上越数学教育研究，第21号，上越教育大学数学教室，2006年，pp.81-94.

中学校数学における証明の正当化に関する研究

灰　野　　　仁
上越教育大学大学院修士課程２年

１．はじめに

文部省(1999)は，図形指導の意義として図形の概念形成と性質の理解及び，論理的な思考力の育成の二点を挙げている。これらを受けて，証明を取り上げることを中学校数学の大きな特徴としている。生徒は小学校で，操作的な活動や直観的な取り扱いを中心とした図形学習を行っている。中学校では帰納，類推，演繹の方法について，それぞれの違いを自覚し，必要な場面に応じて適切にこれらの方法を用いることができるようにすることを指導の大きなねらいと位置づけている。文部省(1999)は，数学的推論について以下のように記述している。

> 一般に帰納や類推は，具体的経験に基づいてより一般的な法則を予想し発見していく大切な方法である。しかし，帰納や類推によって導かれた事柄は必ずしも正しいとは限らないこと，また，その事柄が正しいことを確かめるためには，演繹の方法が必要であることを理解できるようにする。
>
> （文部省，1999，p.41）

国立教育政策研究所(2003)の調査は，生徒の半数以上が三角形の合同を述べる証明ができないことを報告している。筆者もこれまでの教職経験の中で，証明に対して困惑する生徒の姿を度々目にしてきており，なぜ証明ができないのかを疑問に感じていた。記述の仕方に重点を置いた指導を行った結果，証明を「三角形の合同を示すこと」と安易に捉える生徒が出てきた。一方，「パズルを解くようでおもしろい」と前向きに捉える生徒も少数ではあるがいる。生徒は何を根拠に命題の正しさを見出し，証明を如何なるものと捉えているのか。

そこで本研究では，証明の導入段階において，帰納的な理由付けに重点を置いてきた生徒が証明をどのように正当化するかを明らかにし，証明の授業改善に向けての示唆を得ることを目的とする。

２．証明指導の問題点と証明の捉え

2.1.証明指導の問題点

杉山(1986)は，中学校における証明指導において問題とされることとして，「証明がわからない」生徒がかなりいることを挙げ，その原因について，「証明の必要を感じていない」「証明の必要性がわかっていない」ことを指摘している。この指摘（杉山(1986)）に関して，筆者も自身の教職経験の中で感じてきたことである。例えば，三角形の内角の和や二等辺三角形の底角定理を学習する場面で，「正しいとわかりきっていることをなぜ証明するのか」といった言葉を発する生徒を度々目にすることがあった。

國宗(1987)は，図形の論証の指導が中学校数学科の授業において重要な位置を占めているが，この内容を理解するのに大きな抵抗を示す生徒が多くいることを問題視している。さらに，論証の意義理解に関する調査から，

多くの生徒が実験・実測による方法と演繹的な証明による方法とを並列的に捉えていることを明らかにしている。

2.2. 先行研究に見る証明の捉え

文部省(1999)は，証明について以下のように記述している。

> まず，命題の「仮定」と「結論」をはっきりさせる。そして「仮定」から出発して，すでに正しいと認められている事柄を根拠にして，「結論」を導くこと，それが証明である。
>
> (文部省,1999,pp.89-90)

多少の語句の違いはあるにせよ，現行の六社の教科書（教育出版，学校図書，啓林館，東京書籍，大日本図書，大阪書籍）の何れも，証明については上記のように記述している。

秋谷(1974)は，「証明」と「論証」の言葉の違いを以下のようにまとめている。

> 論証(demonstration)は論理学上の言葉で，その起源は遠くギリシャ時代に始まり，その意味は，広義では与えられた判断（提題または結論）に対して，その真である根拠を提供することである。この点は、証明(proof)と一致する。一般的立場では直面する対象（結論）に対し，その疑わしさを一掃し，誰でも認められるものとするために，その成立する拠り所を見出して行こうとする態度で，結論から前提（根拠）へとさかのぼる形をとる。
>
> (秋谷,1974,pp.6-7)

秋谷(1974)は，論証という語の歴史的変遷を辿り，数学に関する限りにおいては証明と論証は同義と見て差し支えないと結論づけている。

Balacheff (1988)は「証明」という語を以下のように規定している。

> フランス語と同様英語では，数学において二つの単語が同義であるとして使用される。
>
> 　証明(フランス語で：preuve(証明))と数学的証明(フランス語で：démonstration(論証))。
>
> 区別されるべき異なる段階を見えなくさせてしまうため，実際にこの習慣は我々の研究に障害をきたしている。したがって我々は，以下の区別で更新することを提案する：
>
> －我々は，他の誰かに対して命題の正当性を確立することを目指す個人的な対話を*説明*と呼ぶ。説明の正当性はそれについて明確に表現する話し手と最初は関連している。
>
> －我々は，与えられたときにその共同体によって受け入れられる説明を*証明*と呼ぶ。
>
> －我々は，数学者によって受け入れられた証明を*数学的証明*と呼ぶ。今日では，数学的証明は，対話としての特定の構造を持ち，論理学者によって形式化された，きちんと定義された規則に従っている。
>
> (Balacheff,1988,p.2)

命題が正しいことを伝えるという視点で証明を見たときに，そこには「誰に対して」という，伝える対象を考えなければならない。

杉山(1986)は，proofとdemonstrationの意味を考察することを通して，証明に二つの意味があることを述べ，証明の目的としてある命題が真であることを示すことの他に，要素を分析することを挙げている。要素を分析する視点で問題と証明を振り返ったときに，証明の中で使われる構成要素と，使われない構成要素があり，使われない構成要素の部分を変えてみても，結論に変わりがないことを述べている。ある命題が真であることを示すことは，demonstration の意味に基づいており，要素を分析することはproof の意味に基づいているとしている。

2.3. 討論への着目

杉山(1998)は，図・記号・文字を用いて書き示すことができるという証明の特徴が数学にとって重要な意味を持つとして，ある命題の真・偽に関する対話的状況と文字によって書かれた証明とを比較している。杉山(1998)は，読解という作業がなくて済むことや，日常的な身振り・手振りを取り入れることが書

