上越数学教育研究，第 21 号，上越教育大学数学教室，2006 年，pp. 171-180.

対象とのかかわり合いによる解決の過程の研究

―算数的な表現を通して―

中澤　和仁
上越教育大学大学院修士課程１年

１．はじめに

子どもが問題を解決する時は、どのように考えを進めているのだろう。

一般的に算数の授業では問題があり、子どもはそれを解決するために既習の知識や経験を動員していく。解法や答えのイメージをもってスラスラと解く子どももいれば、与えられた数値をとにかく計算して答えを導き出そうとする子ども、じっと動かずに考え込む子どもなどもいる。

また、解決過程に目を向けると、自分がかいた式や図に対して、消しゴムで消したり、二重線を引いたり、黒く塗りつぶしたりして、別の解法で再度解決を探る子どもがいる。

実際、解決に行き詰まった子どもを見ると、教師は「式はどうなるかな」とか、「図に描いて考えてごらん」とよく言う。

式の重要性については、学習指導要領解説（平成 11 年）にこう書かれている。

「日常の事象の中で見られる数量やその関係などを表現する方法として、図、表、グラフ及び式がある。その中でも式は、事柄や関係を正確に、明瞭に、また一般的に表すことができる優れた表現方法である。」
（p, 58）

確かに、授業では、立式⇒求答という順番で解決がなされる場合が多い。市販のワークテストもほぼ同様な形式になっている。

また、図について、渡邉（1996）は、教師が児童に図をかかせる１つの理由を、「図をかかせることによって、そこから新たな情報を取り出させ、立式させやすくするため」としている。そして、図から情報を取り出し、立式するまでには、「文章問題→状況をつかむ→図をかく→図から新たな情報を取り出す（見つける）→立式する」のような段階を経ることが考えられると指摘している。

これは、図などの算数的な表現が解決に有効にはたらくことを示している。しかし、問題から解決までがあたかも一直線に進むかのような印象も受ける。

子どもの思考過程は、そんなに単純なのだろうか。布川（2005）は、解決過程の中でなぜ問題が解けるのかに関心をもち、解決過程を詳細に分析する研究の重要性を唱えている。そして、解決過程とは、問題場面の理解が変容することで、自分のもっている算数･数学の知識と問題場面との接点を探っていくことだとしている。

本稿では、問題や問題場面を「対象」と捉え、「理解の変容」や「情報を少しずつ収集」、「解決者と問題場面との間の相互作用」などを「かかわり合い」と捉え、子どもが対象とかかわり合う過程に着目する。そして、式や図などの算数的な表現を用いて問題解決する過程についての先行研究を検討し、子どもが対象とどのようにかかわり合っているかについて考えていく。

２．算数的な表現を通しての対象とのかかわり合い

本節では、対象とかかわり合うことと問題解決との関係やそこでの算数的な表現との関連について先行研究を概観する。

2.1.対象とのかかわり合いと問題解決

算数・数学教育において、対象とかかわり合うとはどういうことを意味するのかを先行研究をもとに考えてみたい。

2.1.1.問題意識と「問題」の変容

清水（1987）は、従来の研究では、課題に直面した時の解決者の問題意識が、解決過程との関わりにおいて考察されることが少ないと指摘し、問題意識は獲得され、不変であるという前提に立って主として「解くこと」や「解けるようになること」についての考察が多くなされてきたことを批判している。

そして、「問題」を、課題、解決者、解決過程の３つの要因の相互作用の産物としてとらえ、「問題」が「解決」を規定すると同時に、「解決」によって「問題」が規定されるとした。

清水は、課題の提示によって引き起こされる「困惑の状態」が、解決過程とどのようにかかわるのかを調べる目的で調査を行い、子どもの姿として次の反応を得た。

・解決の中で、<u>より簡潔な解法を発見</u>し、それを用いて解答に到った。(p,19, 下線は引用者)

・そのまま実行すれば直ちに解決に到る手続きを、実行前に述べたにもかかわらず、<u>解決の途中で新たな疑問が喚起されて、正しい手続きは破棄された</u>。その結果得た解答は誤答であった。(p,20, 下線は引用者)

