

数学学習における相互作用過程に関する研究

— Sfardの焦点分析を柱として —

沼野 友宏

上越教育大学大学院修士課程 2 年

1 はじめに

筆者が理想とする授業は、生徒同士の積極的な交流により知識を獲得することができる授業である。しかし、自身の授業を振り返ると、教師主導型に陥ることが多く、生徒同士の関わりが希薄であった。このような授業では、生徒の理解過程や固有のアイデアを知ることができない。何よりも、他者との対話を減少させることになり、佐藤(2004)が他者や自分自身との対話を通して新しいことに挑戦する営みと捉えた学びを阻害することになる。佐藤(2004)のこの指摘は、他者との関わり、つまり相互作用の重要性を示している。

文字式の授業においても生徒同士の関わりが乏しく、生徒主体となりにくかった。このことは、文字式を苦手とする生徒を生み出す一つの要因ともなった。数学における主要な思考方法でもある文字式を理解は、その後の数学学習の成否を握っていると言っても過言ではない。

学習は、一人で行う機会もあるが、しかし授業においては、一人では進展しなかった学習が、他者との相互作用で進展することもある。そこで、文字式を理解も他者との相互作用により促進できるのではないかと考えた。また、効果的に相互作用を生み出すためには、その様相を把握する必要がある。

本研究の目的は、数学学習における生徒同士の相互作用の解釈、考察を行い、学習の進展する様相を探究し、指導法を改善するため

の示唆を得ることである。

2 理論的背景

2.1 相互作用について

Blumer(1991)は「人間は、必然的に、自分自身の行為を形成するにあたってお互いの行為を考慮しなくてはならなくなる。人間はこのことを、他者に対してはどう行為すべきかを指示し、また、他者が行った指示を解釈するという二重の過程を通して行う。」と述べ、相互作用における指示と解釈の二重性を示すとともに、他者の存在の重要性を示した。

授業場面においては、例えば、生徒が作図の課題に取り組んでいるときに、生徒の活動の様子を考慮した教師の「等しい距離をとって。」という指示を、生徒は解釈して、教師の意図や自分がすべきこと、つまり、コンパスを用いて等しい距離をとるという自身の行為を決定することである。

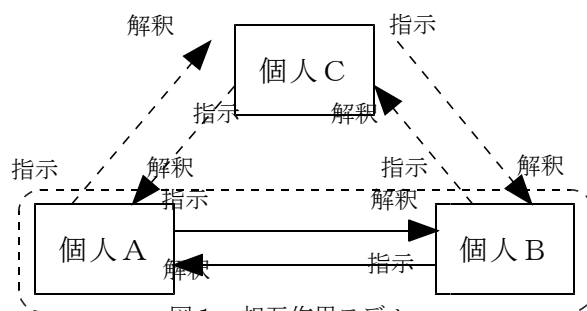


図1 相互作用モデル

江森(1993)はコミュニケーション・プロセスの分析において、連鎖的フィードバックと呼んだ3人以上のコミュニケーションの様相

を指摘した。このことから、相互作用においても図1のような3人以上の場合も想定することができる。

個人Aが個人Bに向けた指示(図1:A→B)を個人Bが解釈できず、第三者的な立場にいた個人Cが解釈(図1:A→C)して、個人Bへ指示(図1:C→B)し、それを個人Bが解釈して個人Aへ指示(図1:B→A)する可能性があるというサイクルを図1は表している。2人での相互作用は、図1の点線の枠内である。

2.2 Sfardの焦点分析について

Sfard(2000, 2001)はコミュニケーションプロセスの中で、数学の対象が生徒により構成される過程を扱い、対話者が経験したことを、対話者の発言の中に分析するための道具として、会話における3つの焦点を設定した。Sfard(2000)の捉える対象については、2.3で詳細に述べる。

3つの焦点の一つ目は、注目の対象を確認するために対話者により使われる言葉を指すもので、言明した焦点と呼び、二つ目は、何に対して、どのように注目している(見る、聞くなど)かということを指して、注目した焦点と呼んだ。そして、三つ目は、言明した焦点と注目した焦点から得られる対話者の解釈であり、意図した焦点と定義した。

例えば、円周角の定理の証明で、「中心と円周角の頂点を結んだ補助線を引く。」と生徒が発言したならば、言明した焦点は「補助線」であり、注目した焦点は「中心と円周角の頂点を直線で結ぶ。」である。この2つの焦点から得られる意図した焦点は「二等辺三角形の性質」である。

意図した焦点は、他の2つの焦点により引き起こされる経験の総体や問題になっていることの意見などを指している。言明した焦点は、発言の中で明示されるものなので、公的なものであり、意図した焦点は対話者の経験なので私的な性格なものである。注目した焦

