上越数学教育研究，第 21 号，上越教育大学数学教室，2006 年，pp.181-190.

中学校確率単元において生徒が知識を構成する過程について

橋　本　英　明
上越教育大学大学院修士課程 1 年

１．はじめに

中学校における確率単元の学習は、具体的な事象についての観察や実験を通してその内容を理解することである。中学生が確率を求める方法は、二つに大別できる。多数回の試行によって統計的確率を用いて求める手法と、同様に確からしいことに基づいて数学的確率を用いて求める手法である。

確率学習の重要性について、岡部(2005)は、数理科学や日常生活において確率･統計の見方や考え方を必要とする機会が多いことをあげている。また、岩崎(2005)は、現代社会が先行き不透明で変化の激しいことから、確率の概念をある情報から予測される可能性をより的確に判断する合理的な考え方と方法を与えるものとし、今後ますます必要かつ重要な知識となってくることを指摘している。

筆者のこれまでの教職経験では、確率の教授は実験を取り入れた統計的確率から導入し、数学的確率につなげることが多かった。教科書(藤田他，2001，pp.148-164)も、統計的確率から導入された後に数学的確率が定義されている。統計的確率では、試行回数が少ないときは子どもが持っている数学的確率の知識と合致しないので、現実から遊離したものになりがちである。その後に徐々に試行回数を増やし相対度数を計算して数学的確率に近づいていくことを確かめれば、大数の法則により、統計的確率と数学的確率の値は一致する。しかし、授業を終えた後でも、「確率が 1/2 ってどういう意味？ 1,000 回硬貨を投げても、ちょうど 500 回表が出るわけではないのに…」という子どもの声を聞く。このことが示しているのは、統計的確率と数学的確率が一致する根拠が明らかにされないままに、授業は進められており、子どもの確率知識と現象が遊離しているということである。

筆者は実践において、観察や実験を取り入れたり、事象を樹形図や二次元の表を利用して表す工夫をして現実的場面とのつながりを持たせようとしたりしてきたが、その困難さを取り除けないままでいた。それは、授業を進めるにあたり、一人一人の確率に対する考え方やとらえ方を把握していなかったことと、統計的確率と数学的確率が一致することに明確な根拠が示せなかったからである。

本稿の目的は、子どもが確率の問題を解決していく中で、自らの知識を発させながら新たな知識を構成していく過程を明らかにしていくことである。

本稿では、第一に、Realistic Mathematics Education(以下 R.M.E.)理論に関わる先行研究より、子どもが知識を構成していくための枠組みを考察する。第二に、確率教授に関する先行研究から、確率に対して子どもが持っている知識を探っていく。第三に、これまで行ってきたであろう授業を想定し、その授業の問題点を R.M.E.理論の枠組みの中で分析していく。最後に、確率の学習において、子ど

もの心的構成物であるモデルが発達する過程を仮説し、想定授業における問題点を解決しうる具体的な教授の一例を示す。

２．子どもの活動を中心とした授業の構成に向けての理論的考察

２章では、子どもが持っている知識を現実から自己発達させていく活動を重視するR.M.E.理論を概観する。R.M.E.理論はフロイデンタールによる人間の活動としての数学、という思想に根底を置く（高橋,2003）。その理論の中で、鍵となるのは、数学観、数学化、モデルの３つである。

本書は愛と畏敬から生まれた、という序文で始まる Freudenthal,H.（1991）の著書から、氏の抱く数学観を次のように解釈できる。

まず第一に、数学は子どもたちに近いものであり、毎日の生活に関連したものでなければならないということである。また、Realisticとは現実の世界に関連していることのみならず、子どもの心の中で現実的である問題の状況をも意味している。第二に、人間の活動としての数学という考え方が強調されているということである。導かれる再発明の過程として組織化される数学では、数学が発明されてきた過程と類似した過程として子どもに経験されうる。ここで、発明とは学習過程の段階のことを、導かれるとは学習過程における教授的環境のことを意味する。

2.1.R.M.E.理論における数学教育観と他の教育観との比較

Treffers,A.（1991）は、数学教育における四つの方向性、いわゆる、機械的、経験的、構造的、現実的なアプローチのそれぞれの特徴を示すために、水平的数学化と垂直的数学化を区分した。