以上のことから、「問題」には、課題提示の時に「困惑の状態」を引き起こすという側面と、解決過程において解決者の問題意識を変えつつ、「問題」自体も変わっていくという側面があるとした。そして、特に後者は、解決過程において「問題」が変容していくという側面であり、従来はあまり考えられてこなかったと指摘している。

そして、次のようにまとめている。

○「問題」を機能概念とみなすことによって、「問題」自体が変容していくという視点を得ることができた。

○「問題」の変容は、問題意識が課題提示のときのみならず、問題解決の全体的過程にわたってかかわっていくことを意味する。(p,21)

解決する側の子どもにとって、「解決」によってそれ自体が変わっていく「問題」は、常に思考の対象になっている。また、前述の子どもの反応として挙げた、「より簡潔な解法を発見」や「解決の途中で新たな疑問が喚起されて、正しい手続きは破棄された」などということは、子どもが対象にはたらきかけ、対象からはたらきかけられるというかかわり合いの末に起こった現象と捉えられる。

こう考えていくと、清水の言う「問題の変容」とは、子どもが対象とかかわり合っている姿と捉えることができる。

2.1.2.問題解決過程における「理解の変容」

布川（2005）は、こう述べている。

「問題場面に算数･数学の知識が結びつくためには、問題場面全体についての適切な理解が必要となるが、しかしそれは一度に達成されるとは限らない。解決過程の途中では、問題場面の一部に関する情報が見出されるといった場合も多いであろう。こうした情報を少しずつ集めながら、問題場面についての理解を深めていくことになる。その意味では情報を継続して見出していけることは、解決にとって重要なことと考えられる。」(p,24)

そして、解決過程は、まず問題把握をし、計画を立てて解決に移り、振り返るというポリアの４段階どおりにはいかない場合が多くあることを検証している。そして、情報を集め、問題場面の理解を深めていくことにかか

わり、これまでの諸研究の知見から次の２点を述べている。

○ 理解の変容や情報の収集は論理的に筋道だった形で着実に進むとは限らない。

○ 情報を少しずつ収集することは､問題場面に対する操作活動を通して促され､解決者と問題場面との間の相互作用を伴うということがある。

布川の言う「適切な理解が必要となる問題場面全体」が対象であり､「問題場面の理解が変容し､自分のもっている算数･数学の知識と問題場面との接点を探っていくこと」がかかわり合いと捉えることができる。これは、思考過程そのものとも言える。

2.2.算数的な表現と問題解決

布川（2005）は、前述の２つ目の知見を説明する際､「例えば」ということで｢図｣を用いて、次のように述べている。

「図をかくことで問題場面の理解が少し変容し､それによりまた新たな図がかかれたり､以前の図が修正され、その図をもとにさらに情報が見出される、といった相互作用が起こると考えられる。」（p,25）

子どもは、難解な問題に出会った時、図などの算数的な表現を通して、問題場面の理解を進めていく場合が多い。本節では、図などの算数的な表現と問題解決について先行研究をもとに概観していく。

2.2.1.書く活動と問題解決

中村（2002）は、書くことと考えることを次のようにとらえている。

「書くことは、考えることと密接な関係がある。問題を考えるとき、式を書いたり、図形に補助線を引いたり、言葉や図をかいたりして、問題の構造を分析する。書くことによって、自分の考えが曖昧なものであっても顕在化され、見直すことができるようになる。そのことが、今自分が考えていることの妥当性を確かめることになる。」（p,5）

また、中村（2002）は、算数の授業における表現として、数式､図､言語の３点を挙げ、次のようにまとめている。

表現	特　　徴
数式	最も多く見られる表現。よさは、どのように考えて問題を解決したかが一目でわかることと、式の形を見直すことによって新しい解決方法が生まれてくること。
図	○などを用いた図、テープ図、線分図、数直線など。図による表現は、子どもの成長によって異なってくる。
言語	書くことによって自分の考えを表出し、自分が何にこだわっているかを自覚することができる。また、子どもが授業中に何をどのように考え、どのように発展させたかを学習感想から分析することができる。

図１　算数の授業における表現

式については、その重要性が前述の学習指導要領解説でも述べられていた。

また、教科書には、問題文とともに、問題文に登場するものの写真や絵があったり､「分ける」や「買う」などの操作がイメージしやすい写真や絵があったり、登場する２量の関係を捉えやすいようにするための数直線やテープ図などがあったりする。