点、それらに介在するものとしての位置づけとなる。

2.3 対象について

Blumer(1991)は、対象を、指摘し言及できるすべてのものと捉え、他者との相互作用を通して、形成され、維持され、弱められ、また、変容されていくとしている。

Sfard(2000)は、様々な任意の注目した焦点と意図した焦点の集合体を表すのに、対象という言葉を用いている。

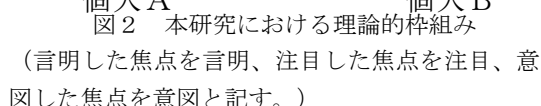
例えば、生徒が一次関数の傾きを尋ねられ「-5」と答えたとき、言明した焦点は「-5」である。この生徒がグラフを見ていたら、注目した焦点は「右下がりのグラフ」であり、意図した焦点は「傾き」である。この2つの焦点の集合体が、Sfard(2000)の言う対象であり、この生徒の学習している対象である。授業においては、個人が内面に持つ、あるいは他者との対話を通して得る課題解決のための数学的な見方や考え方、数学的な知識が対象と考える。本研究では、Sfard(2000)に準じ、対象という言葉を用いる。

Blumer(1991)が述べたように、対象は立場の違いにより異なって捉えられる。つまり、同じ課題解決を行っていて、言明した焦点が一致していても2人の生徒の対象が一致しているとは限らない。例えば、先述の例で、別の生徒が一次関数の傾きについて同じように「-5」と発言したとき、2人の生徒の言明した焦点は「-5」で一致している。しかし、この生徒が表を見て発言していたら、注目した焦点は「xとyの増加量」であり、意図した焦点は「変化の割合」である。その結果、2人の生徒の注目した焦点と意図した焦点はずれており、注目した焦点と意図した焦点の集合体である対象は、一致していない。

熊谷(1989)、金本(2001)は、授業の考察へ共有という視点を持ち込んでいる。熊谷(1989)は、相互作用を前提として授業を考察するとき、共有という概念を指摘した。そし

金本(2001)は、共有を他者の考えや意味を理解することとし、その正誤までは問題にしていない。本研究においては、金本(2001)の立場に立脚して、対象の正当性までは求めず、同一のものを対象にしていること、焦点あるいは対象が一致していることを焦点を共有する、対象を共有するということとする。

今まで述べてきたことから図2のような理論的枠組みを用いて生徒の発言を捉えることとする。



発言や公的なもの、私的なものというのは、例えば、碁石を正方形の周上に1辺につき6個並べたときの碁石の個数を求める課題で、ある生徒が「辺ごとに碁石を6個ずつに分ける。そうすると、固まりが4つできる。」と言ったとすると、これが発言であるとともに指示である。この発言の際の注目した焦点は「6個ずつに分ける。固まりが4つ。」である。この2つの注目した焦点は発言に現れているものなので、公的なものである。それに対して、発言に現れないが、「角の碁石が重なる。」という注目した焦点が解釈できる。これが、私的なものである。

図2において、実線矢印は、対話の相手へ向けた発言であることを示している。そして、縦方向の矢印は、それぞれの生徒の対象の移行を表している。しかし、これらの矢印は、相手へ影響を与える可能性や対象が移行する可能性があるということを示すものである。また、対象は、常に新たな対象へ移行するのではなく、課題解決に行き詰まったときなどには、元の対象へ戻ることもある。

4.1 教授実験の概要

2004 年 5 月の放課後、埼玉県 of 公立中学校の 3 年生 4 名を調査参加者に、グループ活動で、課題「図形数を求める」について 5 時間に渡り実施した。4 名の生徒を Ada, Iwa, Ida, Koni と呼ぶ。筆者は、調査参加者が 1 年生のときの数学の授業を担当しており、生徒とも気心が知れていた。また、筆者は、Ada, Iwa が 1 年生のときの担任でもあった。

課題「図形数を求める」は、中学生にとってはかなり難しいものである。課題解決には、数列的な見方や単位図形に着目した見方など多様な解決方法が想定でき、他者との関わりで課題解決を行うことが期待できる。

小学生を対象にした一般化に関する研究で、草野(1997)、木村(2001)、石田(2002)は、

小さい項数の場合の式を作ること、さらに石田(2002)は構造を示した図を与えることが有効であることを示した。また、藤井(1998)は、文字で表す前に擬変数を用いて数量の構造を表すこと、擬変数を計算しないでおくことが文字の理解を深めることを示した。

これらの示唆から、筆者は、基石の増加の仕方を意識して課題提示を行うとともに、詳細に計算式を書くことを生徒に求めた。そして、第1時では、事象から文字式の過程に数字の式を扱う段階を設定した。数字の式は、小さい項数とやや大きい項数を設け、小さい項数で式の構造を理解させ、その確認をやや大きい項数で行うことを想定した。

第1, 2時では、基石を正三角形に並べた場合を扱った。図3のように正三角形に基石を並べて、1辺の基石の個数が n 個の場合の基石の総数を求めた。最初に1辺の基石の個数が6個の場合で様々な考え方で解決することを求めた。その後、1辺の基石の個数が30個の場合、 n 個の場合を扱った。第3時では、基石を正方形に並べた場合を扱い、第4時では、基石を五角形に並べた場合を扱い、図4のような五角数の一般化の課題を提示した。

