上越数学教育研究，第 20 号，上越教育大学数学教室，2005 年，pp. 121-132.

実験を伴う関数の授業における子どもの思考過程について

－数学的モデリングに着目して－

横　関　達　人
上越教育大学大学院修士課程２年

１．はじめに

高度な現代社会を生きる我々にとって、様々な事象の変化を数理的に捉え、その変化を予測してコントロールしたり利用したりする力を身につけることが必要である。その力の一つとは、事象にひそむ変量を関連付けて考察する力である。すなわち、事象を関数的に捉える力が必要となるのである。

しかし、関数は子どもにとって苦手な分野となっているのが現状である。関数を形式的に扱うあまり、事象から離れたところで表、グラフ、関数の式などを教え込む指導に終始しているからではないだろうか。

本稿は、実験を起点とした数学的モデリングの関数授業における子どもの思考過程に注目し、関数的な見方や考え方がどのように形成されていくのかを認知学的モデルの視点から明らかにし、関数指導の改善における示唆を得ることを目的とする。

２．関数の指導法に関する先行研究の概観

桐山（1998）は、子どもが事象の中から関数関係をどのように見出していくのか、その過程を探っている。そして、関数の理解過程における水準を設定し、伴って変わる２変量の関係を関数の式によって表現することを１つの目標にしている。

林（2000）は、現実場面と関わりを持ち、事象の中から変数を取り出し、その変数を関係づけていく活動を豊かにし、見出した関係を関数的な表現や処理と接続するような指導過程を構成したいと考えた。そこで、子どもがどのように事象から変数を取り出し、変数間の関係を構成するのかを明らかにしていくために、モデルの発展に着目している。林はモデルについて、一般的に考えられる子どもが作り出したもの、表現したもののみならず子ども自身が持っている活動の基盤となる考えもモデルの１つであると考えている。

本稿でも、モデルの発展に注目する。関数的な見方や考え方は、モデルの発展とともに形成されると考えるからである。

どちらの先行研究も、子どもが事象と関わる活動の中で関数関係を見出していく過程を重視し、事象からという視点を大切にしている。このことから、「具体的な事象」、「観察、操作、実験など具体的な活動」が関数指導を行う上で鍵を握ると考えた。

３．実験と数学的モデリングへの着目

「具体的な事象」と「観察、操作、実験など具体的な活動」から注目したのが、実験と数学的モデリング（以後、数学的モデリングを単にモデリング、数学的モデリングの過程をモデリング過程と略記）であった。実験とモデリングについて、以下に詳しく述べる。

3.1　実験について

実験を関数の授業に取り入れる意義は、実験における変量の変化の様相を捉えようとすることで関数の本質に迫れることである。実

験には刻一刻と変化するものを教材として取り上げるが、子どもはその変化の様相を何かしらを基準として関連づけようとするであろう。つまり、中島（1981）が述べる「１つのもの」を「ほかのもの」と関連づけてみようとする姿勢が身につくのである。

もう１つの意義は、変化の様相を捉えるために、子どもが実験結果から表やグラフ、関数の式などを創り出すことである。そのときに我々教師にとっては、形式的表現の指導の機会も与えられることになる。つまり、林（2000）が目指す「数学的な表現や処理と接続する指導」が具現化されることになるのである。

しかし、ここで注意を払いたいのが現物実験と思考実験についてである。森田（1991）は、次のように述べている。

二つの実験は数学の授業としてどちらが優れているかということはない。生徒の理解の仕方は多様なものなので、理解はどちらからはじまってもよい。そして、両方の実験を理解させることが必要となる。（森田，1991，p. 149）

本稿では、思考実験の結果、実験の予想や仮説が導き出され、それらを検証するために現物実験が試行されると考える。そして、再度思考実験が繰り返され、予想や仮説の修正や棄却が行われるというように、これら思考実験と現物実験は表裏一体の活動である。

したがって、両方の実験が互いに補完し合う形で授業に取り入れることが大切である。

3.2　モデリングについて

三輪（1983）は、モデリングを次のように定義し、図１のように図式化している。

「それまでの経験・観察を基にして、ある事象が探求を要するという認識があるという前提の下で、

（ａ）その事象に光を当てるように、数学的問題に定式化する（定式化）。

（ｂ）定式化した問題を解く（数学的作業）。

（ｃ）得られた数学的結果をもとの事象と関連づけて、その有効さを検討し、評価する（解釈・評価・比較）。

（ｄ）問題のより進んだ定式化をはかる（より良いモデル化）。」（三輪，1983，p. 120）

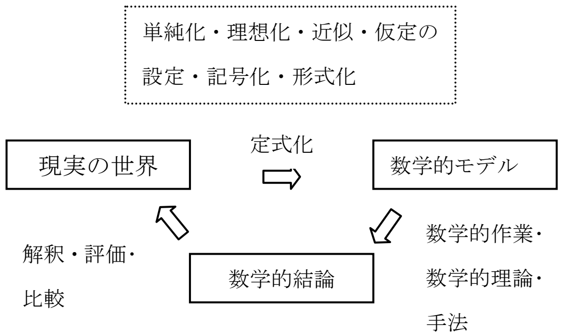

図１　三輪のモデリング過程

三輪（1983）は、モデリングの意義の１つとして数学的な考え方が育成される点を挙げている。三輪（1983）が述べる数学的な考え方とは、単純化・理想化、捨象、近似、分析・総合・演繹といった思考方法に加え、数量化・図形化・記号化といった形式化などである。筆者は、モデリングに関数教材を取り上げることにより関数的な見方や考え方も形成されると考えた。筆者が考える関数的な見方や考え方とは、２つの数量の依存関係に着目し、対応の決まりや変化の特徴を見つける帰納的な考えや一般化の考えである。