加えて、最近では「総合的な学習の時間」での「書く活動」との関連性を図る意味からも、学習後にその日の学習を振り返って感想を書く時間を確保する事例も見られるようになってきている。

これらのことから、かくことなどの算数的な表現をすることで考えが深まっていくことがうかがえる。これは、書くことと考えることが表裏一体の関係にあることを示している。

また、言語による表現をすることで、解決している子どもが何を対象にし、どのように

かかわり合っているか（かかわろうとしているか）ということを自分で振り返るきっかけをつかむことができる。また、教師は言語化されたものを読むことで、それらを捉えることもできる。

2.2.2.個の認知的変容と数学的表記の役割

日野（2000）は、今までの授業を通しての子どもの活動の分析から、次のように結論づけた。

「授業中に教師によって導入される数学的表記であっても、子どもによる解釈は様々であり、心的道具として自由に操るに至る過程は複雑である。」(p,4)

また、これを「数学的表記の内化の過程」と呼び、３つの相として位置づけ、次のようにまとめている。

相１：初期の使用 ・自己中心的な解釈 ・社会的ゴール達成のための表記を使う
相２：基準の構築 ・表記の意味と規則の認識および表記を問題に適用する基準の構築 ・表記を使うこと自体が主要なゴール
相３：目的的使用 ・適切な場面での表記の選択 ・表記を使うことは二次的なゴール。新しいゴールの生成

図２　数学的表記の内化における３つの相

「内化は、子どもによる極めて構成的な過程である。それは、授業の中で導入された数学的表記に対する解釈の生成と修正を含んでいる。また、子どもがそれまで使ってきている馴染みのある方法と、その数学的表記を使った新しい方法との間のつながりを付けたり、関係を編み直したりすることも含む。さらに、相３での新たな目標の生起に見られるような、行為の中の表記（相２）から<u>思考の対象としての表記</u>（相３）への注意の転換をも含んでいる。」(p,4, 下線は引用者)

下線の「思考の対象としての表記」は、言い換えれば「表記自体が思考の対象である」ということである。つまり、表記を問題に適用したり、表記を使って問題を解いたりする（相２）のではなく、この問題ではどの表記を使うとより効果的か（表記を使うことが主目的ではない）を考えることが重要になってくる。「表記を使った」という子どもの姿は同じでも、そこにどのような思考がはたらいているかということが相２と相３の違いになってくる。この思考のはたらきがかかわり合いと考えることができる。

３．算数的な表現をもとにした子どもの対象とのかかわり合い

日野(2000)は、「数学的表記の内化の過程」を、解決の有無や算数的な表現の使用の有無という結果だけで見ているわけではない。子どもが算数的な表現を用いて、対象とどのようにかかわり合っているかが問題解決において重要なのであるということを指摘している。

本節では、このことに着目したインタビュー形式での子どもの思考過程を探る先行研究を概観する。特に、多く見られる表現である式や図という算数的な表現をもとにした子どもの対象とのとかかわり合いについて述べていく。

3.1.算数・数学の問題解決における図的表現の働きに関する研究

菊池（1996）は、どのような図が、子どもによる問題解決において本当に役立つのかを検証することを目的として、情景図と中間図の有効性について調査を行った。

問題１は、折り紙を２人で不均等（差）に分けるという子ども自身の過去の経験に基づいた操作が可能と思われる問題である。問題２は、ライオンの親子の体重を不均等（倍）に分けるという子ども自身の過去の経験に基づいて直接的に操作できない問題である。

調査の結果として、菊池（1996）は、次の

結論を得た。

＜問題１＞　つるをおるので、きよしさんとあきこさんは、60 まいの色紙を２人で分けます。あきこさんのほうが 12 まい多くなるようにします。それぞれの色紙の数はなんまいになりますか？
＜問題２＞　親のライオンと子どものライオンがいます。２頭の体重の合計は 252kg で、親のライオンの体重は、子どものライオンの体重の３倍です。親のライオンと子どものライオンの体重は、それぞれ何 kg ですか？