2.1.1.水平的数学化と垂直的数学化

Treffers,A.（1991）は、水平的数学化と垂直的数学化について、次のように述べている。

水平的数学化とは、到達しうる問題の状況を具体的な認知された世界（絶対的な指標ではなく、相対的なもの）から記号の世界に導くことであり、数学的な意味を伴ってモデル化することである、一方で、垂直的数学化とは、問題のシステムや記号の世界の中での知識やスキルを、認知された構造にすることや拡張することである。（Treffers,A.1991,p.32）

また、Gravemeijer,K（1997）は二つの数学化を次のように区分している。

水平的数学化とは、文脈上の問題を数学化することである、一方で、垂直的数学化は、徐々により形式的な記号化をすることや解釈をする手続きの過程の核である、また、適切な文脈上の問題という水平的数学化は、垂直的数学化を支えているのである（Gravemeijer,K.1997,p.333）。

だが、Freudenthal,H.（1991）は、水平的、垂直的という二つの活動の等価性を気にかけ、この区分を受け入れることを躊躇してきた。なぜならば、水平的数学化と垂直的数学化の区分は、特定の状況、関係する人、及び彼の環境に依存しており、生活の世界と抽象の世界の境界はあいまいであるからである。結局、Freudenthal,H.（1991）は、数学教育の結果を考察することと、数学教授スタイルの特徴を示すことを目的に、この区分を受け入れ、次のように述べている。

水平的数学化とは、*生活*の世界から*記号*の世界に導くことであり、生活の世界では、人は生活し、行動し（そして悩み）、現実として経験する、ところで、垂直的数学化は、記号の世界において記号がつくられ、再構成されることで、操作され、機械的に、反省的に、理解される過程であり、記号の世界ではその抽象に関係している。（Freudenthal,H.1991,pp.41-42）

Freudenthal,H.（1991）は以下のような水平的数学化と垂直的数学化の実例をあげている。

組み合わせ：A と B が３本の道、B と C が４本の道で結ばれているならば、そのとき、B 経由で A から C へとつながっている道は何本になるか？

水平的数学化は、問題の構造を認識することで、手際よく数え上げることで始まる、そして問題の構造を創り出す垂直的数学化で終わる。

他の状況でこの『道のシェマ』を適用することは、水平的数学化、垂直的数学化のどちらでもあり、それはその場合によって決まるであろう。

３と４を文字記号と交換することは、垂直的数学化である。（Freudenthal,H.1991,p.43）

以上の先行研究より、水平的数学化において、数学の世界へ導く基点を、Freudenthal,H.（1991）は生活の世界に置くのに対して、Treffers,A.（1991）や Gravemeijer,K.（1997）は問題の世界に置いていることが分かる。このことは、Freudenthal,H.（1991）が彼らより大きな数学観から現実的な状況をとらえているからだともいえる。水平的数学化は現実の世界における問題や文脈を、数学の世界に導くこと、また、垂直的数学化は数学の世界における問題において、記号化して、形式的に扱っていく過程ととらえる。

Treffers,A.（1991）は、機械的、経験的、構造的、現実的アプローチを水平的数学化と垂直的数学化がある(+)か、ない(-)かによって図 1.のように区分した。

	水平的数学化	垂直的数学化
機械的	−	−
経験的	＋	−
構造的	−	＋
現実的	＋	＋

図 1.数学化と 4 つの方向性（Treffers,A.1991,p.32）

上記の四つの分類について、Freudenthal,H.（1991）は、次のように述べている。

・*機械的*、『伝統的アプローチ』はドリル練習やパターンに基礎を置いており、生徒をコンピュータや機械のように扱う。したがってこのアプローチにおける生徒の活動は、パターンやアルゴリズムの記憶に基礎を置いているように思われる。もし、生徒は記憶したものと異なった問題に直面すれば誤るであろう。このアプローチでは、水平的数学化も垂直的数学化も用いられていない。

・*経験的*アプローチでは、世界は現実であり、そこで生徒には彼らの生活する世界からマテリアルが与えられる。このことが意味するのは、生徒は水平的数学化の活動をしなければならない状況に直面させられているということである。しかし、公式やモデルを取り出すために拡張された状況に促されはしない。Treffers（1991）は、経験的アプローチとは、一般に教授されるものではないと指摘している。

・*構造主義者*、『現代化アプローチ』が基礎を置くのは、集合図や流れ図、ゲームであり、垂直的数学化の類いである。しかし『その場しのぎの』つくられた世界から述べられており、学習者の生活する世界にとって普通であるものは何もない。

