子どもの学習過程と数学的価値のかかわりについての研究

大　関　　聡
上越教育大学大学院修士課程２年

1.研究の動機と目的

算数においては、個の学習の定着を図るために、ティームティーチング（以下、T.T と略）や小集団学習が、有効な指導法として多く取り入れられている。しかし、文部科学省（2004）の調査によると、習熟度別指導実施上の課題として、教員の約 73 %が、児童生徒の実態に応じた教材等の開発と指導方法の工夫、改善を挙げている。つまり、T.T や小集団学習だけでは、個々の学習者に十分対応できていないのである。このことは、T.T や小集団学習と個々の学習者に応じた指導というものが、同一ではないことを示している。

学習者の理解は、個々の学習者の持っている知識（既有知識）と対象がつながることで生じる（武田, 1998；守屋, 2000)。つまり、個々の学習者の既有知識と学習内容とのつながりが、学習で最も重要となるのである。そして、既有知識と学習内容とのつながりについては、学習者の数学を学習する意味、あるいは、数学の学習そのものに対する考えが深く関わっていることが明らかにされている(横井, 1994)。

しかし、実際の学習場面において、学習に対する子どもの考えと学習過程が、どのようにかかわっているのかという研究は少ない。そこで本研究では、算数において何が大切かということを学習者の数学的価値と呼び、学習過程と数学的価値の関連について具体的な事例の分析を通して、検討することとする。そうすることで、更に子どもの内面に迫ることが可能となり、個々の子どもに応じた学習への示唆を得られるものと期待される。

2.学習過程と問題意識のかかわり

佐伯(2003)は、子どもの学びは、教師からの働きかけの結果として、子どもの中に「知識」が形作られるものではなく、学習者からの内なる問いかけの活動によって「学び」が先導されることを指摘している。そして、以下のように述べている。

> 「知識」というものは、こちらが一方的に「与え」たり「伝え」たりできる代物ではない。子どもは常に自らの内なる問いかけにもとづいて、外界の知識を彼なりに関心のあることに対する「答え」として受け止め、また、自ら新しい様相につくりかえて、自分で一番扱い易く利用し易い形態に変形してしまうものなのである。(pp. 116-117：傍点は原文通り)

佐伯(2003)の指す、自ら新しい様相につくりかえて、自分で一番扱い易く、利用し易い形態に変形するというとらえは､「個人化」「展開的やりとり」で、学習者の理解の様相をとらえている守屋（2000)と同じ立場である。

つまり、学習者は、学習者自身が必要だと思う情報を外界から取り入れ、自分の持っている知識とつなげて理解をする。そして、学習者自身が、外界の情報を必要と判断するには、「学習者からの内なる問いかけ」(佐伯, 2003)が不可欠となるのである。佐伯(2003)

の述べる「内なる問いかけ」は、学習者自身の問題意識ととらえることができる。

大関(2004)は、学習者の問題意識から始まる情報の取捨選択に着目し、学習者の問題意識から文脈が生じ、その文脈によって、情報の取捨選択が行われていることを明らかにした。そして、問題意識から起こる文脈の変化は、その子の学習過程そのものに影響を与えると指摘している。

以上のことから、学習者が情報を取り入れ、自分の知識とする学習過程には、学習者の問題意識が深く関わっていると考えられる。

3.問題意識と数学的価値のかかわり

日野(1993)は、小学校４年生の小数の乗法の学習において、ほとんどの子どもが、累加モデルをもっていることを指摘している。そして、累加モデルに依存できない状況に直面した時、学習者は、整数の四則演算に置き換える（整数化）など、学習者なりに一貫性を保ちながら問題にアプローチしていくことを明らかにした。このように、学習者が自分なりに一貫性を保とうとする背景には、問題解決に用いる方法を学習者自身が知っていること、そして、その方法に学習者が信頼をおいていることを日野(1993)は挙げている。学習者が信頼をおいているということは、学習者の問題解決の拠となる部分であり、算数において何が大切かという学習者の数学的価値と深くかかわる部分でもある。日野(1993)の研究で、一貫性を保ち続ける様相が見られたことから、４年生という年齢の低い学習者でも、何らかの数学的価値をもち、その数学的価値から外れることなく課題にアプローチする力を持っていることがわかる。また、宮崎(1989)の研究からも、学習者が一般性という数学的価値をもっていた場合、学習者は、自分の数学的価値に沿って目的を達成させようとすることが分かった。つまり、算数の学習において、学習者が数学的価値をもつことは、学習過程の成立のために重要な役割をもっているといえる。

問題意識と数学的価値のかかわりについて考えた時、学習者の信頼する解決方法(日野, 1993)、学習者が一般性を示すための活動(宮崎, 1989)の背景には、学習者の算数・数学の学習において何が大切かという数学的価値があり、その数学的価値に沿って問題意識や行為が生じると考えることができる。以下に示す分析・考察についても、学習者の問題意識は学習者自身の数学的価値に支えられているという立場で、筆者は議論していきたい。

以上のことを踏まえ、まとめると以下のことがいえる。

新たな情報が、学習者の既有知識に取り入れられるのは、学習者の問題意識にとって、その必要性があるからである。このように目的を達成させようとする学習者の問題意識の背景には、算数において何が大切かという数学的価値がある。