○　情景図は、子どもに過去の具体的場面を想起させて現実的な解法をさせたり、非現実的な形式的計算から現実的な解法に移行させたりしている。
○　正答率や子どもによる書き込み、つぶやきなどから情景図の延長のような中間図は、線分図に比べて子どもの構造把握を援助している。

菊池の事例の解決過程を探っていくと、次のような記述がある。ここでは、その記述から、算数的な表現をもとにして対象とかかわり合う子どもの姿を探ってみたい。

「Nami（被験者）は、始め 60÷２という解法を何度か繰り返しているが、途中で 60－12 という新たな解法に自力で移行できていることがわかる。･･･Nami が移行できたのは問題文とは別の振り返ってみる情景図があったためと思われる。」(p,58)

Nami は、始めは「２人の差は 12 でその和が 60」という対象ではなく、その中の一部分である「60 を２人に分けること」にしか着目できなかった。だから、60÷２という式（算数的な表現）でかかわった。その後、30 という数と問題文とがかみ合わないことに情景図から気付き、新たに差の 12 を最初に引くというかかわりをすることで、きよしさんの枚数が得られるということを捉えていった。

情景図や式という算数的な表現を通して問題文にかかわることで、部分から全体へというように対象への見方が変わり、それがもとになってさらにかかわり合っていくことで、解決が進んでいったと考えられる。

3.2. 算数における式をよむ活動

草野（1997）は、石田による「式のよみの捉え方」や倉沢の「式をよむ意義」をもとに、式をよむことを「目的をもって、式を他の表現方法（石田のモデルでいう、「具体的場面」、「操作的教具」、「図」による表現）と関係付けること。」と定めた。

また、草野は、Dörfler の一般化モデルを参考にして、「開始の活動」を重視した実験から次の知見を得た。

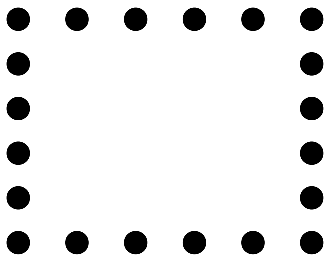
○「開始の活動」と関係付けた式のよみを行うことによって「開始の活動」の反省が促され、そこで、式の一要素に限定した考察を行うことにより、式を数量の関係としてとらえられるようになる。さらに、同じ操作が行えることを通して、式が適用できることの理解が図られる。
○小さい項数における式の数量の関係をとらえ、その関係を一度他の場面に適用することができれば、その後は、式をもとに適用範囲をさらに広げることができる。(p,92)

式を単なる数量の関係として捉えたり、式変形によって求答したりするのではなく、式と「開始の活動」とを結びつけることで、子どもは問題を一般化して捉えられるということである。

これらをさらに考えてみるために、草野（1997）がとりあげている子どもの思考過程を探っていくことにする。

「Natu（被験者）は、解決の段階で、『全体の個数から部分の個数をひけば、周りの個数になる』という関係は捉えられており、『６×６』を『全体の個数』、『４×４』を『中の個数』として見ることはできている。
しかし、１辺が 100 個の場合にこの考えは適用していない。この関係は、１辺が６個

おはじきが下の図のように、縦と横に６個ずつ並んでいます。おはじきの個数の数え方をいろいろな考え方で求めましょう。



の場合の求め方を表した関係であり、１辺の個数が変わっても成り立つ関係であるとは捉えられていない。

Natu は、『６×６』は、『１辺の個数×１辺の個数』として捉えられていることより、１辺の個数が 100 個の場合は、『100×100＝10000』と立式することができた。しかし、中の個数『４×４』の『４』は、実際の図から数えられた数であるため、『１辺の個数－２』とは捉えられていない。そこで、『４』は何を意味しているか、式の一要素に限定した考察がなされる。ここで、１辺が６個の場合の『４個』と同じ部分を１辺が 100 個の図に表すことによって、外側の両端を除いた部分であることが捉えられ、１辺が 100 個の場合は、『98 個』になることが理解できた。」(pp, 90-91)

このことから、Natu は、一気に解決に向かっていくというよりは、むしろ、与えられた数と自分が導き出した数から問題の関係性をとらえ、１辺の個数が中の個数と関連づくといったように部分的にではあるが、少しずつ解決に向かって進んでいったことがわかる。つまり、式という算数的な表現と「開始の活動」を関係付けながら、一要素について限定した追究の末、解決に向かっていったのである。