くことよりも容易であることを挙げ，対話的状況下の証明の方が理解が容易であるとしている。

赤(1988)は，数学を文化の中で重要な位置を占めるものと捉え，文化の理解には数学の性質の徹底した究明が必要であることを述べている。この中で赤(1988)は，証明の起源は古代ギリシアにあり，他の地域では起こらなかったことを述べ，証明の成り立ちに目を向けることで，証明本来の姿として，他者との対話や討論が根本に根付いていることを示唆している。

2.4.証明の説明の機能

de Villiers(1990) は，これまでの研究においては証明の機能を，数学的命題の確かさについて立証するものという一面しか見てこなかったことを指摘している。de Villiers (1990)は更に証明の機能を分類する中で，命題が真であることを表す機能としての立証と，なぜ命題が真であるかの洞察を与えてくれる機能としての説明とを明確に区別している。

Hanna(1995)もde Villiers(1990)と同様に証明の機能に着目し，１からｎまでの整数和を例に挙げ，証明するための証明と説明するための証明の二つを区別している。この中でHanna (1995)は，一般的に用いられる数学的帰納法は定理が真であることを示すが，説明的な価値を持っていないとしている。

> 一方，説明のための証明は，以下のようなその和の二つの表現の対称性に基づくことによって，なぜ真なのかを示すことができた。
>
> $$S = 1 + 2 + \cdots + n$$
> $$S = n + (n-1) + \cdots + 1$$
> $$2S = (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1)$$
> $$= n(n+1)$$
> $$S = n(n+1)/2$$
>
> この定理の他の説明的証明は，１からｎまでの整数の，直角二等辺三角形，あるいは階段状の面積による幾何的表現に根拠づけられる。
>
> (Hanna,1995,p.48)

Hanna (1995)は，説明するための証明は，定理が真であることを示すのに加えてその理由も示すことができ，同時に疑いをはらすものにもなっているとし，これら二つを見分けることは重要であると述べている。

３．証明の正当化についての理論的視点

3.1.正当化に関する先行研究

熊谷(1998)は，理由付けをすることや証明をすることが算数・数学教育において重視されてきたことに触れ，教師と子ども，子ども同士の間でなされる理由付けの過程を正当化と呼んでいる。証明の導入場面で三角形の内角和や二等辺三角形の底角定理について，生徒は小学校での経験をもとに「必ず180°になる」とか「必ず等しくなる」という考えを主張する。この姿は，熊谷(1998)が述べている自分の考えの正しさを主張しようとしている姿である。尾崎(2003)は，経験的な事実・証拠に基づく正当化を経験的な正当化と呼び，論証と同様にどうしてそうなるのかという主題を議論する上で重要な生徒の係わりであると捉えている。

Balacheff(1990)は証明の定式化について，教師の指図によってではなく、命題の妥当性に関する生徒間の討論から生じ得る本質的な必要性によって正当化されなければならないと述べている。

これまで筆者が行ってきた証明指導は，この生徒の正当化を認めずに，形式的な証明へと無理に移行させようとしていたのである。経験的な正当化を軽んじていたことで，生徒はいきなり証明に移行するよう求められていると感じ，証明に対して拒否反応を示していたと考えられる。

ラカトシュ(1976)は，数学が思索と批判，証明と論駁によって改良され，成長していく様子を，架空の教室でのやりとりの形で示している。「オイラーの定理」を題材に，生徒が反例を考えたり，その反例に耐えうるよう

に新たに立体を定義し直す活動を通して，証明を作り上げていく姿を描いている。生徒たちは，一方では自分の推測の正当性を主張しようとし，他方では相手の主張の不備な点を指摘し合っている。ラカトシュ(1976)はこの姿を通して，証明が何を前提とするかで変わり得ることを示そうとしている。証明を他者に対する説明（理由付け）と考えた場合，定式化はその説明をより簡潔に達成するための手段となる。つまり，証明授業においては，先ずは他者を説得する説明として証明の意味を押さえた後，定式化（記述）に進むよう段階を設ける必要がある。自分一人がわかったからよしとするのではなく，他者と合意が出来るかということが証明の可否を決定することになる。また，他者から反論が出された場合，それを踏まえて更に説明しようとすることで，生徒の中により説得力のある説明を考え出す必要が出てくることが期待される。この行為そのものが証明の意味を生徒自らが構成することとなり，教師から強要されたからではなく，自ら必要感を持って証明へ移行することが期待できる。

関口(1992)は，特に論駁に注目し，証明と論駁の関係について以下のように述べている。

> 伝統的数学においては，証明と論駁とは互いに背反する関係とされる。即ち，証明された命題は論駁されず，論駁された命題は証明されない。しかし，教室ではそのような明快な関係は必ずしも維持されなかった。
>
> (関口, 1992, p34)

関口(1992)は，この現象について，議論に参加している者達が，お互いに違った枠組みを持って論じていることを理由として挙げている。中学校で初めて証明を学習する生徒であれば，たとえ論駁されたとしても，その根拠に対して正当性を認めないうちは，さらに反論しようと試みるかもしれない。そのことがより明確な根拠付けに向かうのであれば，むしろ学校数学においては，論駁を大事にすべきである。命題をどのように正当化するかについては，生徒自身の判断基準によって決められることが望ましいであろう。提出された論駁に対して更に，論駁する行為が生徒から起こることも考えられる。自分の考えを変更することは，生徒にとって簡単なことではない。自分が提出した論駁で，他者が考えを変更してくれる姿が見えれば，生徒にとっては大きな充実感を味わうことも出来るだろう。個人内で証明を捉えるという考え方では，他者を説得する証明の機能を充分に理解できないと考える。ここに討論を取り入れることの価値があると筆者は主張したい。

3.2. 証明の正当化についての理論的視点

金山(1997)は，生徒が証明とは形式的なものであると捉えていることに問題意識を持ち，生徒の証明の捉え方の変容を目指した研究を行った。金山(1997)の目指していることは，学級の合意作りとして証明を捉えさせることである。

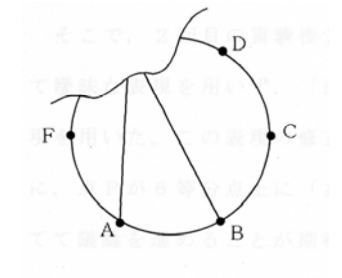

図１　金山の問題場面
(金山, 1997, p. 147)

