慣れる場面であることが証明の記述がされている理由であると考えられるが、命題も証明も教科書や教師から与えられるために、生徒は証明の意義や必要性を感じない。意義を理解しないばかりか「なぜ分かり切ったことを、わざわざ難しく説明しなければならないのか」との拒否反応すら引き起こしかねない。

二等辺三角形の図をかかせ、角度を測らせることによって命題を生徒自身が発見するように仕組む授業も考えられるが、そうしたとしても、生徒は既に小学校で学んだ事柄であるゆえ、証明したいという気持ちにはならないであろう。

課題２の前に「どんな二等辺三角形についても２つの角が等しいことはいえるのか」という疑問を投げかけている教科書もあるが、生徒は立証（一般性）に証明の意義を見出さないことは３節で触れた小関らや梅川の調査結果が示している。

教師が「なぜ二等辺三角形の２つの角は等しくなるのか」と発問する方法も考えられるが、生徒は「角度の計測により説明は既に済んでいる」と答えたり、「折って重なるから合同である」と答えたりする。発問した教師は証明に説明の意義を見出しているが、生徒は証明に説明の意義を見出していないことが生徒の反応からうかがえる。

生徒が証明に説明の意義を見出すためには生徒の中から疑問が生まれることが必要であり、そのためには矛盾と不確実性を創り出すことが必要である。

5.2　矛盾と不確実性を用いた二等辺三角形についての授業の構想

「二等辺三角形の２つの底角は等しい」という題材において、矛盾と不確実性を創り出すことによって証明の意義の指導を行うには、どのような授業を構成すればよいだろうか。

①推測を立てるための学習環境

課題１：２つの辺が等しくて角度は等しくない五角形をかきなさい。

生徒は図をかき、「２つの辺が等しくて角度が等しくない五角形をかくことができたから、２つの辺が等しくて角度は等しくない多角形をかくことができる」と推測する。

②－１最初の推測の論駁あるいは確認

課題２：２つの辺が等しくて角度は等しくない四角形をかきなさい。

生徒は図をかき、「２つの辺が等しくて角度は等しくない四角形をかくことができた。最初の推測は確認された」と期待を高める。

②－２期待と実際との間の矛盾の創造

課題３：２つの辺が等しくて角度は等しくない三角形をかきなさい。

生徒は条件を満たす図をかこうとする。しかし、どうしても条件を満たす図をかくことができない。[1)]

生徒は「２つの辺が等しくて角度は等しくない三角形はかくことができる」と期待していたが、実際はそのような三角形はかくことができないことを知って、期待と実際との間に矛盾を感じ、「２つの辺が等しくて角度は等しくない五角形や四角形はかくことができたのに、そのような三角形は本当にかくことができないのか」と不確実な感覚をもつ。

③不確実性の状況において、最初の推測から第２の推測へ生徒を「押す」こと

矛盾が発生した②の時点で、生徒は「『２つの辺が等しくて角度が等しくない多角形をかくことができる』という最初の推測は不確実で、『２つの辺が等しくて角度が等しくない多角形をかくことができる。ただし、三角形では２つの辺が等しいならば角度は等しくなる』という第２の推測が正しいのではないか」と推測を変化させる。

④帰納的な試行に基づいて、結論は正しいと確信するように生徒を導くこと

生徒は、③で第２の推測を立てると同時に「２つの辺が等しい他の三角形では角度はどうなるのか」と、条件を満たす図をいくつかかき、見た目で判断したり、分度器で測定したりするであろう。この活動を通じて生徒は「三角形では２つの辺が等しいならば角度は等しくなるであろう」という第２の推測は正しいと確信する。

⑤存在例の構築を可能にすること

２つの辺が等しくて角度が等しくない多角形の存在は、定規等で容易にかき示すことが可能である。

⑥説明の追加の源を提供すること

教師もしくは上位生徒による事前の凧形の１組の向かい合う角は等しいことの証明が、二等辺三角形の２つの底角は等しいという命題の説明の源となると考えられる。

しかし、凧形の１組の向かい合う角は等しいことの証明は、ほとんどの教科書では扱われておらず、扱われていたとしても二等辺三角形の題材とは別の扱いである。そこで、二等辺三角形の２つの底角は等しいことの証明の源になるよう、課題１の前もしくは課題２の後で、「ＡＢ＝ＡＤ、ＢＣ＝ＤＣであり、∠Ｂ＝∠Ｄでない四角形をかけ」との課題に取り組ませ、「四角形において、ＡＢ＝ＡＤ、ＢＣ＝ＤＣならば、∠Ｂ＝∠Ｄである」ことの証明を事前に提供しておくようにする。