そこで、次節では、実際の学習の場面を観察し、数学的価値と学習過程とのかかわりを検討し、学習者の数学的価値が、学習過程をどのように支え続けていくのかを調べる。なお、個々の学習者によって、もっている数学的価値は異なると考えられるので、一人の児童の学習過程を一単元にわたって追うことを試みた。

4.子どもの学習過程と数学的価値のかかわりに関する調査

4.1　調査の概要

取り上げる授業は、新潟県内の公立小学校において行われた小学校５年生の算数「小数のかけ算」の一単元の授業である。調査は、平成 16 年５月に行った。異なる数学的価値をもっている学習者の学習の違いを明らかにするために、２クラスの児童、瞳と浩介（仮名。以下、登場する児童名は仮名）を観察した。観察は、VTR を２台使用し、１台は、

児童の学習の様子やノートの記述を中心に撮影した。もう一台は、黒板を中心に撮影し、その児童が何を見て、学習を進めているかを撮影した。各授業後には、必要に応じて、対象者にインタビューを行った。また、教師に関しても同様にインタビューを行った。

4.2　観察児童の特徴

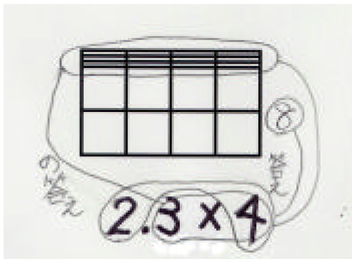
本調査にあたる前の平成 16 年１月に、４年生の「伴って変わる量」の単元を４時間ほど観察した。

調査対象となった瞳は、教師の指示に従い、学習を進める様子が見られた。具体物の操作では、自分の考えを生かす姿も見られた。自分の考えに固執せず、周りの児童の意見を取り入れる姿も見られた。日野(1993)の述べる一貫性を保ちながら問題にアプローチする姿が見られ、瞳の学習の観察を通して、数学的価値と学習過程のかかわりを明らかにできると期待でき、今回の調査で観察の対象とした。浩介については、浩介の数学的価値に支えられた学習と瞳の学習と適宜参照し、比較するためのものとした。そこで、以下の分析でも、瞳の学習を中心に考察をしていく。

本単元の学習に関わり、瞳は既に、筆算のやり方を知っていたと言える。１時間目のはじめに、教師からの課題提示（１mの重さが 2.3g の針金があります。この針金４mの重さは何ｇでしょう。）に対し、瞳は、即座に 2.3 ×４と式をたて、「23 ×４で解ける。」と発言していること、また、筆算を学習する前の授業中盤で、プリントに 2.3 ×４の筆算を書き、9.2 と答えを導き出している様子から、瞳は既に、2.3 ×４の筆算のやり方と 23 ×４の 1/10 の関係について知っていたと言える。

4.3　観察授業の概要（１時間目から８時間目の様子）

本調査は、小学校５年生「小数のかけ算」の全 13 時間の調査である。その中で、瞳の学習過程と数学的価値のかかわりがよく見られた場面として挙げられるのが、１時間目(整数×小数）から８時間目（１より小さい小数をかける計算）である。本研究でもその部分を中心に分析・考察することとした。

１時間目	瞳は、本時の課題（2.3 ×４）の答えを筆算によって求め、9.2 であることを知った。そして、計算から導き出した解だけをもって、答えとするのではなく、テープ図や面積図からも答えを導こうとする姿が見られた。瞳は、テープ図をどのようにして扱ったらよいのか迷っている様子だった。面積図に関しては、図 1 のように、マス目と式をつなぎ、答えを求めた。  （図 1）
２時間目	前時に引き続き、小数×整数の問題をした。筆算の仕方について知っている瞳は、困難さを感じる様子もなく、学習に取り組んだ。授業後の感想を聞いても、瞳は楽しかったと答えていた。
３時間目	「１m 80 円のリボンがあります。このリボン 2.4 mの代金は何円でしょうか。」という課題（整数×小数）が提示された。瞳は、2.4 mの代金は、２m（160 円）と３m（240 円）の中間と考え、200 円とした。教師のテープ図を用いた説明等を通して、瞳は、2.4 mの代金が 200 円でないことを知った。しかし、その後、教師や友達とのかかわりによって、代金をもとめられたものの、瞳は、0.1m が８円ということについて、納得していなかった。授業終了後、2.5m が 200 円だから 2.4m は、200 円から 0.1m 分の８円を引いた代金という考え方で代金を求めることができるようになった。

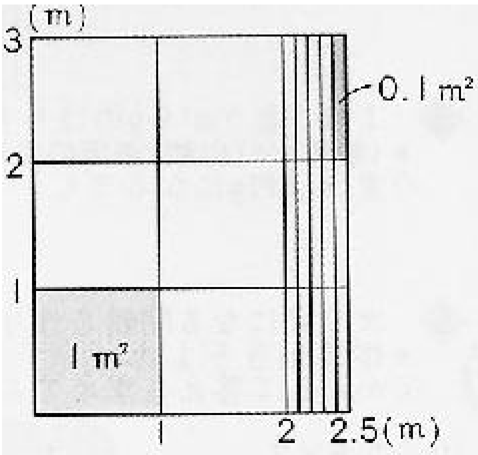
4時間目

本時は、前時の学習にかかわり、0.1m が 24 個という考え方について触れた。

瞳は、前時に学習したことやテープ図をを参考にすることで、0.1ｍ８円が 24 個あるという考え方を容易に受け入れることができた。本時終了後のインタビューでは、前時の自分の考え方（200 円から 0.1m 分の代金を引くという考え方）が分かりやすいとはしているが、本時で取り上げられた考え方を受け入れていないわけではなかった。