金山(1997)は，右の図１のような問題場面を設定し，破れている円周上に点Ｐを仮定している。∠ＡＰＢの大きさを求める方法を考えさせ，更にその解法を他者に説明するよう求めている。金山(1997)は，討論を喚起するための課題の要件として，多くの解法が見いだせることを挙げている。多くの解法があることによって，他者に対して自分の考えを受け入れさせるために討論が活発に行われることが期待されると述べている。例えば，図１において点Ｐの位置を，他のＡからＦの点と同様に円周の六等分点と見て考えた解法や，六等分点ではないと考えた解法が出されることになる。多くの解法があることで，生徒がどの解法を選ぶ

か選択の余地が生まれることになる。自分の解法と他者の解法を比較し，どこに違いがあるか，それを認めるか否かという判断基準は生徒に与えられることになる。

筆者はこれまでの証明指導の中で，仮定・結論が明記されている証明問題を見て，生徒が何を明らかにすればいいのかについて困惑する姿を目にしてきた。これは結論が明示されていることによって，素朴な疑問が生じないためであると考えられる。結論が明示された命題を証明させるのではなく，まずは結論部分を生徒に推測させる問題を与えることにより，金山(1997)の主張のように，生徒たちは主張の妥当性を判断するようになることが期待できる。

Hadas et al.(2000)は，幾何学ソフトウェアを用いた動的な幾何学環境において，矛盾や不確実性を与える二つの問題場面を設定し，生徒が演繹的説明を行うようになったことを調査している。矛盾のある問題場面としては，多角形の内角の和と外角の和を求める場面を取り上げている。内角の和が，辺の数が増加するにつれて大きくなっていることを確かめた後で，外角の和について推測させている。

一方，不確実性のある問題場面としては，三角形の合同を考える場面を取り上げている。辺と角の全６個の要素の中で，４個の要素が等しくても合同にならない場合があり，６個の等しい要素を持った非合同な三角形が作図不可能であることを調べた後，５個の要素が等しくなる場合について生徒に推測を立てさせている。学生はそれぞれの問題場面において，幾何学ソフトウェアを用いて実測や図形の変形を行い，自分たちの立てた推測について調べている。

Hadas et al.(2000)は，学生達の応答を分析し，以下の五つのカテゴリに分類している。

①説明のないカテゴリ
②帰納的な説明のカテゴリ
③部分的に演繹的な説明のカテゴリ
④視覚的変化を説明するカテゴリ
⑤演繹的な説明のカテゴリ

直観的に判断し意見を述べる説明のないカテゴリから，演繹的な説明をするカテゴリまで，生徒の応答は様々である。Hadas et al.(2000)の研究は，生徒二人組の中で出てきた応答を分析している。これをクラスという集団の中で発表しあえば，様々な角度から意見が出されることが期待できる。生徒は，以前の学習内容と関連づけて推測を立て，理由づけているとHadas et al.(2000)は述べている。自分の立てた推測の正当性を示すために説明しようとする生徒からは，「なぜ証明するのか」という言葉は出てこないであろう。問題場面に矛盾や不確実性を含ませ，推測を立てさせることによって，生徒がその推測の正しさを主張するため，何らかの理由付けを行うことが期待できる。

４．教授実験の分析と考察

4.1.教授実験の概要

教授実験は，2005年６月２日から７月８日の間に，新潟県の公立中学校の２年生１クラス２６名を対象にして，図形の調べ方の単元の計１３時間を実施した。対象クラスは，数学の授業のために通常の２クラスを３等分して編成されたうちの一つである。この単元は証明の導入段階にあたるため，まだ生徒は帰納的な方法で理由付ける状態にある。他者との意見交換の場を設定し，そのように考えた理由を明らかにするよう働きかけることにした。他者の意見を聞き，自分と同じ考え方に対して同意したり，対立意見に対して「なぜか」という疑問を持つことにより，説明・説得の必要性を感じるであろうと考えたからである。全１３時間の中で，理由付けをしている場面は以下の七カ所である。

・多角形の内角の和を求める。(第1・2時)
・対頂角が等しくなる理由を考える。(第3時)

・平行線の同位角・錯角が等しくなる理由を考える。(第4時)

・三角形の内角の和が180°になる理由を考える。(第7・8時)

・多角形の外角の和が一定である理由を考える。(第9時)

・角の二等分線の作図手順の理由を考える。(第12時)

・分度器を使わずに等角を移す方法を考える。(第13時)

これらの場面において，生徒が何を根拠に理由づけているかを，発話と学習プリントの記述を中心に分析する。あわせて，他者の説明を聞いた生徒がどのように考えが変わったかについても，その様子を分析する。尚，分析およびプロトコルにおける生徒の名前はすべて仮名であり，Ｔは教師，Ｓｓは複数の生徒，Ｓ？は特定できない生徒を表している。

4.2. 各場面の分析

4.2.1. 多角形の内角の和を求める場面

第１時の導入場面において教師は，多角形の内角の和を求めるに当たり，まずは「三角形」という図形の特徴を挙げさせている。当初，生徒から出された意見は，三角形を構成している辺や角といった要素の個数に着目したものであった。この後，生徒Ｋｄのつぶやきによって，要素への注目から内角の和へと考察の視点が変わることになる。内角の和が180°であることについては，生徒は以下のように説明している。

01161　Ｔ　どうやって求めたか教えてください。

01162　Ｈｈ　正三角形の180°わる３で，一つの角が、60°になって…

01170　Ｔ　ええとね，ではＡｋ君。

01171　Ａｋ　分度器で，３つの角を測った。

三角形の内角の和が180°であることに対して，誰も異論を唱えることはなく，小学校での学習経験をもとに帰納的な方法により正当化している。

正しさの根拠として生徒が挙げたのは，小学校での学習経験に基づく”知識”であった。

対象として考える図形を，正三角形・直角三角形や正方形・長方形といった特殊な図形（図２，３参照）を例に挙げて考える生徒が多く，正しいことを確かめる方法としては，全員が実測を考えていた。