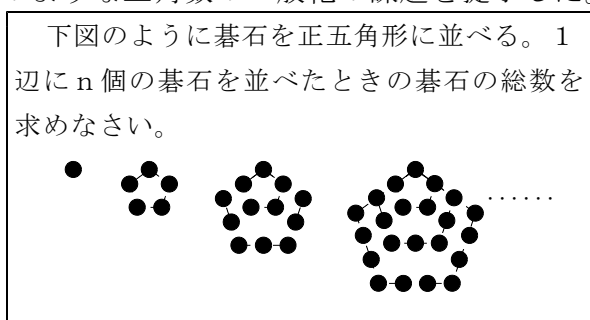
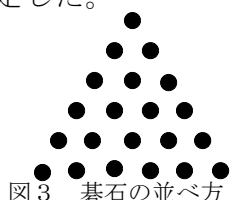


図4 五角数の一般化の課題

この課題では、基石の総数を基石の増加数の和、あるいは単位図形への3分割などで解決することが想定された。しかし、生徒は数列の和や分割による考え方を既成していない。そこで、第4時までには五角数の一般化の課題を解決するために必要なこれらの知識を

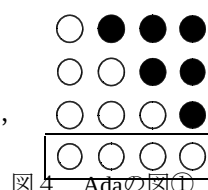
獲得できるように展開を構想した。第5時では、 x 角形で1辺の基石の個数が n 個の場合の基石の総数の一般化まで扱った。

活動の様子を2台のVTRとICレコーダーで記録し、それをもとに詳細なプロトコルを作成した。5時間の教授実験の中から第4時を中心に対象の移行があった場面を選び、相互作用を視点として解釈を行った。

4.2 各場面の解釈

4.2.1 場面I 白い基石を1段除く

第1時で、1辺6の三角数を求めるために、Adaが図4を示した場面である。ただし、Adaは1辺4の場合で考えていた。



- 10619 Ada 4×4から、これ(最下段の白い基石)の1個をひく。へへへへへ(図4を示して)
- 10620 T うん。4×4からこれ(図4の最下段の白い基石)1個をひく。
- 10621 Ida 何で?
- 10622 T しし16。
- 10623 Ada これ(図4の黒い基石)をこっち(図4の白い基石の上)に持ってくる。と、
- 10624 T うん。
- 10625 Ada 1個ひいたのになる。
- 10626 T 1個ひいた?
- 10627 Ada 1個ひいたものになるから。
- 10628 T 式で言うとうどうなる?
- 10629 Ada わかんない。えへへへへ。

Adaの発言10619「4×4から、これ(図4の最下段の白い基石)の1個をひく。」の注目した焦点は「四角形を作る。縦×横。最下段の白い基石。1段ひく。」、意図した焦点は「(白い基石の個数) = (黒い基石の個数)」と解釈した。しかし、Idaにはこの発言の意図した焦点が解釈できず、10621「何

で？」と発言した。この発言 10621 の注目した焦点は「1 段ひく。」であり、この Ida の疑問により Ada の発言 10619 では私的であった注目した焦点「黒い基石を白い基石上へ移動する。白い基石が 1 段多い。白い基石を 1 段ひく。」が、発言 10623「これ（図 4 の黒い基石）をこっち（図 4 の白い基石の上）に持ってくる。」と 10625「1 個ひいたのになる。」で公的なものとなった。この注目した焦点から、この場面以前に Koni が三角形に並べた基石の一部を移動させて、四角形に並び替えて三角数を求めた際の移動の考えの影響を Ada が受けていることがわかる。

Ada の注目した焦点「黒い基石を白い基石上へ移動する。白い基石が 1 段多い。白い基石を 1 段ひく。」は、課題解決へ向け適切なものであった。しかし、Ada が 10629「わかんない。」と発言していることから、発言 10619 での意図した焦点「(白い基石の個数) = (黒い基石の個数)」にそれ以上の変容はなかった。

その後、Ada は課題解決に向け「黒い基石を白い基石上へ移動する。白い基石が 1 段多い。白い基石を 1 段ひく。」という適切な注目した焦点を有していたので、教師は Ada の対象を探究することを考えた。そこで、以下のプロトコルの発言 10671 と 10674（実際には一続きの発言）「もうちょっと言って、黒い基石の部分と白い基石の部分の数を等しくしたかったらどうすりゃいいんかね。」で Ada の意図した焦点「(白い基石の個数) = (黒い基石の個数)」を明示した。

10671 T じゃあ、もうちょっと言って、黒い基石の部分

10672 Koni うん。

10673 Ada はい。

10674 T と白い基石の部分の数を等しくしたかったら、どうすりゃいいんかね。

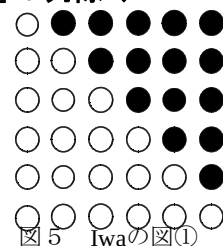
10675 Ada (黒い基石を) あと 1 段（図 4 の右端に）たす。4 をたす。

この教師の発言に対して、Ada は発言 10675 で「黒い基石を 1 列右端に加える。」という注目した焦点を明示し、対象が移行した。この対象は、教師が期待していた対象ではなかった。教師は Ada の発言 10619 の注目した焦点「白い基石を 1 段ひく。」から「白い基石と黒い基石の個数を等しくする。」という意図した焦点がつけられたと解釈していた。しかし、「1 段ひく。」という注目した焦点は、黒い基石を白い基石の上へ移動すると、1 段余ることから得られた焦点であった。つまり、「1 段ひく。」という注目した焦点は、移動の考えの結果、得られた焦点であり、Ada にとっては、白い基石と黒い基石の個数を等しくするという意図でなされたことではなかった。