・*現実的*アプローチでは、現実世界の状況や文脈の問題が数学学習の出発点となる。その後、水平的数学化の活動によって探求されていく。生徒は、問題を組織化し、問題の数学的な状況を確認しようとし、規則性と関係を見つけるということである。それから、生徒は垂直的数学化を用いて、数学的な概念を発展させる（Freudenthal,H.1991,pp.134-136）。

R.M.E.アプローチにおける長除法の例として、Treffers,A.（1991）は 1128 ÷ 36 の問題を取り上げている。この問題では、「 1128 人の隊員が 36 人乗りのバスで移動します。何台のバスが必要でしょうか？」の文脈を与え、子どもたちに自由に取り組ませる。さて、異なった解法がある（図 2.）。

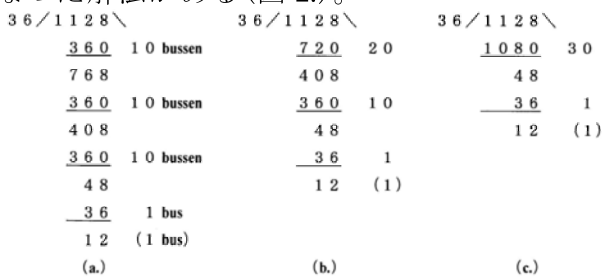

図 2.1128 ÷ 36 の解法レベル（Trffers,A.1991,p.23）

a、b、c は完全な解法であり、ねらいは、すべての生徒がレベル c に完全に到達することである。しかし、誰もレベル b を超えられなかったとしても、彼らは長除法をすることができるのである。計算をしている間、子どもたちは自分自身のために、計算状況の移行に対して、バス問題の現実的状況を頭の中に浮かべられるのである（Trffers,A.1991,p.23）。

R.M.E.アプローチは、子どもに現実的状況を持たせて、学習の行き詰まりを解決していくことができる。

2.2. 数学化

Freudenthal,H.（1991）は R.M.E.理論においてしばしば用いられる数学化という用語について、次のように言及している。

数学化とは、さまざまな影響のもとで、現実が変わり、広がり、進化していく限りにおいては、継続していく過程である。

また、数学化は、公理化、形式化、図式化という用語によって示されてきた。公理化とは、数学の研究領域を再編成しようと試む技術のことである。そして、言語を換え、調節し、変形させせることを通して、言語的な表現をいっそう効率的な記号によって向上させていく過程を、形式化と呼ぶ。さらに、経験や行動を模範的にすることと、法則や規則の中で抽象化することによって、一般化したり、現実に適合するシェマをつくる活動を図式化という。

数学化という用語に対して、これらの説明の中から、三つの構成要素の中の一つに限定することは、一般的ではない（Freudenthal,H.1991,pp.30-31）。

数学化は、活動中における、公理化、形式化、図式化に見られるのである。

2.3. モデル

Freudenthal,H.（1991）はモデルについて以下のように述べている。

モデルとは、複雑な現実や理論が理想化され、単純化された媒介である、その目的は形式的な数学的処理に近づけるようになることである（Freudenthal,H.1991,p.34）。

Freudenthal,H.（1991）は、数学教授・学習の最終目標で、根元的なものは、心的な対象であり、心的な対象がいかに扱われていくのかという過程の結果が、概念であると考える。よって、氏のモデルとは心的構成物である。

当時のオランダ数学教育では、モデルが数学概念や公理系を説明するためのいわゆるトップ-ダウンとなっており、公理から始まる非教授学的逆転であることを、Freudenthal,H.（1991）は次のように批判している。

今日、形式や手続きを解決していくようなモデルとシェマを同一視する傾向がある。シェマという用語は、流行のモデルという用語に、取り替えられてきた。モデルとは、価値ある用語であるが、軽率な使用や誤用によって不幸にもその価値を下げられてきた（Freudenthal,H.1991,pp.31-32）。

Freudenthal,H.（1991）は、不連続な学習過程において跳躍が見られることから、レベルの存在を明らかにしている。氏のいうレベルとは、ファンヒーレの水準理論でいう絶対的なレベルとは異なり、相対的なものである。それは、レベルが特定の状況、人、環境に依存しているからである。

Treffers,A.（1991）は、具体的にモデルとは、教具、スケッチ、状況、図、矢印記号などであると述べ、モデルの特性として強固性、多面性、自然性の三つをあげている。強固性とは、強固なモデルを用いることで、学習に関連した状況の文脈と、形式的で標準化された作業とのギャップをつなげられるということである。また、多面性とは、モデルは問題の文脈に対するモデル（model-of）であり、正式な対象へのモデル（model-for）でもあるということである。さらに、モデルが子どもたちの取り組みに自然に関連付かなければならないことを自然性と捉えている。