5時間目

前半は、提示された図 2 の面積図をもとに、「３× 2.5」のかけ算について考えた。瞳は、筆算によって、解を 7.5 としている。学習の流れ自体も、考え方を説明することを求めてはいなかっ



（図 2）

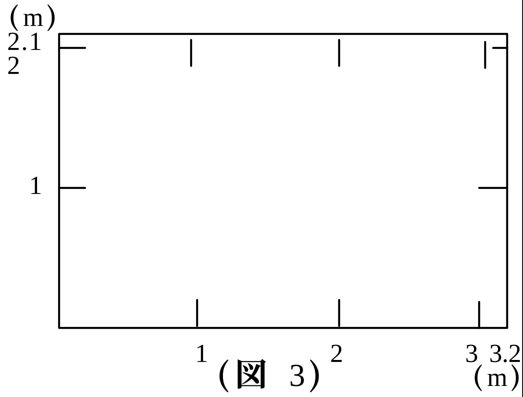
たことも関係があるが、この活動の中で、１時間目に見られたマス目を数える様子は見られなかった。

授業後半の練習問題の時間では、テープ図を用いた問題に対して、「難しい。」とつぶやいている。授業後のインタビューで、瞳は、考え方を説明することに対して、自分自身が苦手なことを分かっている上で、面積図やテープ図を用いて説明することも、算数の学習では大切であることを述べている。

6時間目

小数×小数（2.1 × 3.2）についての学習である。瞳の担任は、本時の学習内容が子どもたちにとって、難しく内容であると考え、本時の学習を T.T で行うことにした。

瞳ははじめ、面積図（図 3）に線を引くなど、面積図に直接働きかけようとする様子は見られなかった。その一方で、『2.1 ×３＝ 6.3 ×２＝ 12.6』と書くなど、様々な計算を考え、はじめに筆算で導き出した「67.2」となる答えに近づけようとする姿が見られた。最終的には、友達の考えを参考に、『１㎡が２×３＝６㎡、0.1 ㎡が 0.1 ×７＝ 0.7 ㎡、0.01 ㎡が 0.01 ×２＝ 0.02 ㎡、合わせて 6.72 ㎡』とし、はじめに導き出した答えの間違いにも気付いた。



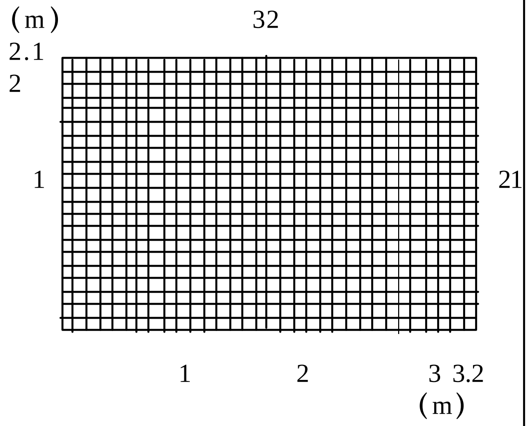
（図 3）

授業終了後、瞳は、0.01 ㎡で区切られた面積図をもとに、0.1 ㎡と 0.01 ㎡の関係について教師の説明を聞いた。。このことを通して、瞳は、本時の学習課題でもある 2.1 × 3.2 の計算について、理解を深めることができた。

7時間目

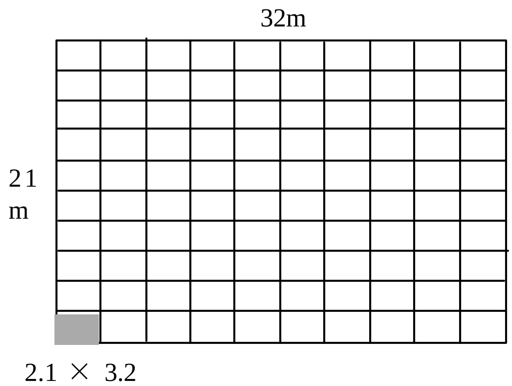
本時は、前時の学習にかかわり、図 4、図 5 の考え方について説明を聞いた。しかし、瞳にとって、図 5 のような、マスの 10 倍や 1/10 といった考え方は、イメージが持てず理解に苦しむ様子が見られた。一方、瞳は、図 6 のような「10 倍←→ 1/10」といった考え方は、容易に受け入れることができた。授業

後半の練習問題を解く場面では、この考え方を活用している姿が見られた。



（図 4）

0.1 のマスが縦 21 個、横 32 個並んでいる考え方



（図 5）

縦 2.1 m、横 3.2 mのマスが縦 10 個、横 10 個並んでいる考え方

$$
\begin{array}{ccccccc}
2.1 & \times & 3.2 & = & 6.72 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \uparrow \\
10\text{倍} & & 10\text{倍} & & 100\text{倍} & 1/100 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \uparrow \\
21 & \times & 32 & = & 672
\end{array}
$$

（図 6）

8時間目　ここでは、かける数が１以下になると、その積が、もとのかけられる数よりも小さくなるということの理解をねらいとする学習であった。本時の瞳は、<u>板書されたテープ図を参考にし、かける数とかけられる数の関係に着目し、その関係をつかむことができた。</u>