したがって、今回のモデリングの意義は、現実の世界の事象や問題を取り上げながら、関数的な見方や考え方を形成していくことにある。

４．モデルの自己発達を視点として

では、どのように関数的な見方や考え方が形成されるのであろうか。これを明らかにしていくには、モデリング過程における子どもの認知過程に光を当てていく必要がある。

一般的に、モデリングで扱われる数学的モデルは状況や文章の記述と分析をねらいとして活用され、このモデル自体、変化するものである。したがって、モデルの変化を追うこ

とで思考過程を辿ることができると考えた。

そこで、モデルの変化をより詳細に捉えるために、現実的数学教育 Realistic Mathematics Education（略称 ＲＭＥ）におけるモデルの自己発達の視点を参考にした。

ＲＭＥのモデルは、一般的な数学的モデルとは異なり認知学的モデルである。Gravemeijer (1997) は、子どもの内的活動を拠り所として創り出される認知学的モデルを、「Situations」に依存した「Model of」と「Fomal maths」へと向かう「Model for」に階層化している。そして、「Situations」と「Fomal maths」の隔たりを、２つの認知学的モデルで橋渡ししていくと考えた（図２）。

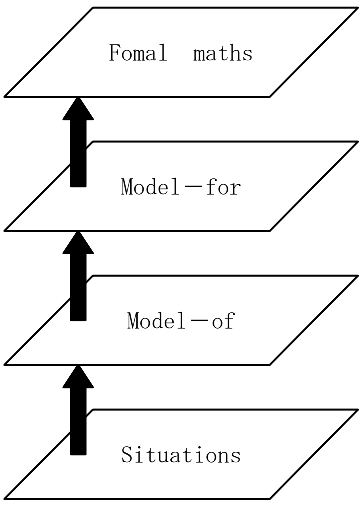

図２ Gravemeijer のモデルの自己発達

しかし、「Model of」から「Model for」への発達過程があまり明確にされていない。そこで本稿では、この点を明らかにしていくために、２つの認知学的モデルを参考にして、「Model of」を「素朴なモデル」、「Model for」を「洗練されたモデル」とした。これらは「Model of」から「Model for」へと洗練される過程を強調して名づけたものであり、その洗練される過程を詳細に捉えるために、実験を起点としたモデリング過程の中で階層化した。

この「素朴なモデル」と「洗練されたモデル」の違いは、定式化されているかどうかによるものとする。例えば、「素朴なモデル」としては図や表、グラフ、「洗練されたモデル」としては関数の式をそれぞれの一例として挙げる。

関数の式を境界線に置いたのは、事象の定式化が容易ではないことと定式化できた時点で関数的な見方や考え方がかなりの水準に達していること、そして関数の式が他の表現を包括し最も端的に事象を表現しているからである。

５．実験を起点とした数学的モデリング

では、筆者が考える実験を起点としたモデリングについて定義していく。

まず、法則や結果を明らかにしたい具体的な事象に注目し、実験したい部分を取り上げる。そして思考実験で予想や仮説を設定した上で現物実験を試行し、ある一定の実験結果を得る。それは具体的な事象の結果として受け取ることができる。

これらの実験結果を基に数学的モデル（以後､素朴なモデルと洗練されたモデルを指す）を形成して予想や仮説を検証し、法則や結果を数学的結論として考察していくのである。

以上を踏まえて、次のように定義し、図３のように図式化する。

「それまでの経験・観察をもとにして、ある事象が探求を要するという認識があるという前提の下で、

(a) その事象について実験を試行し、その実験結果から数学的モデルを導く。（数学的モデルの形成）

(b) 数学的手法などを用いて、数学的結論を得る。（数学的作業）

(c) 得られた数学的結論をもとの事象や実験結果と関連づけて、その有効さを検討し、評価する。（解釈・評価・比較）

(d) 必要に応じて（a）～（c）を繰り返

し、問題のより進んだ定式化を図る。」

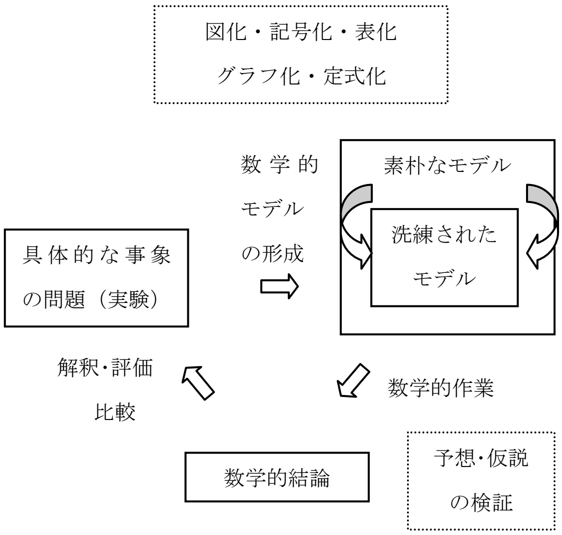

図３　実験を起点としたモデリング

ただし、モデリング過程は、順序通りに進むものではなく、逆戻りの過程もあると考えられる。

６．教授実験の概要

石川県にある公立中学校３年生の選択授業１クラス 15 名を対象として、教授実験を実施した。

まず、１次関数の「線香の燃え方を調べる実験」を平成 16 年５月６日から平成 16 年６月３日まで５時間実施した。クラスを３～４名の４つの班に分けて、各班ごとに実験を試行した。続いて２次関数の「台車の転がり方を調べる実験」を平成 16 年６月 10 日から平成 16 年７月 15 日まで４時間実施した。同じく４つの班に分けて実験を試行した。