Gravemeijer,K（1997）が指摘したことは、構造的アプローチのトップ-ダウンモデルが、抽象的な数学的知識から生まれたものであり、生徒にとっては具体的ではあるものの、抽象的であるということである。そこで氏は、生徒が持っている知識や方略が、数学的知識を発達させていくための基点であるという考え方のもと、モデルの自己発達というボトム-アップアプローチを示した。ここでいうモデルとは、記号や表記を指すというよりは、動的で全体的なものであり、図 3.に示す四つで表わされている。トップ-ダウンモデルが、既成のものとして提示されるのに対して、R.M.E.ではモデルは問題を解決していく際に、子ども自身により開発されていく。

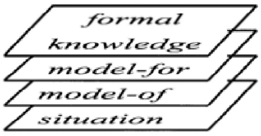

図 3. Models.

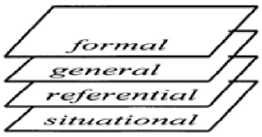

図 4. Levels.

（Gravemeijer,K.1997,pp.339-340）

さらに、レベルというより一般的な用語を用いて、これらのモデルは、図 4.で思考の水準の移行を表した。

situational level ー*状況的レベル*

状況的な知識や方略が、その状況（主として学校外の状況）の文脈の中で、使われる領域にあるレベルである。個人において、状況的な知識や方略を用いて、領域に特有な状況にそれらを適用する。長除法の問題においては、状況レベルは、紙や鉛筆を用いるのではなく、子どもたちがお菓子を分配するような現実生活の活動と結合されうる。

referential level ー*参照的レベル*

主として学校内の教育活動において記述されている状況を参照することに関連したレベルである。状況を特有なものとしてモデル（model-of）として構成する。学校の授業の中で、課題として提示されるようなものに対しての活動。まだ解決過程には至っていない。長除法においては、除法が紙と鉛筆を用いてモデル化されるレベルである。

general level ー*一般的レベル*

参照的レベルで創られたモデル（model-of）が、特性を変えて、状況に特有で、具体的なイメージから独立し、解釈と解決の上で数学的な焦点が文脈の参照を支配する一般レベルである。数学的な関係に気がつき、問題の状況を捉えていた活動を考察の対象（model-for）として焦点が当てられる。長除法では、問題の文脈の状況から離れ、単に数を扱うようになり、取り去ることができる最大の数などが議論の話題となる。

formal level ー*形式的レベル*

model-for の数学的な活動の支援から独立し、人が従来の手続きや表記法を使って作業する形式的な数学のレベルである。形式化された記号や一定の手続き、標準のアルゴリズムを用いて、特徴付けられる。長除法では、最終的な標準アルゴリズムである。

Gravemeijer,K.（1997）は、レベルという用語を用いることで、これらの活動をより一般的に描写することができると述べている。また、氏はレベルを絶対的なものではなく、より高いものに進んだり、低いものに戻ったりできるものと捉えている。

状況的レベルは、主として学校外における現実の世界での活動であるが、実験や観察などの操作的な活動も含むものである。また、数学の活動を授業という文脈からみれば、参照的レベル、一般的レベル、形式的レベルの三つの活動が基本的な枠組みとなる。まず第一に、それぞれの問題における状況を特有なものとして、その状況をとらえるモデル（model-of）を構成していく活動（参照的レベル）である。第二に、問題の状況を捉えていた活動を考察の対象（model-for）へと発展させ、より洗練された知識を構成していく活動（一般的レベル）である。この活動を通して、現実の世界から、数学の世界での活動に発達していく。第三に、自分たちの活動を振り返り、それを形式的な数学の知識へと発展させていく活動（形式的レベル）である。形式的レベルの活動は、数学の問題を数学として解決していく垂直的数学化であるが、ここでの活動は現実と数学の世界をつなぐ文脈の支援という水平的数学化の活動に支えられている。

３．確率に関わる先行研究

３章では、子どもたちが確率に関して持っている知識と、統計的確率と数学的確率における先行研究を検討する。

3.1.子どもたちの確率に関する知識についての先行研究

子どもたちの確率に関する知識について、川嵜（1983）と Fischebein（1999）の先行研究を

手がかりにする。

川嵜(1983)は、確率概念を偶然概念と比例概念という二つの下位概念にあてはめて分析している。偶然概念とは、偶然現象を偶然として認識する能力のことで、必然との関連で理解されるものであり、また、比例概念は、偶然の程度を確率として数量化することに密接に関連する、と述べている。