5.学習者の学習過程と数学的価値のかかわり

5.1　瞳のもっている数学的価値

以下に示すのは、２時間目の学習終了時に行った瞳へのインタビューである。２時間目の学習は、計算問題を中心とした活動であった。瞳は、「スペシャル問題は楽しかったです。」と、本時の感想を振り返りカードに書いた。振り返りカードの中で出てきた「スペシャル」とは、教科書以外の教師から出された問題のことである。

（瞳へのインタビュー）

筆者：昨日（１時間目）ちょっと不安そうだったけど、（昨日の振り返りカードには、）「がんばりました。」って書いてたけど、今日は「楽しかった」とか書いてたじゃない？昨日は何が不安だったの？

瞳：今日は、全然不安じゃない。全然できた。（昨日は）小数かける問題の説明を、ちょっと説明をするのが難しかった。

筆者：問題を解くのは大丈夫だけど、今日は、よかったの？

瞳：全然大丈夫だけど。

このやりとりの様子から、瞳は、考え方や説明を要しない計算問題を好んでいることが分かる。また、５時間目のインタビューより、瞳は、自身の過去の経験から、算数の学習は、それだけではいけないことを理解している。

５時間目後半に取り組んだ練習問題の時間に、瞳は問題集に取り組む。しかし、テープ図を使った問題がうまく解けず、自分で考え方を理解していないことに気付く。瞳は、「考え方がやばい、練習してこないと、宿題してこないと大変。」とつぶやく。瞳は、振り返りカードに『プリント（練習問題）は簡単だったけど、他のものの考え方が大変。』と書いた。

（瞳へのインタビュー）

筆者：（感想のところを指し）「ここってさ、さっきのあれのこと？」と聞く。（「考え方がやばい、練習してこないと、宿題してこないと大変。」と発言したこと）//あそこのああいう勉強って大切だと思う？」

瞳：「うん。」

筆者：「今日宿題でがんばってみるの？がんばってね。」

瞳：「うん。」

筆者：「計算だけでやってもだめか？筆算のだけでなくてね。」

瞳：「うん。ああいうやつ（テープ図や面積図を使った問題）、やっとかなきゃだめ。２年生のころ、一回やった時に、何て言うの、全然しなかったらできなくて、全然宿題とか、自主勉とかしなかったらできなくて、それからやるようになった。」

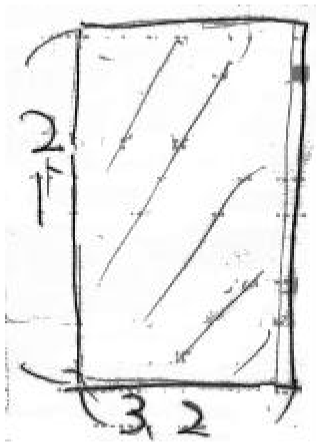
瞳は、図を用いた学習が自分自身の算数の学習においても、大切な考えを導き出すものであると考えている。そのことは、本単元で取り上げられるテープ図や面積図に対し、自分の考え方や数式をあてはめようとしている姿に現れている。また、本時の学習前に行ったアンケートでも、考え方が大切であると述べている。

本単元終了後に行った調査問題で、瞳は以下のように答えている。

あなたがもし、友達から次のように聞かれたらどう教えてあげますか？

友達：「2.1 × 3.2 は 6.72 になるっていうんだけどどうして 6.72 になるの？分からないんだけど」

この問題に対して瞳は、縦 2.1 横 3.2 の図(図7)をかいて、「2.1 × 3.2 をあんざんでするのは少し難しいから図をかく。2.1 × 3.2。これを図で表すと縦の 2.1 横の 3.2 で図はできる。」とプリントに書いている。他の児童にも同様の問題を行ったが、筆算あるいは筆算の手順を書いて終わりとする子どももいた。



（図 7）

そんな中、瞳は、「図で表す」という方法を用い、計算を説明しようとしている。

以上のことから、瞳には、算数の学習において、図と計算の整合性が大切だという数学的価値をもっていると考えることができる。

5.2　瞳の学習過程

前節で、瞳は算数の学習において、図と計算の整合性が大切であるという数学的価値をもっていることを明らかにすることができた。その瞳の学習を観察すると、瞳の面積図やテープ図に対する意識の変化が見られ、瞳の理解が進む様子が観察された。そこで、本節では、瞳の数学的価値が、瞳の学習にどのような影響を与えたのかを明らかにしていく。

【2.3×４の面積図について考える瞳（１時間目後半)】

教師が、子どもたちに、2.3 ×４の計算の仕方を面積図を用いて説明することを求める場面である。

教師は、縦 2.3 m、横４mの面積図を提示し、2.3 ×４で立式できることを全員で確認した。そして、「図を使って//はい、この図を使って。この図を使って、答えがいくつになるよってことを説明してみて。」と発言した。その後、子ども達はそれぞれの活動に入った。瞳も、縦の長さ等を確認した後、問題に取り組み始めた。

瞳は、１㎡のマスを数えた後、0.1 ㎡マスの縦と横を数えた。そして瞳は、小さなマス

を囲み、それを数式の３×４とつなげた。途中、教師が瞳に近づき、まだ何も書いていない１㎡のマスの部分を指し、「じゃここは？」等の声をかけた。教師の声がけによって、瞳は１㎡についても同様の表し方ができることに気付いた。そして、瞳は、面積図に自分の考えを書き加えた(図１)。