教授実験は、授業と事後調査で構成し、全９時間の授業を３台のＶＴＲと１台のＩＣレコーダーで記録した。また、使用した子どものワークシートは回収し、実験や授業全体の感想を求めたアンケートも２回実施した。さらにインタビューも実施しＶＴＲで記録した。

（２）各時間の課題と活動内容

①１次関数　第１時

課題１「ここに９cm の太い線香と 13cm の細い線香がある。座禅を組むとき、自分で線香を選ぶとしたら、あなたはどちらの線香を選ぶか。」に取り組んだ。その後「９cm の太い線香と 13cm の細い線香では、どちらの線香が速く燃え尽きるか。また、それはなぜか。」を子どもに問い、子どもはどちらの線香が速く燃え尽きるかという予想と線香はどのように燃えるのかという仮説を設定した。

②１次関数　第２時

第１時の予想と仮説を検証するため、実際に 12 分間線香を燃やす実験を試行し、その結果を実験データとしてまとめた。

③１次関数　第３時

第２時の実験結果を班ごとに発表し、予想と仮説の検証に取り組んだ。その後、課題２「２本の線香について、線香をｘ分間燃やしたときの線香の残りの長さをｙcm としたとき、それぞれｙをｘの式で表しなさい。」で定式化に取り組んだ。

④１次関数　第４時

課題３「２本の線香について、それぞれ 17 分後の線香の長さを求めなさい。」、課題４「２本の線香について、それぞれ何分後に燃え尽きるだろうか。それぞれについて、その時間を求めなさい。」、課題５「２本の線香は何分後に長さが等しくなるだろうか、その時間を求めなさい。」に取り組んだ。

⑤２次関数　第１時

課題１「学校の坂道を自転車で転がると、カーブの地点でおよそ何 km の速さになっているか。」に取り組み、速さの予想とその変化について仮説を設定した。その後、自転車を力学台車に置き換えて記録タイマーを用い、速さの変化について調べる実験を試行した。

⑥２次関数　第２時

２次関数の第１時の実験データを基に、速さの変化についての仮説を検証した。

⑦２次関数　第３時

課題２「距離はどのように変化していくだろうか。」に取り組み、距離の変化につい

て仮説を設定した。その後、再び力学台車を用いて距離の変化を調べる実験を試行した。

⑧２次関数　第４時

２次関数の第３時の実験データを基に、距離の変化の仮説について検証した。実験データに関しては、最も適当だと思われる子どもの実験データを取り上げて、課題３「次のデータをもとに、0.8秒後と３秒後の距離をそれぞれ求めなさい。『1.7cm、6.6cm、14.9cm、26.6cm、41.3cm、59.1cm、80.1cm』」として取り組んだ。

⑨２次関数　第５時

課題４「台車が斜面を転がり始めてからの時間をｘ秒、その間に転がる距離をｙcmとしたとき、ｙをｘの式で表しなさい。」に取り組んで定式化した。続いて課題５「課題１『学校の坂道を自転車で転がると、カーブの地点でおよそ何kmの速さになっているか。』の速さを求めます。実際の実験データとして、『最初の５ｍを転がるのに、2.84秒、カーブまでの距離は117.6ｍ』とします。速さを求めなさい。」に取り組んだ。

７．子どもの思考過程の分析

7.1.1　１次関数の定式化に至る過程

田島は第１時に、課題１に対して、「９cmの太い線香」を選ぶとし、その理由を「太い方も細い方も燃えていく速さはあまり変わらないと思うから短い方が良い」とした。そして第２時に、予想や仮説の検証のために現物実験を試行した。この現物実験のデータをもとに数学的モデルの形成が行われるが、今回は焦げ目を付けていったのが方眼用紙であることから、方眼用紙自体が実験の状況を示す素朴なモデルとなっている。しかし、このままでは数学的作業がしにくいためにこの方眼用紙から数値を取り出し、新たに表にして数学的作業に入っていった。田島は第３時に、次のような表を創り出している（図４）。

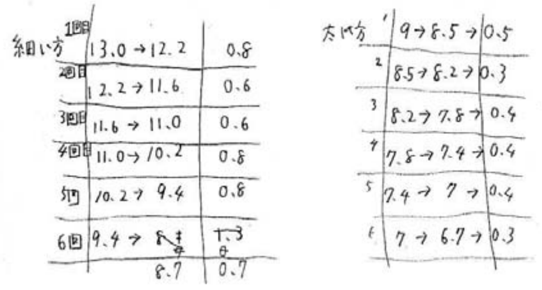

図４　田島の表

田島の班は２分ごとに線香の残りの長さを計測しているため、計測した回数、線香の残りの長さの数値、そして減った長さを正の数で図４のように表している。図４では一番右端の減った長さが変化の割合につながっていくと考えられるが、それ以外は方眼用紙を見やすくまとめたもので素朴なモデルと判断することができる。これらの素朴なモデルを基に、田島の班がクラスで実験結果について発表したとき、次のような発話があった。