この場面では、教師の発問により教師の予想しなかった対象へ生徒の対象が移行してしまった。そのような場合、その対象に教師は柔軟に対応する必要がある。

4.2.2 場面Ⅱ 白い基石を 1 列除く

第 2 時で、Iwa が図 5 を利用して 1 辺 6 の三角数の求め方を他者に説明している場面である。



20058 Iwa 白い左のあの○（図 5 の左端の白い基石）を全部抜きちゃうとか。

（中 略）

20066 Iwa 加えてだめなら、ひけみたいな。

（中 略）

20073 T ん？できるかな？

20074 Iwa できる？

20075 T それは、できるかもしれない。

20076 Iwa うそ？

（中 略）

- 20085 Iwa これ（黒い基石）をね。前ね、ここ（図5の右端1列）に加えたじゃん。今度はダメってことは、じゃあ、これ（図5の左端の白い基石1列）をとればと思って。
- 20086 Ida あああ。
- 20087 Ada これ（図5の左端の白い基石1列）をとったら・・・。
- 20088 Iwa これ（図6）になる。
- 20089 Koni 同じ大きさってこと？
- 20090 Iwa そう。これ（図6の白い基石が黒い基石）と同じ。図6 Iwaの図②
- 20091 Ida あ、そんで÷2でできるね。
- 20092 Iwa うん。÷2。
- 20093 Ada ああ。でも、そうしたら、この（図6の白い基石）面積、これ、この数（図6の白い基石の個数）になっちゃわない。これだけの。あ、だからそれ（図6の白い基石の個数）にたす6。
- 20094 Iwa たした。最後にたしたら。

Iwaの発言20058「白い左のあの○（図5の左端の白い基石）を全部抜きちゃうとか。」では、注目した焦点は「左端の白い基石。1列ひく。」であった。Iwaの「1列ひく。」という注目した焦点は、発言20066の「加えてだめならひけ」のような二者択一的な考えによるものであり、教師の20075の「できるかもしれない。」という発言に対する20076の「うそ？」というIwaの反応から見通しのあった考えではなかった。つまり、最初はIwaの考えの支えとなるものがなく、Iwaは既存の手続きへ注目していた。その後、Iwaの考えの支えになったのが、Iwaの考えの可能性を支持する教師の発言20073「できるかな？」や20075「それは、できるかもしれない。」

であった。そのために、Iwaは発言20085以降、他の生徒との対話を自信をもって行うことができた。

他の生徒との対話からIwaは発言20058「白い左のあの○（図5の左端の白い基石）を全部抜きちゃうとか。」の段階で適切な注目した焦点「白い基石を1列ひく。それを半分にする。ひいた1列分の基石を加える。」と意図した焦点「（白い基石の個数）＝（図6の基石の個数）÷2＋6」を有していたと解釈できる。つまり、Iwa自身は、かなり早い段階から対象を構成していた。

Iwaの3つの注目した焦点は他の生徒との対話で公的なものとなり、参加者全員に認識された。Koniは発言20089「同じ大きさ？」で、同じ大きさ、つまり白い基石と黒い基石の個数が等しくなることを対話の中で解釈した。また、Idaは発言20091「そんで÷2でできるね。」で、図6を半分にすることを対話の中で解釈した。Iwaの注目した焦点が他の生徒により徐々に公的になったことが、Iwaの注目した焦点の共有を容易にした。

AdaがIwaと対象を共有したことは発言20093「でも、そうしたら、この（図6の白い基石）面積、これ、この数（図6の白い基石の個数）になっちゃわない。これだけの。あ、だからそれ（図6の白い基石の個数）にたす6。」から解釈できる。AdaはIdaによって公的になった注目した焦点「図6を半分にする。」を自分なりに吟味し、さらにそこから別の注目した焦点「ひいた分の基石（6個）を加える。」を明示することにより公的なものとした。その後、Iwaは意図した焦点を式化しなければならなかったが、Iwa一人では行えなかった。しかし、注目した焦点を共有した他者と協同することにより白い基石の個数を式化することができた。

この場面は、対象の構成過程に全ての生徒が係わった場面であった。Iwaと他の生徒との対話を通して、Iwaの私的な注目した焦点

が公的なものとして共有され、式化まで可能となった。Iwa 一人では、式化まで至らなかったことを考えると、他の生徒と注目した焦点を共有できたことは、学習を進展させるひとつの要因となった。

4.2.3 場面Ⅲ 増加数の一般項を求める

第4時で、1辺 n の五角数を求める課題を教師が提示し、生徒が三角数や四角数のときと同様に課題解決のために基石の増加数の規則性に着目した場面である。

40181 Ada (図7で) 6, 6

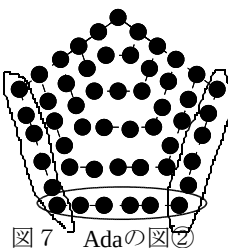
ー, $n - 2$ じゃない。これ (6

個の基石), これ

(6個の基石),

こう3個あって,

それでこれ(重なる基石)がない。



40182 T うん。

40183 Ada $18 - 2$ で 16。

40184 T それは, 6 の場合。じゃ, n の場合は?

40185 Ada n の場合は, $n - 2$ 。

40186 T $n - 2$?

40187 Ada はい。

40188 T $n - 2$?

40189 Ada えっ?

40190 Iwa $6 - 2$?

40191 Ada ううん。これ(基石の増加数)全部で 16 個あるじゃん。これ(図7の1辺の基石が6個の場合の基石の増加数)を求めるには, こう, えっと, 6 がこれ1辺が

40192 Iwa あっ, うん。

40193 Ada 6 個だとしたら, 6 が3本あって, ろくさん 18 で。

(中 略)