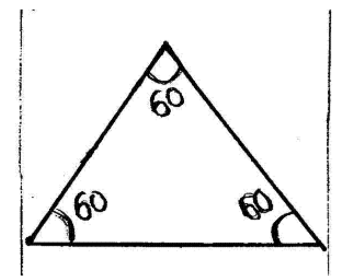

図２　生徒Ｗｙの書いた三角形

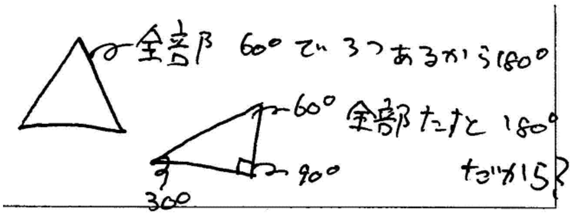

図３　生徒Ｏｒの書いた三角形

現実的な対象と方法を考えている生徒に対し，教師は実測で求める方法を認めた上で，対象図形の頂点の個数を極端に増やし，五十角形での実測場面を生徒に想像させている。実際問題として想像させることで，三角形や四角形くらいなら測ることも簡単と考えていた生徒にとっては，五十個の角という場面が非常に困難な状況設定となったと考える。

第２時では，前時に引き続き，多角形の内角の和について考察する課題を提示した。実測をしないで多角形の内角の和が求められるかを考える前に，前時の確認を行った。三角形の内角和が180°，四角形では360°になることを確認したところ，生徒Ｓｙは早々と五角形の内角の和の数値を口に出した。

02022　Ｋｎ　え，180°ずつあがっていく。

02026　Ｋｎ　和が増えていく。

02031　Ｔ　三角形と四角形だけでそう思ったか。

02032 Ｋｎ　（頷く）

02041　Ｔ　五角形は540°，これはどっかでやったんですか？どっかで勉強した？

02042 Ｓｙ 多分。

02045　Ｔ　五角形は540°っての私知ってますよって人，はい。（挙手の動作）

02046 Ｓｓ （挙手）

02047　Ｔ　（生徒の人数を数えて）ほー，半分，半分いくかいかないか位。ちょっと待ってくださいね，そうすっと六角形（板書），六角形だとじゃどうなりそう？

02048 Ｓｙ 720°。

生徒Ｋｎが三角形，四角形の内角の和から見出した，和が180°ずつ増加することについて，生徒Ｓｙは学習済みのことがらであることを述べている。また，他の生徒も五角形の内角の和が540°であることを，既に知識として有していることが覗える。

対象とする図形が，前時の三角形・四角形に続き，五角形・六角形へと移ってしまったため，生徒Ｋｄから再び実測による確かめ方をよしとする考えが出されてしまう。クラスとしてもそれを受け止めることとした。ほとんどの生徒の測定値に誤差が生じる結果となった。生徒が当初自分たちの述べた数値と実測値があわないという事実を踏まえ，教師は再度角の数と内角の和の間に関係があるかどうかを問い直している。それに対して，生徒Ｋｄはすかさず「ある」と断言している。教師は前時の「頂点の個数が多くなると実測は大変になる」ことに加え，「測り違いが出てくる」というデメリットを強調し，改めて実測によらない確認方法について考えるよう提案する。

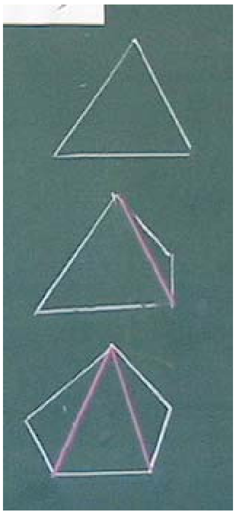

図４　生徒Ｋｄの説明

生徒Ｉｔが180°という数値を，三角形の内角の和と見ることができると指摘したことをヒントに，生徒Ｋｄはクラス全体の前で180°ずつ増加することを図４を黒板に書き，次のように説明した。

02238 Ｋｄ えっと，三角形一個が180°なので。

02239 Ｋｎ あぁ，そう言うことか。

02240 Ｋｄ ２つあると360°になって，で四角形になって，３つあると540°で五角形になります。どうですか？

02241 Ｓｓ （拍手）

この後，教師は多角形の角の個数，分割される三角形の個数と，内角の和を対応させるための表（図５）を書き，多角形の角の個数と分割してできる三角形の個数を考えさせている。

図５　内角和の対応の表

生徒らは，角の個数から２を引くことで，分割してできる三角形の個数を見出すことができた。実測の際に角の数が大きくなると，面倒であると捉えていた生徒たちも，表を用いて角の数と分割してできる三角形の個数の間のきれいな関係を見ることで，例えたくさんの角を持つ多角形でも，実測しなくとも内角の和を求められると認めるようになった。

4.2.2. 対頂角が等しくなる理由を考える場面

第３時では，二本の折れ線が交わっている図と，折れ線と直線が交わっている図を先に与えた後，二直線が交わる図（図６）を提示した。前の二つの図に比べて，二直線が交わる図においては等しい角ができることが直観的にわかりやすい。生徒Ｋｎの「同じ角が二つある」という発言は，何の異論もなく他の生徒に受け入れられている。

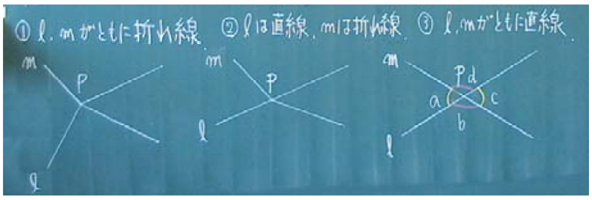

図６　折れ線，直線の交わっている図

対頂角が等しくなることの理由を，生徒Ｍｋや生徒Ａｋは「折れ線がないから」「直線だから」と表現している。直線は真っ直ぐという生徒Ａｋの発言から，真っ直ぐである二直線の交わりの時だけ等角ができることを直観的に理解していることが伺える。生徒は，折れ線と直線の違いに着目し理由付けをしている。これらの説明は「平角」を意識しておらず，問題場面の違いを述べている状態である。