その後、瞳は、凛（後の席の児童）の書き方を参考にして、『0.1 ㎡は式の中の３×４＝12』、『１㎡は式の中の２×４＝８』とプリントに書いた。そして、しばらくした後、自らプリントの余白に『1.2 ＋８』と書いたのである。その後、授業は、かけ算の筆算の仕方についての方向へ展開していった。

分析

面積図が提示されてから、瞳がマス目を数える行為は多く見られた。それは、瞳が何とかして面積図を使い、2.3 ×４の答えがいくつになるか説明しようとしているからである。つまり、この時の瞳の問題意識は、「面積図を使って、2.3 ×４の答えがいくつになるか説明をする」であったといえる。

瞳は、提示された面積図の 0.1 ㎡の部分を、かけ算によって求めたことで、2.3 ×４の中にある『３×４』の意味を見付けた。この情報は瞳にとって、2.3 ×４の答えがいくつになるか説明するために必要なものであった。そして瞳は、説明する方法として数式と面積図をつなげるという行為をしたのである。

先にも述べたが、瞳は、この単元の学習に入る前から筆算の仕方は知っていた。クラスの児童の中には、筆算の仕方を説明して、2.3 ×４の答えを説明したとしている児童もいた。しかし、瞳はこの場面で、筆算を説明の道具として扱うことはなかった。筆算に頼らなかった要因として考えられるのが、瞳の算数の学習において、図と計算の整合性が大切であるという数学的価値をもっていることが挙げられる。数学的価値によって支えられている瞳の問題意識は、2.3 ×４の答えを説明するために、面積図を用いなければならなかったのである。

瞳が面積図の問題に取り組んでいる際、瞳は、教師から幾つかの指摘を受けている。瞳は、教師の「じゃここは？」「いいとこまでいってんな。」「おしいな。」という言葉から、自分の考え方が教師に理解されていることを知る。その上で、教師の「じゃここは？」という指摘に対し、瞳は、１㎡のマスの関係も、0.1 ㎡の関係の表し方と同様にできることに気付いたのである。そして、瞳は教師の意図した表し方を踏まえながら「2.3 ×４」と「小さいマスは縦３横４」、「大きいマスは縦２横４」の関係を明らかにしたのである。

この後、瞳は、凛から『0.1 ㎡は式の中の３×４＝12』、『１㎡は式の中の２×４＝８』という情報を得る。その際に、瞳は、自分の考えていた小さいマスは縦３横４というのが 0.1 ㎡のまとまりであること、そして、大きいマスは縦２横４というのは１㎡のまとまりであるという、新たな情報と自分の知識とのつながりを見つけることができたのである。凛から得られた新しい情報や自らプリントの余白に書いた『1.2 ＋８』といった自分で新たに見つけた情報は、この後の筆算の考え方にもつながっていった。

瞳が、自分の数学的価値に支えられた問題意識で 2.3 ×４を説明しようとした時、面積図を使ったのは、その背景に瞳の数学的価値があったからである。そして、面積図を使ったことで、ただ 2.3 ×４の答えを出すだけでなく、１㎡と 0.1 ㎡のそれぞれのまとまりを計算し、その合計が答えとなるという、2.3 ×４の答えを導き出すまでの過程を、瞳自身が明らかにしたのである。つまり、本時の観察から言えることは、瞳の数学的価値は、学習者の答えを導き出す過程をも明らかにしたのである。

【0.1m分８円であることにについて考える瞳（３時間目)】

課題に対して瞳は、指をおりながら「だってさ、160 から 200 で何個？何十？」と銀（隣の席の児童）に話しかけた。また瞳は、プリントに『160 ～ 200 までは 40，200 ～ 240 までも 40、ちょうどいいから 200 でいいと思う。』と書いた。

個別指導をしていた教師は、瞳の間違いに気付き、160 と 240 の中間が 200 であることや、２mと３mの中間が 2.5 mであることをテープ図等を使って、説明をした。瞳は、説明の聞いたり、図を見たりしながら「160 から 40、240 から 40 だから 2.4 mの代金は 200 円。」という考え方を「200 円は、160 円と 240 円の真ん中だから、2.5 mの値段である。」という考え方に修正した。

その後、瞳は、４年生の小数で学習した 10 等分する考え方をテープ図に書き加えるなど、必要な情報をテープ図に書き足していった。瞳は、2.4 mの代金が 200 円でないことを理解したが、0.1m が８円であることについては納得できず、2.4 mの代金を出せないままでいた。

授業終了後、筆者とのやりとりを通して、瞳は、2.5 m分の代金から 0.1 m分の代金を引く(200 －８＝ 192)という考え方を知り、2.4 mの値段を求めることができたのである。

分析

本時の瞳の問題意識は、「図を使って、代金が 192 円になることを説明する」であった。このことは、教師や凛とのやりとりで、図を媒介にして 2.4 mの代金を導き出そうとする姿から言える。そして、2.5 mの代金について、はじめは理解に苦しんでいたものの、瞳は図と計算の整合性が大切であるという数学的価値をもっていることで、160 から 200 までは 40(160 ＋ 40 ＝ 200)、200 から 240 までも 40(200 ＋ 40 ＝240）という計算から求めた答えが、テープ図の２mと３mの中間は、2.5 mであるという情報と整合性がとれることで、瞳は、200 円は 2.5 mの代金であることを理解したのである。