31023Ｔ　：（前略）３班はどうですか？

31024岡田：２分で計ったら、13cmの方より９cmの方が遅かったので、13cmの方が早く燃えるとしました。

31025Ｔ　：で、これもちょっとつっこみ入れるけど、逆転起こった？

31026岡田：起こった？

31027田島：起こってはないげんなあ…けど。

31028Ｔ　：けど？

31029 田島：けど、あのうまあ、あのう２分間で調べたんですけど、２分間に燃える量が、えっと細い方の方があのう多いので、多かったんで逆転するだろう。

31030Ｔ　：するだろうか？３班は、もうするだろうという見込みを入れてや。４班はどうですか？

31027「起こってはないげんなあ…」は、図６から分かるように実験時間を 12 分に限定しているため、実験ではまだ逆転は起こっていないことを示している。しかし、このペースでいけば逆転が起こることを感じとってい

るようで、31029「…逆転するだろう。」と予想したのである。ただ、教師の 31030「３班は、もうするだろうという見込みを入れてや。」との発話などから、田島は本当に逆転するのだろうかということを検証する必要があることを感じ、次のような計算を行っている（図５）。

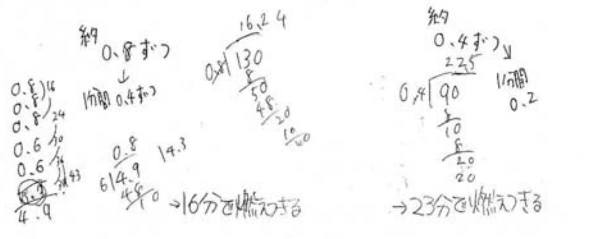

図５　田島の計算

図５では、田島はいくつかの間違いをしている。細い方の６回目の数値を最初は 8.1cm とし、次に訂正して 8.7cm としたことについてはいいのだが、そのまま間違いの方の 8.1cm を使用している。そのために、12 分間で 4.9cm 燃えたこととなり、１回（２分間）ごとの線香の燃える量を 0.8cm としている。平均を出す計算の流れからすれば、0.7cm とすべきところであろう。しかし、課題の解決に支障はなく、むしろ重要な点は変化の割合につながる１分間に燃える線香の量 0.4cm を算出している点である。また、太い方についても同様に 0.2cm を算出できている。そして、２本の線香が燃え尽きる時間を求めるために、この２分間に燃える量で 13cm と９cm をそれぞれ割るという作業に入っている。このときに 0.4cm と 0.2cm は本当の意味で変化の割合になったと考えられる。本来ならば１分間に燃える量である 0.4cm と 0.2cm を使うべきところを２分間に燃える量 0.8cm と 0.4cm で、もとの長さを割ってしまったという２つ目の間違いをしているが、これも単なる勘違いであり課題の解決に支障はない。計算結果は細い方が「16 分で燃え尽きる」、太い方が「23 分で燃え尽きる」と求められたために、31029「…逆転するだろう。」は確信へと変わった。

ここまでの数学的作業を通して、「１分間に燃える線香の量は一定である」ことを数学的結論として得ることができ、これを根拠として「細い線香の方が早く燃え尽きる」ことを解釈・評価することができた。この時点で、モデリング過程を一巡したと考えている。

子どもは方眼用紙の焦げ跡をグラフのように捉えており、燃える時間や線香の残りの長さを２変量として捉えていることや、これまでの数学的作業から定式化できるだけの思考力が子どもに身についてきたと判断し、課題２を提示した。この課題２では、事象を定式化しより精緻に捉えるとともに関数的な見方や考え方をさらに伸展させることがねらいである。

課題２の結果は、15 名中 11 名が正しく定式化できた。正しく定式化できなかった４名の誤答例としては「y＝0.4ｘ」、「y＝0.4x－13」がともに２名ずつであった。「y＝0.4ｘ」については線香が燃える量についての定式化であると勘違いしたこと、「y＝0.4ｘ－13」については線香が短くなるイメージから負のイメージを持ったのだが、それを線香の元の長さの方に「－」を付けてしまったことを授業後のインタビューで述べている。この４名はほどなく自分の間違いに気づき、正しく定式化することができた。

田島は、授業後のアンケートで「式をどのように考えて作りましたか。」の問いに図６のように答えている。

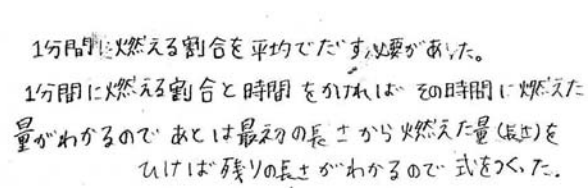

図６　田島の定式化に至る考え方

田島の定式化に至る考え方から、量の結び付きを的確に捉え言葉の式で表現できていることが分かる。田島は、これを基に図７のように定式化することができた。

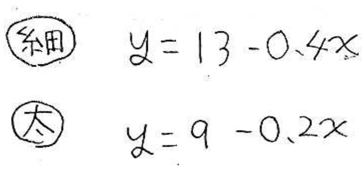

図７　田島の関数の式

図７のように定式化できたことで、洗練されたモデルの段階となった。ただ、その後関数の式をどのように利用していくかによって、子どもにとって関数の式が本当に洗練されたモデルかどうかが決まってくるとも考えている。つまり、関数の式を得られたとしても関数的な見方や考え方が関数の式についていけず、素朴なモデルの段階でモデリング過程を繰り返すこともあり得る。田島は、その後の課題３から課題５までを関数の式を利用して解決している。したがって、田島にとって関数の式は洗練されたモデルであり、モデリング過程を洗練されたモデルの段階で繰り返していると考える。