川嵜(1983)は、確率概念を、偶然現象を多く経験することや学習からの影響を受けながら発達していくものととらえている。このことが示しているのは、子どもは学校で教授を受ける以前から現実の中から確率についての知識が発達していくということである。

さらに、川嵜(1983)は、確率を本来の状況から離れ厳密な分数で表現する教授に疑念を抱き、程度で表せれば十分であると指摘する。この指摘は、現実から確率の知識につなぐモデルが構成されないまま進められていく教授方法への批判と受け取ることができる。

次に、Fischebein(1999)は、確率的な直観は、年齢とともに一般的には発達するのだが、知的なシェマや適当でない(時間軸または原因結果軸の)シェマの影響により、年齢とともに悪くなるものもあるとして、次の二例をあげている。

「3 回コインを投げるとき、少なくとも 2 回表がでる確率と、300 回中少なくとも 200 回表が出る確率の比較」という問題で、この二つの可能性が同じであると考えた被験者は年齢とともに増えている。サンプルを増やせば、大数の法則により、実験による確率は理論上の予測値に近づくので、300 回中の方が 3 回中に比べて少なくなるはずである。ところが、200/300 と 2/3 の値が等しいので、二つの可能性が等しいと答えた被験者は多かった。Fischebein(1999)は、このことを、比例のシェマが個人の推論に影響を及ぼしている例としている。

また、「黒と白が混ざったたくさんの碁石の中から 1 回目に取り出す碁石の色と 2 回目に取り出す碁石の確率」について考える問題では、被験者の中には 2 つ目に何を取り出そうとも 1 つ目を取り出すときの確率が同じであると考える者が学年を追うごとに増えている。誤った直観が引き起こされる原因として、Fischebein(1999)は、直感的な評価の中に因果関係が暗黙のうちに埋め込まれているからであると述べている。

Fischbein(1999)の先行研究から得られる知見を R.M.E.理論の枠組みで考えると次のようにまとめられる。川嵜(1983)が指摘するように、子どもが持っている確率についての知識が、現実の世界とつながったものでないときには、正しい概念形成の妨げになる場合もある。確率を現実から切り離した単なる数値としてではなくて、ボトム-アップされたモデルを介して捉えていくことが大切である。

3.2.統計的確率と数学的確率についての先行研究

統計的確率からの導入による教授法について、余伝ら(1983)は次のように述べている。

余伝ら(1983)は、それまでの確率の指導が数学的確率と統計的確率の概念が別個に導入され、おもに数学的確率に偏る傾向があったことを顧みて、確率空間の概念(確率の実験)を導入した指導実践を試みた。

その確率の実験とは、「いくつかの標識(色)のつけられた玉を一つのつぼに入れ、その中から一つまたは多数の玉を取り出してその標識(色)を観察する」ことである。これはトランプやさいころ等の問題の確率を「つぼ実験」の確率と対応させることで、数学的確率の定義をわかりやすくし、実験における相対度数と確率との関連を図ることがねらいである。

日常の現象をすべて「つぼ実験」という確率空間に置き換えることで、確率の概念の理解が深まった生徒も出た反面、事象を新たなものに置き換える過程の中で文脈が分からなくなる生徒も見られるという結果を残した。

余伝ら(1983)の研究からは、次のことが示された。「つぼ実験」という具体物を与えても、それが子どもにとって普通の感覚ではなくて、また現実的な場面と結びつく心的構成物でないのならば、トップ-ダウンモデルであり、子どもの知識の構成に機能しないということである。言い換えれば、「つぼ実験」による活動は構造的アプローチであり、垂直的数学化はあるものの、現実の場面と「つぼ実験」をつなぐ水平的数学化の活動がない(Treffers,1991)のである。

3.3.確率についての先行研究から得られる視点

以上三つの先行研究から、本稿における問題点と解決に向けて次の視点が得られる。

子どもたちは、確率の教授を受ける前から、確率についての知識を持っている。しかし、その知識は現実的な場面から切り離されて遊離していることもある。よって、確率の教授では、現実的な場面とのつながりを持ちながら、モデルの自己発達の過程を通して、活動として知識を構成していくことが大切であるということである。

4．想定プロトコールからの問題点

４章では、筆者が行ってきたような授業を想定したプロトコールの中から、問題点をあげてみる。

想定プロトコールは、数学的確率と統計的確率が一致することを確認した後で、実際に6の目が出る割合を計算してそのことを確かめる活動を行い、確率の定義をしていく場面である。T は教師の発話、S は生徒の発話である。