瞳が、テープ図の中に 2.5 mの位置を見つけたことは、後に 2.5 mよりも 0.1 mだけ少ない 2.4 mの位置と代金にかかわる情報をつかむきっかけとなる。授業終了後、瞳は、2.5 m分の代金から 0.1 m分の代金を引く考え方(200 －８＝ 192)を理解した。この時、瞳の理解を可能としたのは、瞳自身確証を得ていない 0.1 mが８円であるという情報を取り入れたことにある。瞳は、この情報を取り入れることで、テープ図から求めた答えと 200 －８という計算から求めた答えの整合性がとれ、更に導き出した答えが、教室で求めた 192 円と一致することで、その情報を取り入れたのである。つまり、瞳は、0.1 ｍ８円という確証のもてない情報も取り入れたことで、2.4 mの代金を求めることを可能にしたのである。

しかし、この段階で 0.1 ｍ８円という知識が、瞳にとって本当に使える知識となって取り入れたかについては、まだ検討を要する部分である。

【0.1m分８円という情報を取り入れる瞳（４時間目)】

0.1 ｍ８円ということに関して、教師から質問が出された（「1m が 80 円これ大丈夫ですか。」「じゃ次いきます。0.1 mは８円だよっていうのがちょっと自信がないという人。」「じゃ、８円が 24 個あるよって考え方が分かんない（人)。」)。瞳は、どの質問に対しても、周りの様子を伺いながら、分かっている方に手を挙げた。この様子から見ても、瞳なりにこれまでの学習を理解していると言ってよい。ただし、周りを伺う表情や様子を見ると、瞳の 0.1 mが８円であるということに対する不安さが見て取れる。

教師が黒板に 0.1 mごとに区切ったテープ

図を示しながら、0.1 ｍ増えれば、代金も８円ずつ増えることを説明し、0.1 ｍごとに『8』と書き加えていった。その時、ある児童が「７とかあったら。」という発言をした。その発言に対して瞳は、「７あったらおかしい。」と発言している。

授業終了後のインタビューで瞳は、「今日の問題やばかった。昨日の問題難しかった。」や「何かさ、みんなのやつ（0.1 ｍ８円の集まったものという考え方）って何か意味が分かんなかった。」と述べている。

分析

瞳は、はじめ 0.1 ｍ８円であるという考え方を完全に理解してはいないまでも、自分なりに納得しようとする姿が見られる。このことは、「７あったらおかしい。」と発言し、８ずつ増えていくことを指摘したり、授業終了後のインタビューで「何かさ、みんなのやつって何か意味が分かんなかった。」と述べながらも、本時の学習に真剣に取り組んだ姿から言える。

授業は、2.4 ｍは 0.1 ｍが 24 個集まった数だから、代金も８円が 24 個集まった数という考え方で進んでいった。瞳は、0.1 ｍが８円であることに対して、確証を得ておらず、多少の不安を感じているものの、これまで学習したこととつなぎ合わせると、0.1 ｍ８円という考え方で整合性がとれたり、代金が 192 円で一致したりすることから、その情報を自分の知識として活用している姿が見られる。

図と計算の整合性が大切だという瞳の数学的価値は、2.4 ｍの代金を導き出すために、瞳自身、確証のもてない情報も活用しているのである。その背景には、８が 24 個並んだテープ図と８× 24 ＝ 192 という計算が、整合性を生み出していることにある。このことから、瞳は自分の知識として取り入れることを可能としたのである。

【面積図によって、0.1㎡と0.01㎡の関係を理解する瞳（６時間目の学習と６時間目終了後の教師とのやりとり)】

６時間目の学習は、T.T で行われた。本時は、面積図を基にして、2.1 × 3.2 の計算の仕方を考える時間であった。

面積図が提示され、プリントが配られると瞳は、「えー、どういう風に書けばいいんだ？」とつぶやき、2.1 × 3.2 の筆算を始めた。瞳は、答えを 67.2 とした。その後、瞳は、T2 の指導を受けるまで、様々な計算式（例：2.1 ×３＝ 6.2 ×２＝ 13.4 など）を立て、67.2 となる式を考えた。

瞳は、T2 や友達から面積図に線を書き加えることや答えが 6.72 になることなど、情報を得、自分なりに試行錯誤を繰り返し、図９に見られるような計算方法で、2.1 × 3.2 の答えを導き出した。

2.1 × 3.2 ＝ 6.72
１㎡が６こ
0.1㎡が７こ　　＋ 6.72
0.2 × 0.1 ＝ 0.02

（図９）

以上のように答えを導き出した後も、瞳は、長さと広さを混同し、0.01 ㎡の理解が曖昧になっていた。立式後の瞳と凛とのやりとりでも、「だって、(0.1 ㎡のマスの一辺を指し）ほら、ここが 0.1 なら、(0.01 ㎡のマスの一辺を指し）ここも 0.1 に決まってるじゃん。」と述べる姿が観察された。

授業が終わり、筆者が瞳にインタビューしている途中から、担任が介入し、面積図(図４)を用い、瞳に働きかけをはじめた。

担任はプリントの１㎡のマスを指しながら、「10 個に切ったから、ここ 0.1(㎡)だよね。１(㎡)を 10 等分した。」と言って、１㎡を 10 等分したものが 0.1 ㎡であることをおさえた。その後、0.1 ㎡のマスを指し「ここ（高さ）が 0.1（ｍ）で(１㎡と 0.1 ㎡のマスの横の長さは)１(ｍで)同じなんだから、高