7.1.2　素朴なモデルへの戻り

ここまでで全員が定式化できたことから、１次関数の課題５に対して筆者は連立方程式による解決を期待していた。つまり、関数の式を利用しての解決であり、「洗練されたモデル」の段階での解決を期待していたのである。しかし、４名が連立方程式以外で解決を試みており、ここではそのうちの山口による素朴なモデルに戻っての解決を取り上げる。

山口はまず、グラフによる解決を試みた。グラフについては、時間に伴い線香の燃える長さについてグラフ化したため、右上がりの直線を書いてしまったことや、y 軸の目盛りの取り方がうまくいかなかったため断念した（図８）。

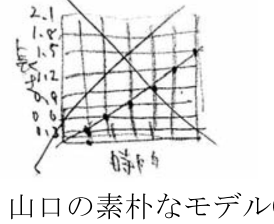

図８　山口の素朴なモデル①

次に表による解決を試みた。しかし、この表が長くなることから 10 分までで表を書くことを断念している（図９）。授業後のインタビューでも、表による解決では非能率的だということを述べていた。

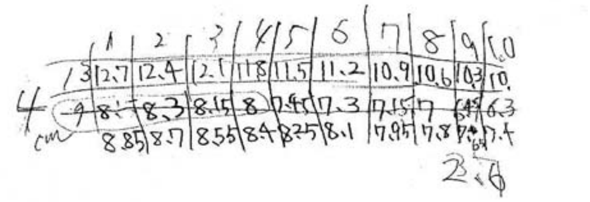

図９　山口の素朴なモデル②

このように、数学的モデル自体は洗練されたモデルの段階に上がったにも関わらず、素朴なモデルによる解決を試みることがある。この場合は関数の式と表やグラフとの関係がまだ理解できておらず、ただ定式化できただけに留まっているからである。

ただ、今回のような素朴なモデルに戻ることは洗練されたモデルにも無駄なことではなかった。むしろプラスに働いたといえる。それは、表を活用して課題に取り組んでいるときに次のような発話があり、その後の活動につながったからである。

41069 山口：４㎝あったもんが…今…、10 分で…。

41069「10 分で…。」は表から 10 分間で 1.4cm 縮まることに注目していることを示しており、比例関係を利用して 20 分から 30 分の間に答えがあることに気づいている。このことが、28 分の数値を２つの線香の式に代入して確かめる活動を導いている（図 10）。

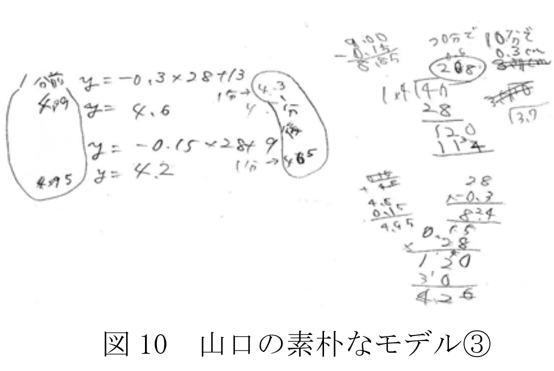

図 10　山口の素朴なモデル③

この図 10 の活動は、関数の式の意味を知る重要な活動となっている。つまり、２つの式への代入計算がグラフの交点や連立方程式の解との関係を知る活動となったのである。山口は、代入によって得られる残りの長さが同値になるはずとの考えから 27、28 を代入した。結果は残念ながら同値ではなかったため、はっきりとした答えが得られずに約 27 分としている（図 11）。

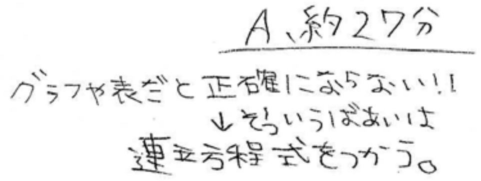

図 11　山口の答え

この解決による誤差は許容範囲であり、具体的な事象を解釈・評価していく方法としては十分通用するものである。この後、連立方程式で解くことを、グラフ黒板を用いながら次のように確認していった。

41102Ｔ　：（前略）長さが等しくなってる部分は、この図ではどこや？

41103 山口：10…。14…？

41104Ｔ　：うん？どの部分？10…？どこ、探してる？

41105 山口：交わったとこ。

41103「14…？」は、グラフ黒板から２本の線香の長さが等しくなるだいたいの時間を読み取っている。しかし、グラフの交点が目盛りからずれているためにはっきりした数値を読み取れていない。そこで教師が 41104 で「どこの部分？」や「どこ、探してる？」と問い直した。山口は 41105「交わったとこ。」と答え、グラフの交点と連立方程式の関係に理解を示した。山口は、図 18 の答えの下に「グラフや表だと正確にならない→そういう場合は連立方程式を使う。」と記している。授業後であるが、次のような教師との発話があった。