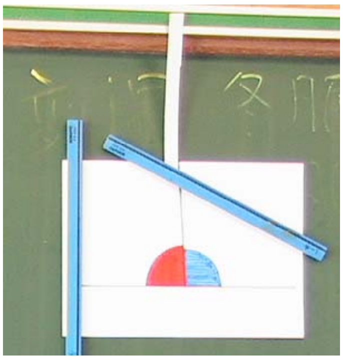

図７　平角についての動的な教具

生徒はそれを上手く表現できないため教師は動的な教具（図７）を提示した。この教具は，一直線上に二つの角（赤と青に着色）が見え，中心のタブを動かすことにより，一方が大きくなると他方が小さくなって見えるものである。

03092　Ｔ　わかりません，そうですか，残念でした。じゃあちょっと聞きますよ。ホントに君たちわかってないとは私は思わないんですけど。（教具を指して）赤い角，青い角今名前つけてないですけどねぇ，赤と青，足したら？

03093　Ａｋ　180°。

03096　Ｔ　180°？これもうちょっとずらしますよ。（教具を動かして）これでは？

03097　Ｓｓ　一緒，180°（複数の発言）

03100　Ｔ　180°？あ，そう，もうちょっとずらそうか。（更に教具を動かし）はい。

03101　Ｓ？　180°。

03102　Ｔ　180°？180°だって人はい。（挙手の動作）

03103　Ｓｓ　（ほとんどの生徒が挙手）

教師は動的な教具を用いて，一直線上に隣り合っている二つの角の和に着目させている。さらにそれを動かすことによって，個々の角の大きさが変わっても，和として見ることによって一定の値になることを生徒に見出させている。生徒は，三角形の内角の和が180°であることに加え，平角が180°であることを根拠として認め，対頂角が等しくなることを正当化することができた。

4.2.3. 平行線の同位角・錯角が等しくなる理由を考える場面

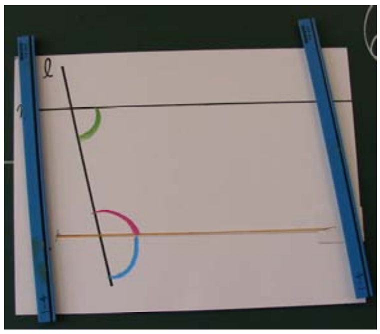

図８　同位角・錯角についての動的な教具

第４時では，同位角・錯角を取り上げた。

第３時と同様に教師は動的な教具（図８）を提示して，三角形の内角の和に着目させている。この教具は下の線の部分が輪ゴムを延ばしたものであり，左端は固定されている。ゴムの右端を動かすことで，直線ｌに交わっている二直線が平行である状況と平行でない状況とを連続的に提示することができる。

生徒が目に見える状態で三角形を確認した後，教師は教具を動かしながら三角形が見えない状態であっても，平行でなければいつか交わることで目に見えない三角形（図９）を想起させている。

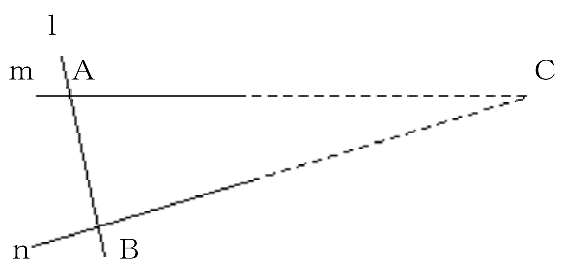

図９　目に見えない三角形ＡＢＣ

04175　Ｔ　角としては？
04176　Ｋｄ　小さくなっていく。
04177　Ｔ　小さくなっていくってのが分かる人。（挙手の動作）
04178　Ｓｓ　（ほとんどが挙手）
04181　Ｔ　それが１０メートル，２０メートル或いは１００メートル，１キロ先までずーっと延ばしていけば，どんどん，どんどん，もっともっとちっちゃくなる。だけども，それがある瞬間これが平行になった，瞬間にこの角はどうなる？
04182　Ｓｙ　なくなる。
04183　Ｔ　なくなる，なくなる。なくなるってことを，何で表そう，大きさを表現しようとしたら。
04184　Ｋｄ　ゼロ。

生徒は教具で平行線が示される直前までは目に見えない三角形を認めていた。平行になった瞬間に，三つの角のうちの一つ（図９の三角形の∠Ｃ）が「ゼロになる」と捉え，残り二つの同側内角の和が180°になることを認めた。ここまでで生徒が正当化するときに用いる根拠は，三角形の内角の和が180°であることと平角が180°であることの二つの命題だけであった。当初等しくなる場合がないと推測を立てた生徒Ｎａは，教師による教具の提示と他の生徒の理由付けにより，授業後の感想には「理由がわかった」と記述している。

4.2.4. 三角形の内角の和が180°になる理由を考える場面

第７時で改めて三角形の内角の和を取り上げた。これまでに正しいと認めてきている命題であるため，教師は生徒から「なぜわかりきっていることを改めて説明するのか」といった反論が出されることを予想していた。三角形の紙を三つの紙片に切り分け，並べ替えるという操作を取り入れたため，生徒はその操作を通して三つの角が一直線上に並ぶことで和が180°になることを正当化した。

学習プリントの上で作業した何人かの生徒は，もとの三角形と離れている所に三つの角の紙片を並べていた。（図１０）

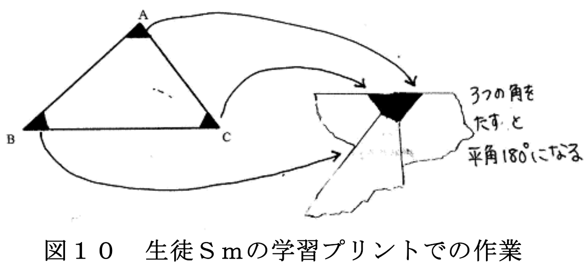

図１０　生徒Ｓｍの学習プリントでの作業

教師の予想に反して，生徒からは特に反論が出されなかった。これは，三つの角の紙片を並べれば，その順序に関係なく一直線上に並ぶことがわかりやすかったためと考える。第３時で，一直線上にできる角が180°であることを，「平角は180°である」と表現することと学習して以来，生徒が度々根拠として取り上げてきたことである。この知識が徐々に定着してきたことにより，生徒は実測に頼ら

なくとも内角の和が180°であることを正当化するようになった。教師はもとの三角形と関連づけさせるために，三角形の一つの角の両脇に他の二つの角の紙片を並べて見せ，何か気付くことないかと問を発する。