想定プロトコール

01T01	さいころを投げたとき、1 から 6 の目で出やすいのってあるかな？
02S01	ないよ。あればいんちきだよ。
03T02	なるほど。1 から 6 の目で、それぞれの目が出ることって同じくらいに期待できるかな？
04S02	うん。
05T03	では、6 の目が出るのは何回に 1 回くらい？
06S03	6 回に 1 回。
07T04	そうね。くり返し何回もさいころを投げれば、6 の目が出る割合はいくつに近づくの？
08S04	1 / 6 。
09T05	それでは、実際にさいころを何回も投げて、6 の目が出る割合を調べてみよう！(実験略)次に、x 軸に投げた回数、y 軸に 6 の目が出る割合を取り、折れ線グラフにしてみよう。(作業略)グラフを見てどんなことが分かるかな？
10S05	投げた回数が少ないときは、割合はバラバラだけど、多くなると割合は 0.167 に近づく。
11T06	0.167 って分数で表わせばいくつかな？
12S06	167/1000。
13T07	それはそうだけど、何か意味はないのかな？
14S07	あっ！ 1/6 だ！
15T08	本当なの？
16S08	だって、1/6 は 1 ÷ 6 で、答えは 0.166 …だよ。
17T09	「さいころを投げて 6 の目が出る」ということがらのように、結果が偶然に左右される経験を行うとき、あることがらが起こると期待される程度を数で表わしたものを、そのことがらの起こる確率と言います。では、さいころを投げるとき 6 の目が出る確率は？
18S09	1 / 6 。
19T10	このように、確率が 1 / 6 であることというのは、同じ実験をくり返すとき、そのことがらの起こる割合が 1 / 6 に近づくという意味です。

想定プロトコールを R.M.E.理論の枠組みで分析すると、場面 1 から場面 4 の四つに分けて、次のように考察することができる。

場面 1 は発話記録 01 〜 08 である。この場面では、さいころを投げるときに 1 から 6 のそれぞれの目の出ることが同様に確からしいという知識をもとに、6 の目が出る割合を試行回数に対して 6 の目が出る回数ととらえ、

確率は 1/6 であるという知識(model-of)を構成する参照的レベルの活動である。場面２は 09 である。実際にさいころを多数回投げて、6 の目が出る割合を現実的な活動の中でとらえる状況的レベルである。場面３は 10 ～ 16 である。場面２における状況的レベルの活動における相対度数の値を、試行回数が少ないときはばらつきがあり多いときは一定の値に近づくことを捉える参照的レベルである。場面４は 17 ～ 19 である。ここまでの活動を振り返って、確率という用語と、統計的確率による定義をしている形式的レベルである。

以上より、筆者がこれまで行ってきた授業で問題なのは、一般的レベルの活動がないことである。一般的レベルの活動がないので、実験等のデータから得られる事実を参照する活動からすぐに、多数回の試行において相対度数が数学的確率の値に近づくという形式的レベルの活動に移行している。すなわち形式的レベルの知識をトップ-ダウンで子どもに与えている。そのような教授の結果、子どもたちの知識は、現実の世界における普通の感覚と結びつかず、遊離している。

５．筆者のとらえるレベル、数学化

これまで述べてきた問題点に対して、筆者の目指す授業を実践するためには、発展的構成を促す一般的レベルの活動を設定しなければならない。そこで確率学習において、Mathematics in Context(Romberg,T.*et al*, 1996)の授業カリキュラムに注目した。このカリキュラムは、フロイデンタール研究所とウイスコンシン大学教育センターとの共同開発によるものである。

5.1. Romberg, *et al*(1996)による確率カリキュラム

Romberg,T.*et al*(1996)によるこのカリキュラムでは、同様に確からしいことに公平さという文脈を与えた後で、子どもが持っている普通の感覚に基づき、確率をことがらの起こりやすさととらえている。このカリキュラムでは、子どもにとって現実である文脈を与えて、活動として確率の知識を構成していくことを重視している。