この凧形の性質についての証明が提供された時点では証明という新しい追求方法に意義を見出さなかった生徒も、②－２において矛盾が生じた段階でこの証明を振り返り、証明の説明の部分に着目することが期待できる。

また、このように凧形での証明を源にした場合、生徒が引くであろう補助線は教科書のような二等辺三角形の頂角の二等分線ではなく、二等辺三角形の頂点と底辺の中点とを結ぶ線であろうと考えられるが、生徒自身で補助線を見出すことが十分に期待できる。

なお、④で２つの辺が等しい三角形を多くかくことによって、２つの辺が等しい三角形は２つの角は等しいということを生徒は納得してしまうことが危惧されるが、②の矛盾と不確実性の発生と⑥の説明の追加の源の提供により、最初の推測と第２の推測との間の矛盾を解消するための説明を求めて証明という方法で納得しようとすると期待できる。

６．まとめと今後の課題

証明の意義を deVilliers は５つあげているが、数学教育においては Hanna は説明の機能に重点を置くべきであり、茅野は発見の機能に重点を置くべきであるとしている。

証明の意義を理解している生徒は、中学校

２年生で約１割、中学校３年生で約２割～３割である。一般的な指導のもとでは、立証よりも説明の機能に生徒は証明の意義を見出す傾向があり、Hanna の主張に合致する。梅川は、証明の意義の理解と基礎学力には相関関係はないため、証明の意義の理解の指導は意図的に行なわれるべきであるとしている。

証明の意義の理解の指導を行う時期については、榛葉らの述べるように図形領域の最初段階から行うことが重要である。指導の方法については、榛葉らの提案するような教科書の題材配列を変える方法もあるが、Hadas らや Balacheff が提案するような矛盾や不確実性を創り出す方法もある。矛盾や不確実性を創り出す方法であれば、教科書の題材配列を変えることなく、生徒に証明の意義の理解の指導を行えると期待できる。

Hadas らは６つの動的な幾何学環境における媒介的機能を利用して証明の意義の指導を行ったが、本稿での考察により、動的な幾何学環境が存在しない状況でも、その媒介的機能を参考にして課題系列を工夫するならば、生徒の中に矛盾や不確実性を創り出すことができ、証明の説明性の意義を指導できるという示唆が得られた。

本稿で提案した課題系列が生徒に矛盾や不確実性を創り出すのか、証明の意義の理解に有効であるのか、授業における生徒の反応を分析し、検証することが今後の課題である。

註および引用・参考文献

1) 筆者は過去に「課題１：ＡＢ＝ＡＤ、ＢＣ＝ＤＣであり∠Ｂ＝∠Ｄでない四角形をかけ。課題２：２つの辺が等しくて角度が等しくない三角形をかけ」という課題系列で授業を行ったことがあるが、どちらの課題に対しても多くの生徒が条件を満たす図形を熱心に探す様子が見られた。

Balacheff, N.（1997）. 数学的証明の学習の改善：実践を改善するための理論的枠組み. 数学教育学論究, *67&68*, 52-62.

de Villiers, M.（1990）. The role and funciton of proof in mathematics. *Pythagoras*, *24*, 17-24.

Hadas, N. , Hershkowitz, R. , and Schwarz, B. （2000）. The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics*, *44*, 127-150.

Hanna, G.（1996）. 学校教育における証明の役割（磯野正人訳）. 上越数学教育研究, *11*, 155-168.

梅川貢司. （2001）. 証明の意義理解に関する調査からの一考察. 上越数学教育研究, *16*, 115-126.

梅川貢司. （2002）. 数学教育における証明の意義指導に関する基礎的研究：Action Proof を選択肢に取り入れた証明の意義理解調査から. 上越数学教育研究, *17*, 67-78.

小関熙純, 榎戸章仁, 国宗進, 山下國広,中西知真紀.（1987）. 図形の論証指導. 明治図書.

佐伯胖, 藤田英典, 佐藤学.（編著）.（1995）. 学びへの誘い. 東京大学出版会.

榛葉伸吾, 羽田明夫, 園田博人, 国宗進. （2002）. 中学校での図形の学習指導の改善：生徒の探究活動を重視して. 静岡大学教育実践総合センター紀要, *8*, 49-66.

茅野公穂. （2003）. 学校数学における証明の機能としての「発見」に関する一考察. 筑波大学教育学研究集録, *27*, 73-82.

時松秀行. （1997）. 中学校数学における論証指導に関する研究：証明の必要性に焦点をあてて. 筑波数学教育研究修士論文, *16*, 103.

長谷川勝久, 三輪道正.（2004）. コンセプトマップと解析的思考を用いた図形の論証指導. 日本数学教育学会誌, *86*（3）, 2-12.