07074　Ｔ　これ見て何か気がつくことない？
07077　Ａｋ　錯角。
07078　Ｔ　立って言ってください。
07079　Ｋｎ　あぁ，あぁそうか。
07080　Ａｋ　（起立して）錯角です。
07081　Ｔ　どれ？
07082　Ａｋ　緑と緑（の角）。
07083　Ｔ　緑と緑が。
07084　Ａｋ　あと，青と青（の角）。
07085　Ｔ　青と青が？錯角で？
07086　Ａｋ　ある。

三つの角の紙片が一直線上に並ぶことで，和が180°になると納得していた生徒に，教師は一つの角を三角形に固定し，他の二つの角をその両脇に並べてみせた。これにより，生徒Ａｋは同色に塗られた角の紙片が錯角の位置関係にあることを見出し，平行線を意識するようになる。

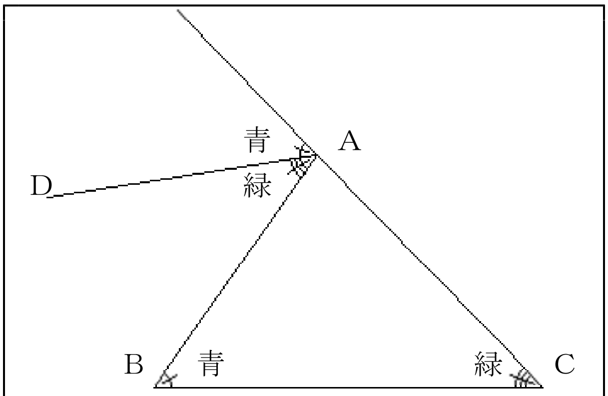

図１１　生徒Ｔｋの誤った角の紙片の並べ方

その後，紙片の他の並べ方を求めたときに，生徒Ｔｋは同色の角の紙片の位置関係を誤って並べてしまう。（図１１）

生徒Ｔｋは青の角は錯角，緑の角は同位角であるとし，一直線上に三つの角の紙片が並んでいるから和は180°になると表現した。生徒Ｔｋの発表においては，底辺ＢＣと直線ＡＤが平行になることは意識されておらず，先の生徒Ａｋの発表した並べ方とは違う並べ方を発表しただけであった。生徒Ｓｙは生徒Ｔｋの表現が角の紙片の並び方と一致していないことを指摘し，次のように修正意見を述べて見せた。

07151　Ｓｙ　えっと，緑と青を逆にして。
07152　Ｔ　おぉ。
07153　Ｓｙ　そうすれば，青と青が錯角になって，錯角になって，で緑と緑が同位角になる，から。
07154　Ｔ　だから？
07155　Ｓｙ　その青と緑が，青と緑の角を逆にすればいい。

これは並び方と表現の一致を目指す論駁であり，生徒Ｔｋは生徒Ｓｙの指摘を受けて，自分が発表した紙片の並べ方を訂正するに至った。

4.2.5. 多角形の外角の和が一定である理由を考える場面

第９時では多角形の外角の和を取り上げた。教師は内角の和との対比を通して，生徒に推測を立てさせた。教師が与えたヒント，09023Ｔ：要は頂点の数，角の数が増えれば増えるほど，内角の和ってのはどんどん増えていくんだっていう性質のものでしたね。，を受けて，半数以上の生徒が角の個数が増加するにつれて外角の和も増加すると推測した。

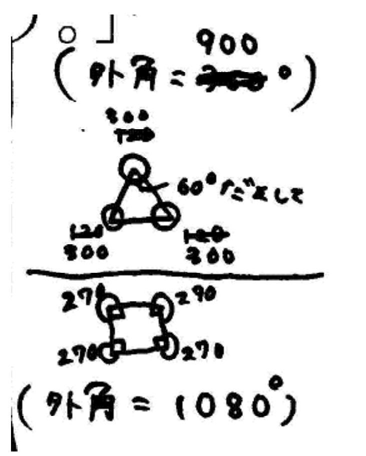

図１２　生徒Ｈｈの記述

また，生徒の中には外角の定義を取り違えているため，誤った角度をもとに外角の和が

増加すると推測した者もいた。生徒Ｈｈは，360°から内角を引いた残りを外角と見て，正三角形と正方形を例に挙げ，和が増加すると記述している。（図１２）

生徒Ｗｋは，外角の和が一定であることの理由を，いくつかの図形を書き，適当な数値を仮定して考えている。その中の一つの正三角形を例（図１３）に挙げて，一つの内角を60°と仮定した上で説明を行った。具体的な数値を用いてはいるが，生徒Ｗｋの説明は平角が180°であることを根拠に用いている。

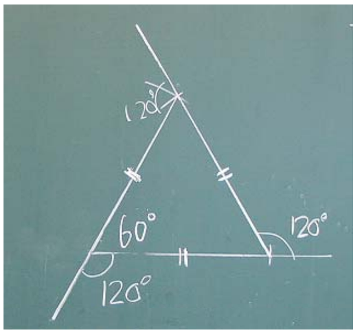

図１３　生徒Ｗｋの説明

生徒Ｗｋの説明を受けて，当初外角の定義を取り違えていた生徒Ｈｈは，正しく外角を捉え，外角の和が変わらないことを見出している。（図１４）

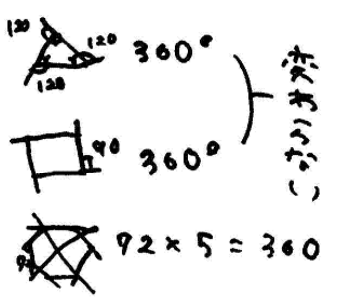

図１４　生徒Ｈｈの修正図

さらに生徒Ｈｈが，この正方形を例に挙げて説明したことで，三角形と四角形では外角の和が変わらないことが明らかになる。生徒Ｗｋが正三角形，生徒Ｈｈが正方形という特殊な図形でしか説明していないことを受けて，教師は改めて生徒に問いを投げかけると，生徒Ｓｙは，「全部，外角の和は360°」と発言し，当初の自分の推測を修正している。

生徒Ｓｙが学習プリントに記入した説明の図（図１５）では，一般三角形において内角の和が180°であることと，平角が180°であることを根拠に用いて外角の和が360°になることを表している。生徒Ｓｙは学習プリントに一般三角形を書いていることから，特殊な図形を離れ，より一般的な三角形で外角の和が360°になることを理解していると見ることができる。