以下は、統計的確率をとらえていこうとするこのカリキュラムでのおもな発問である。

活動１
・１個のさいころを投げるとき、６の目が出ることは他の目が出ることと同じ程度に期待できますか？
・３０回投げたら６は何回出ると予想できますか？
活動２
・実験。３０回投げてそれぞれの目が出た回数を記録しなさい。
活動３
・あなたが予想した結果と比べて、どうですか？
活動４
・もし投げる回数を６０回に増やしたら、どんなことが起きると思いますか？
・ニナが６０回投げた実験データを見て下さい。１から６の目の出方はバラバラです。ニナの「目によって確率は違うわ」という言葉は、正しいと思いますか？
・さいころを 6 回投げたとき、少なくとも 1 回は 6 の目が出ると思いますか？
・さいころを 20 回以上投げたとき、少なくとも 1 回は 6 の目が出ると思いますか？
活動５
・何回もさいころを投げるとき、6 の目が出る割合は 1/6 に近づきます。
・いかなる次の一投も、何の目が出るかは分かりませんが、実験をくり返せばあるパターンが見えてきます。
(Romberg,T.*et al*,1996,pp.21-22)

この活動を R.M.E.理論の枠組みで見てみると、活動１は、1 個のさいころを投げる状況を参照している参照的レベルである。活動２は、実際にさいころを 30 回投げて、6 の目が出る割合を現実的な活動の中で捉える状況的レベルである。活動３は、自分の予想した結果と現実とを参照する参照的レベルである。活動４は、30 回までの実験から離れ試行回数と相対度数の関係について水平的数学

化の支援を受けて考察していく一般的レベルである。活動5では、活動を振り返る形式的レベルである。

この活動を通して、さいころを投げたときに6の目が出る回数は、子どもが持っている普通の感覚から得られる値から、状況を参照するモデル（model-of）を経て、30 回までの実験から離れて試行回数と6の目が出る割合の関係についての知識（model-for）を構成していく。これらの活動を通して、子どもたちは持っている知識をボトム-アップして、統計的確率の値は試行回数が増えれば数学的確率の値に近づくという知識を獲得する。

また、「タイル図」を用いた次のようなカリキュラムもある。

「タイル図」とは、白いカエルが黒と白のタイルで埋めつくされた部屋に逃げ込んだときに発見される（黒いタイルの上にいる）確率を生徒に考えさせる文脈で与えられる。図5.の最上図の部屋にカエルが逃げ込んだのならば、発見される確率は 4/16 ＝ 1/4 であり、中段図の場合は、6/16 ＝ 3/8 である。これらの活動は、カエルが発見される確率を、タイルの枚数の割合で捉えるモデル（model-of）を構成していく参照的レベルである。

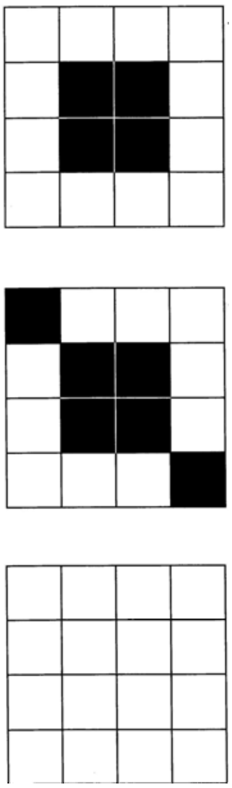

図5.タイル図（Romberg,T.*et al*,1996,pp.14-17）

さらに、最下図を用いた活動では、カエルが発見される確率が 1/2 であることをタイルを黒く塗り表す。この活動におけるタイルは、カエルのいる状況を表すものから、カエルが発見される確率を表わす対象（model-for）へ発展していく。

5.2.筆者のとらえるレベル、数学化

現実的な状況の文脈から始まり、そして、状況を捉える活動から、状況を離れた活動に発展していく水平的数学化の活動を含み、垂直的数学化の活動により、形式的な知識を獲得していく授業が､筆者の目指すものである。「さいころで6の目が出る回数」や「タイル図」のモデルは、川寄（1983）、Fischebein（1999）、余伝ら（1983）に指摘された、状況と形式的な確率の知識をつなぐものになる。