41123 山口：これ、むなしくないですか？

41124Ｔ　：何が、どしてん？いや、これが、これがいいげんて。まあ、先生にとってやけど。式の方が早かったやろ？式の方が…。

41125 山口：はい、全然早かったですねえ。

41126Ｔ　：全然早かったねえ。でも、そんなの大事ねん。うん、ありがとう。

41123「これ、むなしくないですか？」は表やグラフに対する不満である。時間がかかり過ぎたり、正確に算出できなかったことに対する気持ちが込められている。逆に、41125「はい、全然早かったですねえ。」には、関数の式の機能性に対する満足感が込められている。課題５を通して、関数の式を利用するよさを認識できた場面である。

7.2.1　素朴なモデルの相乗的な洗練

田島は２次関数の課題１について 27km／時を予想し、当初の仮説を「どんどんスピードがでてきて速くなっていく。」と設定した。そして、速さの変化について検証するため、実験結果から縦型の表を創り出した（図 12）。

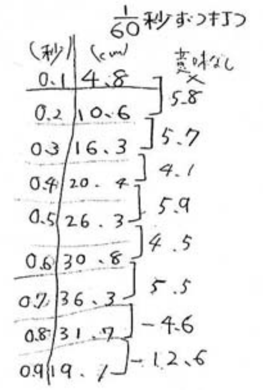

図 12　田島の縦型の表

田島は、この表から差を取ることで速さの変化だけに着目し、「差を見ると速さは一定に速くなっていなかった。」との数学的結論を得ている。表では速さの差を取ることのみに注目したこと、そして時間はまだ序数的な意味しか持たないため、この表は素朴なモデルである。しかし検証を続け、時間と速さを対応させて折れ線状のグラフに表現し、この折れ線が直線のようにも見えることから「グラフを見るとほぼ一定に速くなっていった。」と

数学的結論を変更している(図 13)。

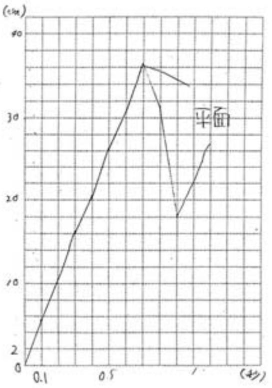

図 13　田島の折れ線グラフ

これは数学的作業で逆行が起こったことを示している。すなわち、事象を表とグラフの両面で捉えたのだが、グラフが内的に洗練されたことがきっかけとなって最初の数学的結論が間違いであることに気づき、事象を捉え直したのである。ここでのグラフの洗練とは折れ線を原点を通る直線に捉えたことであるが、その結果、表も増加量を一定に捉え直し内的に洗練されたといえる。このときのグラフは、時間と速さを対応させ始めた点で表に比べて関数的な見方や考え方に伸展が見られる。しかし、事象を数値的に厳しく捉えるにはまだまだ不十分なため、このグラフは素朴なモデルである。ただ、２つの素朴なモデルの相乗的な効果で既知の正比例と結び付き、速さの仮説は、「速さは時間に比例する」と明確に表現された。つまり、見出せなかった依存関係を、素朴なモデルを相乗的に洗練させて捉えたのである。

7.2.2　２次関数の定式化に至る過程

２次関数の第４時は、実験データを基に距離の仮説を検証した。当初は各自がそれぞれ実験データを持っていたことから、各自で検証させてその考えのみを集約するつもりであった。しかし、教師側で事前に調べたところ、かなり誤差を含んでいたり細かい数値が並んでいることから１つの実験データを基にみんなで取り組んだ方がよいと判断した。そこで、最も適切ではないかと思われる子どもの実験データを載せ、それを基に 0.8 秒後と３秒後の距離を求めることを課題３とするワークシート④を作成した。

田島は、課題３について課題の数値をそのまま活用し、次の図 14 を基に検証した。また、このとき次のような発話があった。

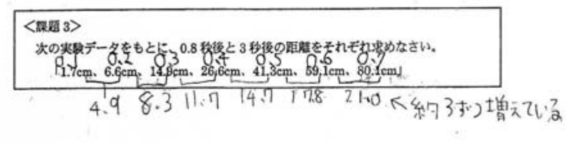

図 14　田島の数値の活用

82001 奥村：何、何を出しとる？
82002 田島：ここの差出して、引いていったら、増えていく量出して、だいたい３ずつやんか。わかる？
82003 奥村：１、２、３、あっ、ほんとだ。
82004 田島：だいたいやよ。

（中略）

82012 田島：えっ、だって、0.7 秒後のときには 80.1cm でしょ？これとこれの差が 21.0 やろ？
82013 奥村：あっ、そうか、そうか、そうか。
82014 田島：24 にしたら…。
82015 奥村：あっ、ほんとや、ほんとや、ほんとや。
82016 田島：うちも最初 83 とか書いとったもん。
82017 奥村：じゃあ、3 秒後は？
82018 田島：3 秒後が分からんげん。
82019 奥村：0.3、これ×、10×…。

田島は図 14 や発話から分かるように、距離の増え方の変化から規則性を見つけようとした。この図 14 は数値の並びをうまく活用し、表のように横の変化を捉えている。１次関数で培ってきた関数的な見方や考え方を活用しているが、横の変化以上の発展は見られないため素朴なモデルである。この図 14 を基にして、82002「だいたい３ずつやんか。」の発話にあるように「約３ずつ増えている」ことに気づき、距離はただ増えるだけではなく、その変化に規則性があることを掴んだ。82012