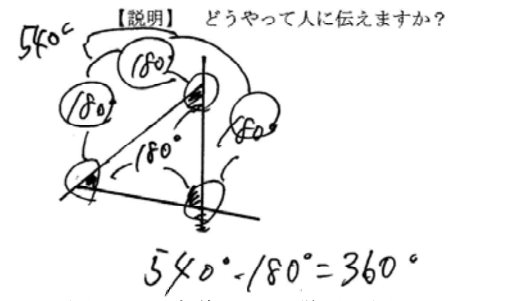

図１５　生徒Ｓｙの説明の図

他の生徒も，三角形と四角形の外角の和が360°になることから，一般多角形でも外角の和が360°になると推測を修正した。ｎ個の角の場合でも，平角ｎ組の総和から，内角の和を引いた差が外角の和になることを認め，全員が外角の和が360°であることを理解するに至った。

4.2.6. 角の二等分線の作図手順の理由を考える場面

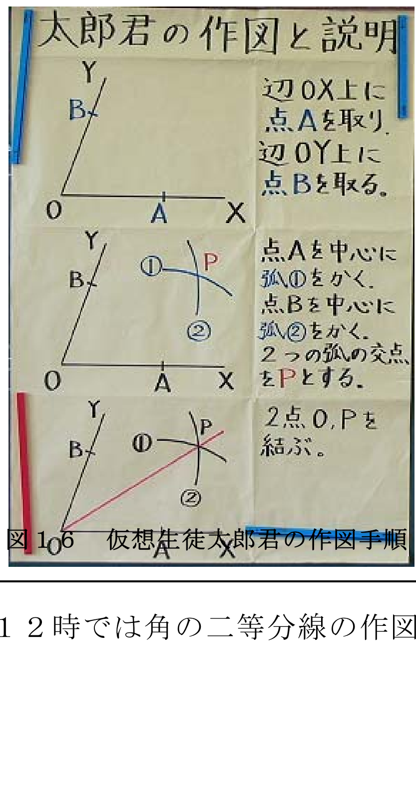

図１６　仮想生徒太郎君の作図手順

第１２時では角の二等分線の作図手順を取

り上げた。生徒は１年生で学習しているため，教師は説明する状況として仮想生徒の誤りを指摘するような課題（図１６）を設定した。誤った手順を修正することを通して，正しい手順によって合同な三角形を作図していることを生徒が見出すであろうと予想したためである。生徒はコンパスを用いて，誤った手順を修正することはできた。教師は対立する意見に説明させようと考え，「太郎君がこれでいいと言ったらどうする」という問いを与えている。

生徒は１年生での学習経験をもとに，修正することが正当化の対象となっている。ところが教師が求めているのは，修正手順の根拠を正当化することであった。ここでは正当化の対象が共有されなかったため，推測の対立は起きていないと解釈できる。

12287 Ｓｙ それが正しいやり方だから。
12288 Ｔ それが正しいやり方，何で正しいってわかるんですか？
12289 Ａｋ 決まっているから。
12290 Ｔ 何で決まってるってわかるんですか？
12291 Ｓｓ 学校で。教科書で。（複数の生徒から同時に発言）
12293 Ｓｙ 学校でやったから。
12295 Ｋｄ 教科書に書いてあるから。
12297 Ａｋ 国の法律で決まっているから。

生徒は最終的にどうしても自分たちの主張の正しさを伝えようと，教科書や１年生で指導してくれた教師の権威に頼った反論を提示することとなった。本時の途中から，生徒の反応が想定したものを超えてしまい，そのズレをどう埋めるかに対して教師のゆとりがなくなっている。生徒は確実に教師の発問に対し答えようとしている姿が随所に見られるが，教師が生徒の考えを受け入れられる状態になっていなかったため最後までズレが埋まることはなかった。

4.2.7. 分度器を使わずに等角を移す方法を考える場面

第１３時では前時の反省を踏まえて，１年生での学習経験がない課題「分度器なしで等しい角は作れるか」（図１７）を提示した。

図１７　第１３時の導入課題

前時と異なり，生徒間で推測の対立が生じることとなった。分度器を用いないという道具の制限によって，分度器でしか角度は確認できないと考える生徒と，分度器以外のものに理由を見出そうとする生徒の間で両者にとって不確実な状態となったと解釈する。作図できないと推測した生徒は，おおむね以下のような発言をした。

13018 Ｔｋ 分度器なしだと無理だと思う。
13022 Ｏｒ 多分無理だと思う。
13026 Ａｋ 正確じゃないと思う。
13030 Ｋｎ 分度器を使わなければできない。
13032 Ｓｋ 同じ角を作ることを考えることができなかった。

作図できると主張した生徒たちは，同様の考えの生徒同士で意見交換を交わしながら自分たちの主張を作り上げている。生徒Ｏａが作図する場面では，同じ主張の生徒の中でも，作図の仕方が一致していなかった姿を見ることができる。また，一旦発表した手順を対立する生徒に納得してもらえなかったことを受けて，さらに根拠を確実にするため，自分たちの手順を修正する姿も見られた。単に納得できないという反論であったが，相手を納得させようと考えていた発表生徒たちにとっては，自分たちの主張を見直す働きをするには十分であった。

13208 Ｋｄ ここの，長さ。
13209 Ｔ ん？

13210 Ｋｄ この，同じ所の長さを，こっちとこっちを同じにして。

13211 Ｔ んっ？どことどこ？

13212 Ｋｄ だから，ここ(図１８①)と，このここ(図１８④)が３センチなら，こっち(図１８②)も３センチにして，(図１８③の)長さ確かめてここ(図１８⑤)も３センチにして(図１８⑥の)長さ確かめる。