40200 Iwa この場合は, $6 - 2$?

40201 T うん。 n の場合は?

40202 Ada $n - 2$, じゃないんですか? $3n -$

2。

40203 T おお。 $3n - 2$ 。

40204 Iwa おお。

40205 Ada あ, あれ, $6 - 2$ じゃない。これ。えっと,

40206 T んん?

40207 Ada こ, これ(1辺の基石が6の場合)が $18 - 2$ で, n の場合は $3n - 2$ ですか? うふふふ。

40208 T ですか?

40209 Iwa うん。凄い。

Ada の発言 40181 「(図7で) 6, 6ー, $n - 2$ じゃない。これ(6個の基石), これ(6個の基石), こう3個あって, それでこれ(重なる基石)がない。」では, 言明した焦点「 $n - 2$ 」, 注目した焦点「1辺の基石の個数。辺数が3。2カ所で重なる。」である。注目した焦点は, 課題解決に向かう適切なものであった。これらの注目した焦点からつくられるべき意図した焦点は「 $3n - 2$ 」であったが, Ada は意図した焦点「 $n - 2$ 」をつくった。つくられるべき意図した焦点と Ada がつくった意図した焦点がずれていた。それに気づいているのが教師であり, 疑問視しているのが Iwa であった。

教師は, 40186 や 40188 の2度に渡り「 $n - 2$?」と疑問形で Ada に尋ねている。Iwa は発言 40190 で, Ada の言明した焦点「 $n - 2$ 」に注目して, 1辺の基石の個数を6として, n に代入して疑問を呈している。Iwa の発言は, 図7や数に寄り添ったものであった。しかし, これらの発言に対しては, Ada は逡巡無しに発言 40191 と 40193 (実際には一続き) で「これ(基石の増加数)全部で 16 個あるじゃん。これ(図7の1辺の基石が6個の場合の基石の増加数)を求めるには, こう, えっと, 6 がこれ1辺が6個だとしたら, 6 が3本あって, ろくさん 18 で。」と発言 40181 と同様の説明を繰り返した。つまり,

教師や Iwa の発言の影響を受けず、基石の増加数の一般項、つまり意図した焦点に対する認識に変化はなく、焦点の変容もなかった。

Ada は発言 40205「あ、あれ、 $6 - 2$ じゃない。これ。」で数から自らの意図した焦点の正誤を吟味していた。このことから基石の増加数に関する Ada の認識に変化を及ぼし、対象の修正を促したのは、教師の発言と相まって再度にわたる Iwa の発言 40200「 $6 - 2$ ？」の影響が大きかった。Iwa の発言が、Ada の意図した焦点のずれを指摘し、Ada の対象の再構成を促した。そして、Ada は発言 40202で、「 $3n - 2$ 」という意図した焦点をつくった。

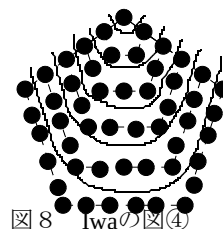
Ada が意図した焦点を修正したのは、Iwa の指摘による部分も大きい。教師の「 $n - 2$ 」や Iwa の「 $6 - 2$ 」を解釈するための適切な注目した焦点を Ada が有していたことも大きな要因であった。Ada の 40202 の発言では「 $n - 2$ 、じゃないんですか？」と半信半疑で聞いていることから、同じ 40202で「 $3n - 2$ 」と発言しているが、まだ裏付けとなる明確な根拠はなかった。Ada の「 $3n - 2$ 」であるという裏付けとなったのは、Ada の発言 40205「 $6 - 2$ じゃない。」や 40207「これ（1 辺の基石が 6 の場合）が $18 - 2$ で見られるような数による検討であった。

発言 40209 で「凄い。」と Ada の基石の増加数の一般項について感銘していることから、Iwa は対話の中で「 $6 - 2$ ？」と疑問を呈していたが、そのときから基石の増加数の一般項を理解していたわけではないことがわかる。基石の増加数の一般項は、Iwa の発言 40209 で共有された。

この場面では、Iwa の図や数に立脚した考えが、Ada の意図した焦点のずれの修正を促すとともに、Ada の文字を用いた考えが、Iwa の考えを数による理解から文字による理解へと進展させることになった。

4.2.4 場面Ⅳ 増加数の一般項の共有

第 4 時の五角数を基石の増加数の和で求める場面で、Ada は前時までに学んだ数列の和を求める式に文字を代入して、形式的な操作で求めているが、解決に行き詰まった。それに対して、Iwa は図 8 を示して、基石の増加数の差に着目し、 $(1 + 4 + 7 + 10 + 13)$ という数の和から考えていた。