さだけが違っている。じゃ、高さだけはここ(0.1 ㎡)とここ(1㎡)を比べてみて、1/10 なんだから、面積も 1/10。じゃ、ここ（0.1 ㎡）とここ（0.01 ㎡）を比べてみても高さが同じで、横が違うんだから、横が 1/10 だから、面積も 1/10 って考えていけば 0.01 になるってこと。」と説明をした。その説明に瞳は、「あー。」、「うん、分かった。」と答え、0.1 と 0.01 の関係について気付いた。

分析

６時間目の瞳は、図９に見られるように、計算を中心に、答えを導き出した。しかし、そこに至るまでの瞳は、面積図に対して、どのように働きかければよいのか迷っている様子が見られた。その原因として考えられるのが、面積図が１時間目のように線で区切られていなかったこと、そして、瞳が、長さと広さを混同し、0.01 ㎡の理解が曖昧になっていたことが挙げられる。このことで、瞳にはマス目が意識されず、どのように働きかければよいのか迷っていたと考えられる。しかし、瞳は面積図に線を書き加えたり、計算したりすることを通して、図９のような方法で答えを導き出すことができたのである。

図９での解答から、瞳の考え方について見てみる。瞳は、１㎡と 0.1 ㎡がそれぞれ６こ、７こと書いている。しかし、0.01 ㎡について、瞳は、「0.2 × 0.1 ＝ 0.02」と書いている。これは、１㎡と 0.1 ㎡については、１時間目の学習の時のように面積図を意識し、書いたものであることが分かる。一方、0.01 ㎡については、計算にのみ頼っている様子が伺われる。このことからも、瞳の 0.01 ㎡のとらえが曖昧な状態になっていることが分かる。

瞳は、図と計算の整合性が大切であるという数学的価値をもっていた。そして、本時の課題に対して、面積図から答えを導き出そうと様々な働きかけを行った。このことから本時の瞳の問題意識は、「面積が 6.72（前半は 67.2）になることを説明する」であるといってよい。その問題意識から、１㎡と 0.1 ㎡については、面積図と結び付けた答えを導き出すことができたが、0.01 ㎡については、瞳が十分理解していなかったこともあり、１㎡や 0.1 ㎡とは異なった表現になったと考えられる。

瞳の 0.01 ㎡の理解については、授業終了後に担任教師が提示した 0.01 ㎡で区切られた面積図が有効に働いた。瞳は、１㎡と 0.1 ㎡、0.1 ㎡と 0.01 ㎡の関係が 1/10 であることを、面積図のマスの 10 等分という見方で理解することができた。図と計算の整合性が大切であるという数学的価値をもっている瞳にとって、マスの 10 等分という見方は、10 倍や 1/10 の関係と一致し、2.1 × 3.2 の正しい計算の仕方を理解することを容易にしたのである。

【かける数と積の関係をテープ図で説明する瞳（８時間目）】

授業中盤、3.1 × 1.2 と 3.1 × 0.8 の積の関係について教師が説明している様子である。

担任：「かける数が、0.8。つまり、１より小さい数ですね。かけ算てみなさんさ、例えば、さんいちが３，さんにが６，さざんが９とかけ算やっていくと、答えは必ず、積は、どうなっていた？」

瞳：「３つずつ。」

担任：「おっ、３よりも。」

他の児童：「上。」

担任：「大きくなっていくよね。」

担任：「はい、ところが、今やっているのは、１より小さい数。」

瞳：黒板に向かって、左側に指を動かしながら「長さが小さくなれば、」下の方を指しながら「重さも小さくなる。」

瞳は、教師の説明を聞きながら、かける数が１より小さくなった時の場合について、黒板のテープ図を指をさしながら、長さと重さの関係について述べた。

分析

本単元の１時間目にテープ図が提示された時、瞳はテープ図を用いて、2.3 ×４の考え方について説明することはできなかった。しかし、本時では、自分から板書したテープ図を参考にし、かける数とかけられる数の関係に着目し、その関係をつかみ、瞳はテープ図を指しながら、長さが短くなることで、重さも軽くなるという関係を説明することができたのである。

瞳が、かける数の関係について述べている時、まだクラスは、その関係に着目できていない。しかし瞳は、いち早くその関係に着目し、はじめの教師の問いかけで、かける数と積の関係をテープ図を指し示しながら、述べているのである。

5.3　瞳の学習過程と数学的価値のかかわりについての考察

１時間目の学習を振り返ってみる。筆算を知っている瞳は、筆算に頼らずあえて数式と面積図をつなげるという行為をした。それは、瞳には図を使って、2.3 ×４が 9.2 ㎡になることを説明をしようとする問題意識があったからである。その問題意識を支えていたのが、算数の学習において、図と計算の整合性が大切であるという瞳の数学的価値である。瞳の数学的価値は、マス目を数えたり、数式とつなげたりするなかで、瞳は、筆算の答えを導き出す過程をも明らかにしたのである。

また、６時間目の学習では、教師から 0.01 ㎡に区切った面積図が提示された。辺の長さとマスの広さを混同していた瞳は、0.01 は 0.1 の 1/10 であるという関係をマスを 10 個に分けるという方法によって知ることができた。このことは、瞳の図と計算の整合性が大切であるという数学的価値を刺激し、瞳の学習に新たな広がりを見せたのである。