「これとこれの差が 21.0 やろ？」、82014「24 にしたら…。」の発話から、３という一定の数値を 21.0cm に加え 24.0cm として 80.1cm に足し、0.8 秒後の距離を 104.1cm として導き出している。「約３ずつ増えている」ことを手がかりに、距離を求める１つの手順を確立したのである。この手順には明確な表現こそないものの、この時点での数学的結論となりモデリング過程は一巡したといえる。そして、この手順を基に図 15 のような表を作って３秒後を算出しようと試みたのである。

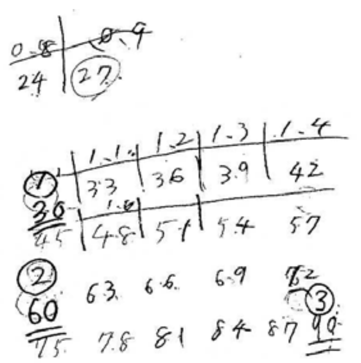

図 15　田島のｙの増加量に注目した表

図 15 はｙの増加量を３ずつ増やして作った表であり、３秒後に足すべき 90 を求めるための素朴なモデルである。この３秒後を求める活動が事象の解釈・評価にあたるが、手順がやや煩雑すぎ、ややもすると 82016「うちも最初 83 とか書いとったもん。」のように勘違いしやすく途中で計算間違いをしてしまう可能性もあるため断念している。しかしその一方で、図 15 では「30、60、90」の数値が強調されており、82019「0.3、これ×、10×…。」にあるように１次関数の経験から何らかの定式化が得られるのではないかと定式化にもこだわりを見せている。結果として、実際に３秒後の距離は求められていないため、３秒後の解釈・評価が終わっておらず完全には事象を捉え切れていない状態である。

速さの変化もそうであったが、この距離の変化についても、子どもはまず横の変化に着目している。これは、これまで学習してきた正比例関数や１次関数など既習の関数が、横の変化に着目することで比較的簡単にその特徴を掴めてきたからである。しかし、今回の距離の変化は２次関数になるため、横の変化に着目してｘの増加量やｙの増加量を１度調べただけではその特徴は掴みにくい。そのため、多くの子どもは戸惑いを見せたのである。

子どもは横の変化を差で捉えることに限界を感じていたため、教師が横の変化を倍数で捉える支援を送ることにした。これにより、田島は図 16 を基に再びモデリング過程を繰り返し始めた。

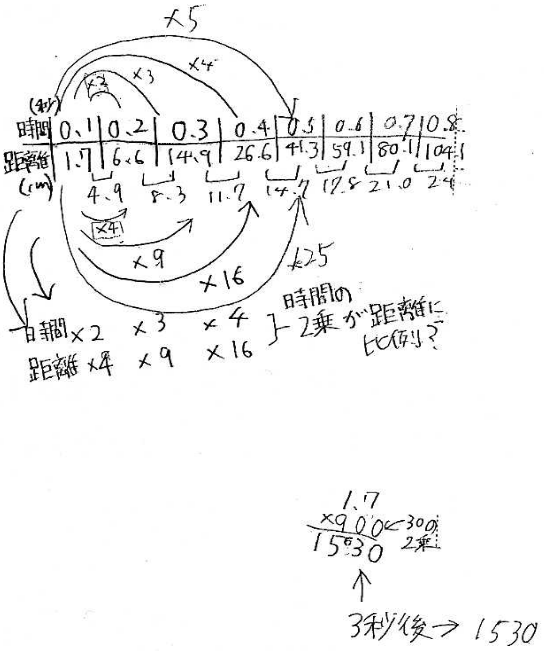

図 16　田島の倍数で捉えた表

図 16 は図 14 の洗練されたものである。図 14 では、時間はまだ序数的な役割の域を出ていないが、図 16 では時間と距離の変化に同時に注目し、それぞれの変化の特徴を倍数で掴んでいる。そしてさらに、その結果を言葉で「時間の２乗が距離に比例？」と表現している。

表現は間違っているが、時間と距離の変化を倍数で捉えることで何らかの対応関係を理解し始めており、これがこの時点での数学的結論となっている。そしてこの数学的結論を基にして、３秒後を 1.7cm×(30)^2＝1530cm

と求めることができた。この数式は、表から読み取った時間と距離の対応関係を定式化へうまく橋渡しするきっかけを与えている。つまり、時間の２乗と距離を比較することを示唆するものである。したがって、図 16 を契機として表の横の変化から縦の対応へのきっかけを掴み始めている。ただ、この表ではどこかの数値を基準にして倍数関係を求めていかなければ 0.8 秒後や３秒後の距離を求められず、比例定数の考えも欠けているため依然として素朴なモデルである。

第４時までの数学的モデリング過程を繰り返す活動を通して、距離の仮説を「距離は時間の２乗に比例する」として確認できたので、第５時に課題４で定式化に取り組んだ。次の図は、田島の定式化に至る過程を示す図である（図 17）。