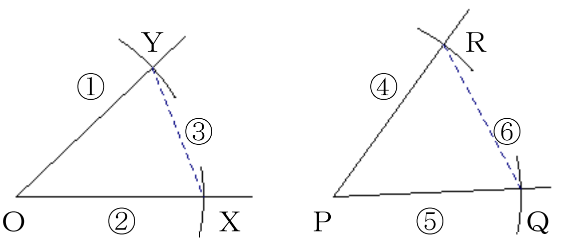

図１８ 生徒Ｋｄの説明の図

13213 Ｔ わかった？わかった，聞こえた？これが等しいことを確かめるために，例えばだよ，今Ｋｄ君が言ったのは，まぁここ３センチだったら，こっちも取るんだっけ？ＯＹとＯＸの上にそれぞれ３センチ３センチの場所まず取るんだって。で同じ様にＰＲとＰＱの上にも３センチ３センチの場所取るんだって。でここの３センチ３センチの点を結んだ線分と，こっち結んだ線分が，同じ，であれば，何？

13214 Ｋｄ 合同、等しい。

生徒Ｋｄが代表して発表した手順は，最初は具体的な長さ（例として「３センチ」と表現）を設定したものであった。この手順では，線分ＯＸ，ＯＹ，ＰＱ，ＰＲをすべて同じ長さに仮定し，線分ＸＹとＱＲの長さが同じであると言えれば，∠Ｏと∠Ｐが等しくなるという内容である。生徒Ｋｄは合同を意識している様子が窺えるが，他の発表生徒はまだ理解していない様子が見られた。この様子を見て教師は，発表生徒たちに，最初に生徒Ｏａが行おうとした作図手順を見直すよう指示した。生徒Ｋｄの発表した手順と，生徒Ｏａが行おうとした作図手順は，線分ＯＸとＰＱを等しくしようとしていたことに気付いた発表生徒たちは，コンパスを使うことで，数値に依存せずとも等しい長さを取れることを根拠に手順を修正するに至った。

第１０時で多くの生徒が認めた，三組の辺をそれぞれ等しくした三角形が合同になることをもとに，作図できないと主張していた生徒たちも修正手順を認めることとなった。

５．まとめと今後の課題

本論文では，子ども自らが証明をどのように正当化するかを明らかにするためにその意味づけについて考察し，それを基に教授実験を計画・実施し，その分析・考察を行った。その結果，証明の本来の意味には，他者へ説明するという社会的な意味が含まれていることがわかった。授業の中に討論を位置づけることにより，生徒たちは主張の妥当性を判断するようになり，主体的に説明を構成することが期待できる。特に，命題の正否に関する推測が対立する課題においては，帰納的な方法によらない説明での正当化が顕著に表れてくるため，課題の要件としては，結論部分を生徒に推測させること，あるいは問題場面に矛盾や不確実性を含ませることで推測の対立が引き起こせることが挙げられる。

本論文では，証明指導の導入期を迎えた生徒を対象にして教授実験を行った。生徒たちは当初，帰納的な正当化により命題の正しさを主張していた。実測に誤差が生じたことで帰納的な正当化の短所に注目し始め，正確な主張のために，直近の学習内容と関連づけて説明する演繹的な正当化を認めるようになった。このことは，証明の基本的な意味づけとして，他者へ説明することと位置づけることが可能であることを示している。

一方で，今回の正当化の根拠として生徒が用いたのは，三角形の内角の和が180°である

ことと，平角が180°であることがほとんどであった。証明され真とみとめられた命題が増えていくにつれて，当然生徒が何を根拠に挙げるかについての選択肢は増えることになる。これ以降の単元においても，生徒が何を根拠に正当化するかを探り，他者にどのように説明するかについてその様相を探っていくことが今後の課題として挙げられる。

〈引用・参考文献〉

Balacheff,N(1988).A Study of Pupils' Proving Processes at the Junior High School Level.The Joint International Conference of the 66th NCTM Annual Meeting and Second UCSMP International Conference on Mathematics Education.Chicago.pp.1-19

Balacheff,N(1990).TOWARDS A *PROBLÉMATIQUE* FOR RESEARCH ON MATHEMATICS TEACHING.Journal for Research in Mathematics Education.21(4).pp.258-272.

de Villiers(1990).The role and function of proof in Mathematics.Pythagoras.24.pp.17-24

Hadas et al.(2000).The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments. Educational Studies in Mathematics.44.pp.127-150.

Hanna(1995).Challenges to the importance of proof.For the Learning of Mathematics.15,3.pp.42-49.

秋谷照之助.(1964).論証の基礎的考察－論証指導の問題点について－.日本数学教育会誌.第４６巻.第９号.pp.6-14.

福森信夫他.(2001).数学２年.啓林館.

平岡忠他.(2001).中学校数学２.大日本図書.

一松信他.(2001).中学校数学２.学校図書.

金山光宏.(1997).生徒の証明のとらえ方の変容を促す証明指導の研究.上越教育大学大学院修士論文.

熊谷光一.(1998).小学校５年生の算数の授業における正当化に関する研究.－社会的相互作用論の立場から－.日数教会誌数学教育学論究Vol.70.pp.3-38.

國宗進.(1987).「論証の意義」の理解に関する発達の研究. 日数教会誌数学教育学論究Vol.47,48.pp.3-21.

国立教育政策研究所.(2003).平成１３年度小中学校教育課程実施状況調査報告書－中学校数学－.ぎょうせい.

ラカトシュ.(1976).数学的発見の論理－証明と論駁－.(訳：佐々木力).共立出版.

文部科学省.(1999).中学校学習指導要領（平成１０年１２月）解説－数学編－.

尾崎誠.(2003).数学の授業における議論の生成に関する研究.中学２年「文字式を利用した論証」の授業を例にして.上越教育大学修士論文.

ポリア.(1954).いかにして問題をとくか.（訳：柿内賢信).丸善.

ポリア.(1959).帰納と類比.(訳：柴垣和三雄).丸善.

ポリア.(1959).発見的推論.(訳：柴垣和三雄).丸善.

澤田利夫他.(2001).中学数学２.教育出版.

赤攝也.(1988).数学と文化.筑摩書房.

関口靖広.(1992).数学の教室における証明と論駁の探求.日数教会誌数学教育学論究Vol.58.pp.31-35.

杉山吉茂.(1986).公理的方法に基づく算数・数学の学習指導.東洋館出版.

杉山吉茂他.(2001).新しい数学２.東京書籍.

杉山佳彦.(1998).数学教育における「証明」についての基礎的研究.日本数学教育学会誌.第８０巻.第１１号.pp.2-7.

正田實他.(2001).中学数学２.大阪書籍.