次に、これらの活動を数学化の視点から捉える。レベルにおける活動と数学化の関係を表したのが図6.である。2.2で示したように、

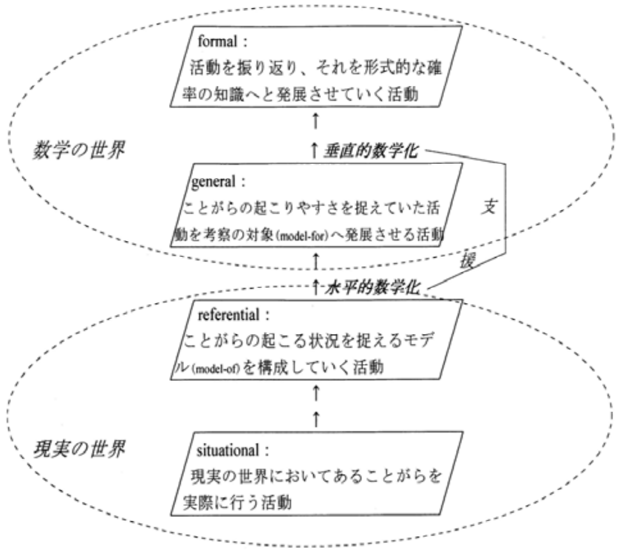

図6.予想される子どもの確率の学習レベル例

第一の状況的レベルでの活動は、主として学校外における現実の世界での活動であり、実験や観察などの操作的な活動も含む。第二の参照的レベルでの活動は、それぞれの問題における状況を特有なものとして、その状況をとらえるモデル（model-of）を構成していく。状況的レベルと参照的レベルでの活動は、状況に依存している現実の世界における活動である。第三のレベルは一般的レベルである。このレベルでは、問題の状況を捉えていた活動を考察の対象（model-for）へと発展させ、より洗練された知識を構成していく活動である。この活動は、現実の世界から数学の世界での活動に発達していく水平的数学化であ

る。第四の形式的レベルは、自分たちの活動を振り返り、形式的な数学の知識へと発展させていく活動である。この活動では、数学の問題を数学として解決していく垂直的数学化であるが、この活動は現実と数学の世界をつなぐ文脈の支援という水平的数学化に支えられているのである。

６．おわりに

本稿では、最初に、子どもが知識を構成していく授業の枠組みとして R.M.E.理論を考察した。次に、子どもが持っている確率の知識と、教授上の問題を先行研究から探った。さらに、筆者がこれまで行ってきた授業の想定プロトコールを作成し、そこでの活動について R.M.E.理論の枠組みのもとで解釈し、新たな視点を得ることができた。最後に、Mathematics in Context（Romberg,T.*et al*,1996）から、確率の授業における教授の問題を解消していく可能性の一端を示した。

得られた知見は二つである。まず、これまで筆者が行ってきた授業では、一般的レベルにおけるモデル（model-for）が不在で確率の知識を子どもたちにトップ-ダウンで与えてきたことである。二つ目は、子どもが持つ知識を基点として、数学的確率と統計的確率をつなぐ教授の一例が示せたことである。

今後の課題は二つある。まず、統計的確率と数学的確率の結び付きとその根拠を明確にしていく活動についてさらに研究していくことである。さらに、子どもの確率概念の実態調査から緻密な単元構成のもと、教授実験を行い、その分析と考察を行うことである。

【引用･参考文献】

岩崎浩．（2005）．中学校確率の発展的教材としての条件付き確率：面白い問題を中心としたその発展過程の再構成．上越数学教育研究, *20*,21-30.

岡部恭幸．（2005）．確率概念の認識に関する考察－確率を対象とする見方を獲得する過程における図的表現－．第 38 回数学教育論文発表会論文集,427-432.

川嵜道広．（1983）．子どもの確率概念の発達についての考察.数学教育学研究紀要,*9*, 西日本数学教育学会,61-65.

高橋等．（2003）．子どもの算数・数学的活動を大事にする、湧き立たせる．上越数学教育研究,*18*,31-48.

藤田宏他．（2001）．*新編新しい数学２*.東京書籍.（pp.148-164）.

余伝宏ほか 5 名．（1983）．中学校数学科における確率・統計教材の開発に関する一つの試み：つぼ実験による確率概念の形成について.日本数学教育学会誌,*65*（9）,218-226.

Fischebein,E.（1999）. INTUITIONS AND SCHEMATA IN MATHEMATICAL REASONING. *Educational Studies in Mathematics*,*38*,11-50.

Freudenthal,H.（1991）. Revisting Mathematics Education:China Lecture. Kluwer academic Publishers.

Gravemeijer,K.（1997）. Mediating Between Concrete and Abstract.In Nunes,T & Bryant,P（eds.）,*Learning and Teaching Mathematics*:An International Perspective（pp. 315-345）. UK: Psychology press.

Romberg,*et al*.（1996）. *Mathematics in Context: Take a cance.* Encyclopaedia Britanica Educational Corpara.

Treffers,A.（1991）. Didactical background of a mathematics program for primary education. In L. Streefland（ed.）, *Realistic mathematics education in Primary School*（pp. 21-56）. Uterecht: Freudenthal Institute/CD-B Press.