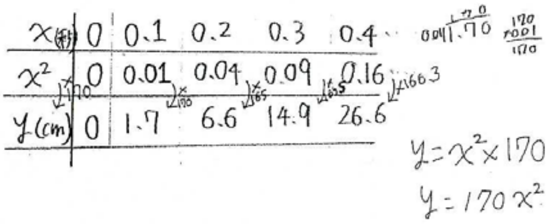

図 17　田島の定式化とその過程

このとき、教師と田島の間で次のような発話があった。

91030Ｔ　:（前略）これを何倍したら、この 1.7 になる？田島さん、これ何倍？

91031 田島 : 170 倍。

91032Ｔ　: 170 倍、でいいか？170 倍、ね。（中略）田島さん、どんなふうに計算した？この 170 出すとき…。

91033 田島 : 1.7÷0.01。

田島は教師との発話から図 17 に示した表の縦の対応に着目し、x^2 と y の値を比較した。計算方法を 91033「1.7÷0.01。」と答えていることから、縦の対応関係を 170 倍と捉えられたのである。こうして、x^2 を約 170 倍すれば y が求められることに気づき、$y = 170x^2$ と定式化することができた。変化の特徴を２乗倍で捉え、対応の決まりを比例定数 170 に集約して洗練されたモデルへと発達させたのである。

その後、この式を表の代わりに利用して代入計算などを行ったことで関数の式が持つ有用性を理解し、今回の課題解決に最も適していることを子どもは実感した。

８．考察

実験を起点としたモデリングにおいて、次のような子どもの思考過程が見られた。

第１に、モデリング過程には逆行や往復、飛躍があり、このときに関数的な見方や考え方の伸展があった。つまり、具体的な事象に戻り数値的に捉え切れないときには表やグラフの見方を変えるなど素朴なモデルの自己発達が見られ、これが関数的な見方や考え方を伸展させていたと考える。

第２に、モデリング過程を何度も繰り返すことで定式化に至る過程の隔たりを埋めていた。つまり、モデリング過程を繰り返すことで、図 14、16、17 のような素朴なモデルの洗練が起こり、その度に数学的結論も積み重ねられている。そして、積み重ねられた数学的結論で解釈・評価・比較が行われた結果、事象の数値的な捉えの可能性が少しずつ広がりながら定式化へ辿りついていた。

第３に、洗練されたモデルから素朴なモデルに戻って課題を解決する場面が見られた。これは、洗練されたモデルの意味を子ども自身がまだ十分に捉え切れていないからである。例えば、線香の実験における山口の課題５に対する活動では、素朴なモデルへ戻ることで洗練されたモデルの意味をより鮮明に捉えることができ、洗練されたモデルで事象を解決できるようになっていった。このように数学的モデルの段階を往復することで、より関数的な見方や考え方が形成されるのである。

以上のように数学的モデルを素朴なモデ

ルと洗練されたモデルの２段階に設定することで、数学的モデルの内的な変化として、子どもの思考過程を捉えることができた。

９．おわりに

今回の関数の学習過程の分析を通して、実験を原動力としてモデリング過程を何度も踏む過程において、逆行や往復、飛躍が数多く含まれていた。そして、その過程で数学的結論が積み重ねられていき、関数的な見方や考え方の形成につながることが分かった。したがって、子どもの活動では、実験を起点として具体的な事象に基づいたモデリング過程を繰り返すことが非常に効果的となるのである。

今後は、数学的モデルの見方をより精緻に捉えることと子どもの認知過程をより詳細に明らかにしていくことを課題とする。

＜引用・参考文献＞

福森信夫ほか 36 名．(2001)．数学２年．啓林館．

Gravemeijer, K．(1993)．*Modelling two －digit addition and subtraction with an empty number line.* Primary education．(pp. 51～61)．

Gravemeijer, K．(1997)．Mediating between concrete and abstract．In T.Nunes＆P.Bryant(Eds.), *Learning and Teaching Mathematics : An International Perspective* (pp. 315－345)．East Sussex:Psychology Press.

一松信ほか 29 名．(2001)．中学校数学２．学校図書．

池田敏和・山崎浩二．(1993) 数学的モデリングの導入段階における目標とその授業展開のあり方に関する事例的研究．日本数学教育数学会誌第 75 巻，pp. 26～32．

磯田正美．(1987)．関数の思考水準とその指導についての研究．日本数学教育学会誌，69（３），pp. ２～12．

林弘．(2000)．中学校における関数指導に関する研究－事象からモデルを構成する活動を重視して－．上越教育大学大学院修士論文．

樋口禎一・細川尋史・池田敏和．(1998)．数学の才能を育てる．牧野書店．

桐山眞一．(1998)．中学生における関数の理解に関する研究－一次関数を事例として－．上越教育大学大学院修士論文．

文部省 (1998)．中学校学習指導要領．財務省印刷局．

文部省 (1999)．中学校学習指導要領解説－数学編－．大阪書籍．

三輪辰郎．(1983)．数学教育におけるモデル化についての一考察．筑波数学教育研究第２号，pp. 117～125．

森田俊雄．(1991)．算数・数学教育の新展開－局所的な数学と思考実験－．東洋館出版社．

中島健三．(1981) 算数・数学教育と数学的な考え方－その進展のための考察－．金子書房．

大澤弘典．(1997)．中学校における数学的モデリングの指導についての研究－生徒によるグラフ電卓の利用を視点として－．上越教育大学大学院修士論文．

ポアンカレ．河野伊三郎訳 (1902)．科学と仮説．岩波書店．

相馬一彦．(1993)．数学教育における「予想」の意義．第 26 回数学教育論文発表会論文集，pp. 193～198．

高橋等．(2003)．数学的知識を創発させる教材開発．今こそ Do Math！．上越数学教育研究会Σ会著，pp. 45～54．

高橋等．(2003)．子どもの算数・数学的活動を大事にする，湧き出させる．上越数学教育研究第 18 号，pp. 31～48．