40252 T どうやってだす？

40253 Ada あ、前回の（第 3 時の数列の和）ぽく、あはははは。

（中 略）

40259 Ada これが、 $2n -$ 。あつ、じゃない。 $3n$ 、 $3n - 2 + 1 \times n$ 。あれ？違う。これじゃない。 $3n - 2$ 。

40260 Iwa これも 3 ずつ増えてる。

40261 Ada おお、おお。それ $(1 + 4 + 7 + 10 + 13)$ いいね。

40262 Iwa 3 ずつ増えていて、1、4、これを

40263 Ada うちもそうやって（図 8）分けよう。

40264 Iwa 何か、足す、足す。足すのかな？えー、前、前ってどうやったっけ？

40265 Ada こうなんか、こうやって（外側同士）くっつけてって、

40266 Iwa そんで、最、ここ最、これが

40267 Ada 最後が

40268 Ada・Iwa $3n - 2$ だ。

40269 Ada 最初が 1 になって、最後が $3n - 2$ 。

Ada の発言 40259「これが、 $2n -$ 。あつ、じゃない。 $3n$ 、 $3n - 2 + 1 \times n$ 。あれ？違う。これじゃない。 $3n - 2$ 。」では、注目した焦点は、前時に学んだ四角数を求める式「 $(2n - 1 + 1) \times (n \div 2)$ 。末項 $3n - 2$ 」、

意図した焦点は「1 から $(3n - 2)$ までの和」と解釈した。しかし、発言の様子から解釈すると、形式的に四角数を求めた式に五角数の場合を当てはめているだけで、「違う。これじゃない。」と言っていることから Ada は課題解決に行き詰まっていた。それに対して、発言に現れていないが、Ada の発言 40261「それ $(1 + 4 + 7 + 10 + 13)$ いいね。」や 40263「うちもそうやって (図 8) 分けよう。」から解釈すると、Iwa の発言 40260「これも 3 ずつ増えてる。」では、言明した焦点は「3 ずつ増えている」、注目した焦点は「図 8。 $1+4+7+10+13$ 。基石の増加の規則性。」、意図した焦点は「(五角数) = (1 から何かの数までの和)」と解釈した。

Ada は文字により課題解決を進め、Iwa は具体物 (図や数) に立脚して課題解決を進めていた。解決に行き詰まっていた Ada は、発言 40261 や 40263 にあるように Iwa の注目した焦点「図 8。 $1+4+7+10+13$ 。」を自らの注目した焦点に加え、対象を移行させた。つまり、Ada と Iwa は、注目した焦点と意図した焦点のかなりの部分を共有した。

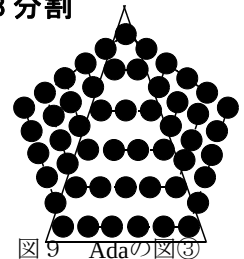
その結果、Iwa は発言 40264「何か、足す、足すのかな？」で新たな注目した焦点「数列の和の計算の仕方」を明示した。それに応答する形で、すぐに Ada が発言 40265 で「数列の外側同士を加える」という注目した焦点を明示した。そして、2 人の注目した焦点が「末項」まで及び、発言 40268「 $3n - 2$ だ。」で末項 $3n - 2$ が共有された。

これらのことから Ada は場面Ⅲや発言 40259 で $3n - 2$ について言及しているが、それらの時点では、数列の末項という認識はなく、基石の増加数の一般項という認識であった。発言 40268 で、Iwa の意図した焦点「1 から何かの数までの和。」の「何かの数」が、「 $3n - 2$ 」となり、意図した焦点「(五角数) = (1 から $(3n - 2)$ までの和)」がつくられるとともに、より明確な対象が共有された。

この場面では、お互いの異なった解決手段の交流が、学習の進展に寄与し、文字式の理解を深化させた。また、焦点や対象を共有することで、生徒は新たな焦点や対象を創り出し、さらにそれを共有することにより課題解決へ徐々に向かっていった。

4.2.5 場面Ⅴ 五角数の 3 分割

第 4 時の 1 辺 n の五角数を求める課題で、Ada が単位図形の考えに着目し、図 9 のように五角数を三角数に分割した。そして、三角数の一般式を 3 倍して求めることに言及した後の場面である。



40954 Ada これは、1, 2, 3。あつ、同じ数だ。あつ、違う同じ数じゃない。1 個こっち (図 9 の左の三角形) の段が少ないです。先生。

40955 T うん。

40956 Ada だから、2 分の

40957 Iwa 6 玉、つくなあ。

40958 Ada $n + 2$ 分の $n^2 + 2n + 1$ かつこ、
一だ。 -2×2 。へへへへへ。
($(n^2+n)/2 + ((n^2+n)/2 - 2) \times 2$ と記す。)

40959 Iwa ほへお。

40960 T 計算してみて。計算して、これ $((3n^2 - n)/2)$ になればいいんだよね。これか。

40961 Iwa 計算は、まずは式は？

40962 Ada えっとね。この (図 9 の左右の) 三角は、

40963 Iwa うん。

40964 Ada こいつ (図 9 の中央の三角形) より 1 個少ないじゃん。この玉が。ちょっと、
(中 略)

40969 Iwa この (図 9 の左右の三角形) 玉の数？

40970 Ada そう。この (図 9 の左右の三角形)

玉の

40971 Iwa 6個少なかったよ。

40972 Ada これ(図9の左右の三角形)？

40973 Iwa うん。

40974 Ada あっ、ほんとに？あっ、ほんとだあ、6個少ない。あ、そう。あ、じゃあ、6個少ないから、だから6個少ないから、 6×2 だ。 -6×2 。

(中 略)