一方、テープ図に関しては、１時間目の学習を観察する限り、瞳は、数値をかけ算にあてはめ、そのつながりを示そうとするなど、テープ図に対して、そのかかわり方がうまく持てない状態であることが言える。しかし、瞳の数学的価値によって、瞳の学習は変化を見せていく。

３、４時間目では、瞳自身確証のもてない情報であっても、テープ図と計算の整合性がとれることから、「0.1m の代金が８円である。」という情報を取り入れ、徐々にその考えが、瞳の知識となっていった。最終的に８時間目、瞳は、１時間目には使えなかったテープ図を用いて、自分の考え方を説明できるようになったのである。

以上のように、面積図やテープ図から学習者が自分に必要な情報を得るためには、学習者の問題意識、そしてそこに大きくかかわる数学的価値が重要となることが明らかになった。このことは、単に面積図やテープ図を自由に使えるようになるだけでなく、学習者の数学的価値によって、その働きかけや得る情報も変わってくることを示している。例えば、瞳は６時間目の学習において、１㎡、0.1 ㎡、0.01 ㎡の関係を「10 個に分ける」という関係とそれまで瞳が用いていた「10 倍」の関係で見ることができるようになった。このように学習者のもっている数学的価値は、学習を更に広げる可能性をもっているのである。

6.研究のまとめと今後の課題

瞳の学習は、図と計算の整合性が大切であるという瞳の数学的価値に支えられており、その支えられている数学的価値にあわせ、問題意識が生まれ、必要な情報を取り入れ、学習を進展させているのである。瞳の問題意識や問題解決に向けての行為は、数学的価値によって決まることが実際の学習場面においても、観察された。

そして、瞳の数学的価値は、瞳の学習に大きな影響を与えた。テープ図の活用に関しては、徐々にその使い方を身に付け、最終的に

は純小数の見積もりの拠として用いることができるようになった。また、面積図に関しては、0.1 ㎡の 1/10 という関係を面積図から見つけ、0.01 ㎡という広さや 2.1 × 3.2 の計算の仕方について、瞳の理解を促すことを可能にした。

また、図と計算の整合性が大切であるという数学的価値をもっていた瞳は、自分にとって、確証を得た情報でなくても、その情報を取り入れることで、図と計算と整合性が保つ場合、それを仮の情報として取り入れることも明らかにすることができた。

以上のことをもとに、授業への示唆を考える。はじめに述べたように学習は、学習者に任されている。そのためにも、長期的視野に立った学習者の数学的価値の育成というものが重要になってくる。前に述べた、個に応じた指導の工夫や教材開発等の授業の改善が行われたとしても、その情報を受け取る学習者が、その情報の必要性を感じなければ、学習者には取り込まれないからである。

次に、先ほどの事例のように、瞳自身確証のもてない情報ではあったが、情報を取り入れ、計算と図の整合性がとれることで、瞳は、自分の知識にするという事例が観察された。つまり、自分の数学的価値に支えられた問題意識にあわせて情報を取り入れるだけではなく、確証のない情報であっても、その情報を取り入れることで、自分の数学的価値と一致するならば、その情報を知識として取り入れることがわかった。つまり、学習者の数学的価値を明らかにし、その価値に応じた情報提供の場の設定をすることで、個々に応じた子どもの学習過程の実現を可能とするのである。そして、その役割を果たすのが教師なのである。これらのことを通して、子どもたちにとって、より望ましい学習環境が整えらえると考える。

今後の課題としてあげられるのは、本稿では、一人の児童、瞳を取り上げ、瞳のもっている数学的価値に着目し、一人の子どもの学習過程を明らかにした。そして、数学的価値と学習過程のかかわりの複雑な影響を探り出し、指導の示唆を得ることができた。しかし、本事例の考察を通して得られた示唆は、一般性が保証されるものではない。学習者個々によって、もっている数学的価値は異なる。そのような児童に対し、教師はどのようにしてバランスのよい算数学習をアプローチしていけばよいのかを考え、今後、今回の視点をもって、更に他の事例について分析をする必要がある。

引用・参考文献

大関聡.（2004）. 算数学習において自ら学習環境を作り上げていく様相の研究. 上越数学教育研究. *19*,93-104.

佐伯胖. (2003).「学び」を問いつづけて. 小学館.

武田　忠.（1998）. 学ぶ力をうばう教育：考えない学生がなぜ生まれるのか. 新曜社.

日野圭子.（1993）. 小数の乗法の学習における子どものインフォーマルな方法についての一考察. 三輪辰郎先生退官記念論文集・編集委員会（編）, 数学教育学の進歩. 東洋館.

守屋慶子.（2000）. 知識から理解へ：新しい「学び」と授業のために. 新曜社.

文部科学省.（2004）. 学校教育に関する意識調査の概要（平成１５年度実施）. http://www.mext.go.jp/a_menu/shotou/gakuryoku/genjo.htm

宮崎樹夫.（1989）. 推測したことに一般性があることを示すために行われる活動生徒はどのようにして生成的な例による説明を行うか. 数学教育学論究, *57. 3-17*.

横井義明.（1994）. 数学的信念に関する考察：数学的信念の調査. 日本数学教育学会第 *27* 回数学教育論文発表会論文集, 1-6. 神戸女子短期大学.