40978 Ada あっ、そうだね。6個少ないんだね。てことは、 n だよ。

40979 Iwa $\dots$, $21 - ?$ うん、6個少ない。

40980 Ada うん。これが、 n だから、ひく n だ。 $\times 2$ えっとね。

40981 Iwa これ(図9の中央の三角形の底辺の基石)が、 n なの？

40982 Ada n 個少ないじゃん。こいつ(図9の左側の三角形)は。

40983 Iwa うん。

40984 Ada それが2個あって、 $\times 2$ で、

40985 Iwa $\times 2$ 。

40986 Ada 足す本物(図9の中央の三角形)みたいな。

40987 Iwa 凄い。これ(図9の3つの三角形)を足しちゃえば、ここ(五角数)がでてくる。全部の。

Ada は最初、三角数を3倍にすることにより五角数を求めることができると考えていた。しかし、発言 40954「これは、1, 2, 3。あっ、同じ数だ。あっ、違う同じ数じゃない。1個こっち(図9の左の三角形)の段が少ないです。」から解釈できるように Ada は図9の中央の三角数と左右の三角数の差に気づいた。このときの注目した焦点は「図9の中央の三角数。図9の左右の三角数。段数の差(1段)。」、意図した焦点は「(五角数) = (三角数) + (三角数 - 1段分の基石) $\times 2$ 」と解釈した。Ada は主として教師との対

話で考えを進展させていた。一方、Iwa は発言 40957「6玉、つくなあ。」で、誰に言うともなしに図9の中央の三角数と左右の三角数の差に言及していた。この発言での注目した焦点は「図9の中央の三角数。図9の左右の三角数。個数の差。」と解釈した。2人の注目した焦点は、基石の差の捉え方を除いて共有されていた。

2人の注目した焦点から2人とも図9に依拠して考えを進めていた。ただし、Iwa は発言 40987で「凄い。これ(図9の3つの三角形)を足しちゃえば、ここ(五角数)がでてくる。」と Ada の考えに感嘆していることから Ada のように明確な意図した焦点をつくっていなかった。

Ada の発言 40954では、注目した焦点も意図した焦点も適切であった。しかし、Ada の発言 40958で示された計算式や発言 40964「こいつ(図9の中央の三角形)より1個少ないじゃん。この玉が。」での Iwa に対する説明では、注目した焦点が「図9の中央の三角数。図9の左右の三角数。個数の差(1個)。」に変容した。基石の差の捉え方で、Ada の注目した焦点に段数と個数というずれが生じた。Ada は発言 40954では段と表現し、発言 40964では個と表現していることから、段数から個数への捉え直し、つまり縦から横への見方の捉え直しができなかった。

この Ada に生じた注目した焦点のずれが議論の起点となった。このずれを指摘したのは Iwa であった。Iwa と Ada は、注目した焦点をほぼ共有しており、異なっていたのは基石の差の捉え方であった。そして、具体的に図9が存在していたために、Iwa は視覚的に基石の個数の差を捉えることが可能であった。これらのことが、Iwa の注目した焦点の正当性を保証することになった。そのために、Ada の注目した焦点のずれを Iwa は明確に指摘することができ、Ada は発言 40978で基石の差を段数から個数で捉え直し、速やかに注

目した焦点を変容させた。

Ada の発言 40980「これが、 n だから、ひく n だ。× 2 えっとね。」では注目した焦点は「1 辺 6 の三角数の個数の差 6。1 辺 n の三角数の個数の差 n 。1 辺 n の三角数が 1 個。基石の個数が n 個少ない三角数が 2 個。」、意図した焦点は「(五角数) = (三角数) + (三角数 - n) × 2」に変容した。Iwa によりずれを指摘された後、Ada は図や数から文字へ学習を進展させた。それに対して、Iwa は発言 40979「21 - ? うん、6 個少ない。」に見られるように注目した焦点は図や数に立脚したままで、学習は立ち止まっていた。

この Ada の発言 40980 をきっかけに Iwa の学習も Ada により徐々にではあるが進展し始めた。その進展は、Ada が発言 40982, 40984, 40986 で Iwa の理解を確認しながら自身の私的な注目した焦点「 n 個少ない。」、「2 倍する。」、「中央の三角数を加える。」を順々に公的なものにすることに強く影響された。このことにより、Iwa は発言 40987「凄い。これ (図 9 の 3 つの三角形) を足しちゃえば、ここ (五角数) がでてくる。全部の。」で Ada の意図した焦点を理解し、対象を共有することができた。

この場面では、注目した焦点の共有がずれを指摘することに貢献していた。また、Iwa の学習を具体物 (図や数) から文字へ進展させるために、私的な注目した焦点を徐々に公的にしていくことが有効であった。

4.3 考察

場面 I と II では、1 辺 6 の四角数を求めるために、1 列をひくという同様な方法で解決しようとしていた。しかし、場面 I では教師の発問により他の対象へ移行してしまい、その方法では、解決されなかった。それに対して、場面 II では解決することができた。この 2 つの場面の大きな違いは、最初に対象を構成した生徒と他の生徒との関わりであった。

場面 I では、他の生徒との関わりがなく、

Ada の対象を他の生徒が共有することがなかった。場面 II では、他の生徒が Iwa に対して注目した焦点を尋ねることにより徐々に Iwa の対象を共有していった。Iwa は一人では、式化まで至ることはできなかった。しかし、注目した焦点を共有することにより、Iwa が進展させることができなかった課題解決の過程を他の生徒との協同により進展させることができた。つまり、このことは他者と注目した焦点を共有することにより、学習が進展することがあるということを示唆している。

Lampert (1990) が示したように授業においては教師以外にも権威者となる生徒が存在する。Ada という生徒がまさにそのような生徒であった。権威者となる生徒達ばかりが貢献する授業を、筆者は理想としてはいない。権威者となる生徒以外の生徒が、存在感を示すような授業が理想である。場面 III や V が権威者以外の生徒が存在感を示した場面であった。このような場面が増すことが、授業を豊かにする可能性を秘めている

場面 III と V で Iwa が焦点のずれを指摘し、Ada に対象の再構成を促したのは、2 人の注目した焦点が限りなく共有されていたこと、そして図や数という具体物に立脚していたことにより Iwa にとっては Ada の焦点を解釈しやすかったためである。確かに、課題解決を牽引していたのは、Ada であったが、Iwa の発言は Ada の学習過程を振り返り、整理する役割を果たしていた。つまり、2 人の関係は課題解決のためにお互いの考えを補完する上で重要であった。

場面 IV で見られたように、文字式を用いた解決過程では、文字での解決に行き詰まった Ada の学習を図や数で解決していた Iwa の解決手段が進展させた。一方、Ada の文字による解決が、図や数だけで解決する Iwa を文字の世界へ導き、文字式の理解を深化させた。また、焦点や対象を共有することにより、生徒が新たな焦点や対象を創り出し、それを共

有するために相互作用し、課題解決へと向かった。

以上のことから明らかになったことは、次の3点である。

- ①他者と関わり、焦点を共有することにより新たな焦点や対象を創り出し、それを共有するために相互作用を行い、学習が進展する可能性がある。
- ②注目した焦点が共有された状態に近づくことにより、他者の焦点のずれを指摘することができ、相互作用が豊かになる可能性がある。
- ③文字式に表す際に文字で考えることと小さい項数や具体物を関連づけて考えることを行き来することは、文字式の理解を深める。

5 おわりに

考察により明らかになったことから次のことが示唆された。

課題解決で異なった手段を有する生徒が発言し合い、焦点のずれを修正することにより、豊かな相互作用を生み出し、学習を進展させることができる。

金本(1998)や Fonzi(1998)は、グループ学習を生徒同士の関わりを生み出す有効な方法としている。教授実験でも、グループ活動により生徒同士の相互作用が生み出され、順調に課題解決が進展した。しかし、授業で教師が特定のグループのみに係わることは難しく、授業を想定して、グループ活動のさせ方を考えていかなければならない。

【引用・参考文献】

- Blumer, H. (1991). シンボリック相互作用論 (後藤将之訳). 勁草書房.
- 江森英世.(1993). 数学の学習場面におけるコミュニケーション・プロセスの分析. 数学教育学論究, 59, 3-23.
- Fonzi, J. (1998). Communication in a secondary mathematics classroom: Some images.
- Steinbring, H. & Maria, G. & Bussi, B. & Sierpiska, A. (eds.). *Language and communication in the mathematics classroom* (pp.317-339). NCTM year book.
- 藤井斉亮.(1998). 「文字の式」の理解に関する一考察: 擬変数について. 第31回数学教育論文発表会論文集, 123-128.
- 石田淳一.(2002). 小学生の「一般化」問題の解決における困難性. 日本数学教育学会誌, 84, (6), 23-31.
- 金本良通.(1998). コミュニケーション能力の育成. 明治図書.
- 金本良通.(2001). ある算数科の授業における意味とシンボルとコミュニティの相互的構成. 数学教育学論究, 77, 3-20.
- 木村理奈子.(2001). 一般化問題の解決における「簡単な場合で考える」方略使用の困難性に関する調査研究. 日本数学教育学会誌, 83, (4), 2-9.
- 熊谷光一.(1989). 算数・数学の授業における共有プロセスに関する研究. 数学教育学論究, 51, 3-23.
- 草野収.(1997). 算数における式を読む活動についての一考察. 上越数学教育研究, 12, 81-92.
- Lampert, M. (1990). 真正の学びを創造する: 数学をわかること数学を教えること. 佐伯胖他, 学びへの誘い (pp.189-234). 東京大学出版会.
- 佐藤学.(2004). 習熟度別学習の何が問題か. 岩波ブックレット.
- Sfard, A. (2000). Steering (dis)course between metaphors and rigor: Using focal analysis to investigate an emergence of mathematical objects. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31, (3), 296-327.
- Sfard, A. (2001). There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational Studies in mathematics*, 46, 13-57.