Natu は、「全体の個数から中の個数を除いた数が周りの個数」を最初から対象と捉えていた。しかし、それは一般化されていなかった。それは、最初の部分の個数は図から数えられた数であったためである。そこで、「開始の活動」の操作に戻り、「４」を求めたことと同じ操作をするというかかわり合いをすることで、「中の個数」を「外側の両端を除いた部分」として捉えられるようになっていった。

ここでの「開始の活動」の反省が促されたきっかけは、式という算数的な表現であろう。また、一要素に限定した考察をするというかかわりを繰り返すことで、対象の見方がより明確になり解決に至ったと考えられる。

3.3. 問題解決における図による問題把握と教師の支援

廣井(2003)は、図をかくことは問題解決ストラテジーに位置付けられているにもかかわらず、子どもが図を道具としてうまく使っていない実態の報告を受け、制約の少ない、心理的に同型性を得やすい「子どもが自由にかく図」の可能性について指摘した。

しかし、学習者が解決の過程で図にどのようにかかわったかについては明らかにされていないとして、研究を進めていった。そして、次の２つを実態として報告した。

- 子どもは、問題の条件を１つの図にまとめることで不整合となっている考えに気付いた。
- 子どもは、計算結果を図に当てはめることで、不整合となっている考えに気付いた。そして、これらの気付きから問題の構造を把握するきっかけを得た。

図による問題把握を探るために、廣井（2003）がとりあげている子どもの思考過程を見てみることにする。なお、廣井が使用した問題は、前述の菊池の問題と同様である。

「真森（被験者、仮名）は、全体の体重に関わる条件と双方の体重に関わる条件を１つの図に表現しようとした。その結果、真森は、全体の体重に関わる条件に対する２つの考えの不整合に気づいた。」(p, 17)

「真森は、全体量を２等分した 126 を図に書

き込んだ。そして、当てはめた数値で計算することで、図の意味付けと計算結果に至る考えの不整合に気づいた。」(p,18)

「綿貫（被験者、仮名）は、２つの図に計算結果を当てはめた。その結果、両者の図を統一的に見るようになった。さらに、図の意味付けを変更し、当てはめた数値で計算することで、図の意味付けと計算結果に至る考えの不整合に気付いた。」(p,18)

これらの記述から、２人の子どもは当初、自分がかいた図と問題や計算結果との不整合に気付き、自分の考えを修正しながら、新たな解決方法を生み出して解決に向かっていることがわかる。「親子の体重の和が 252kg で、体重比が３：１」という対象に対して、全体の体重に関わる条件と双方の体重にかかわる条件を図に表したり、式から求められた数をその図に書き込んだりというかかわりをし、さらに図の意味付けを変更することで対象とかかわり合い、「全体を４で割る」という新たな解法を導き出し、４で割る意味も捉えていった。

４．先行研究からの示唆

以上の先行研究をまとめると、次のことが言える。

○算数的な表現をすることで対象にかかわる機会が増え、対象に対しての情報を得ることが可能になる。また、それにより子どもは、自分の考えを振り返り、深い追究や新たな解決がしやすくなる。

このまとめのベースには、清水（1987）の「『問題』自体が変容」や布川（印刷中）の「問題の捉え方の変化」という解決過程の捉え方がある。

また、同じく清水の「問題意識が問題解決の全体的過程にわたってかかわっていくこと」と言う、かかわり合いの様相によって解決の方向が決まるという考え方も根本にはある。

さて、その情報を得るきっかけになるのが、算数的な表現になる。このことは、中村(2002)の「書くことによって、自分の考えが曖昧なものであっても顕在化され、見直すことができるようになる」や布川の「情報を少しずつ収集することは、問題場面に対する操作活動を通して促される」と合致する。算数的な表現をすることで対象にかかわる機会が増え、対象に関する情報を得ていくということである。

このことについては草野（1997）も、「式の一要素に限定した考察を行うことが、式に表されている事柄や関係を捉える上で有効にはたらいたことを示している」と指摘している。これは、式という算数的な表現によって、全体的な対象へのかかわり合いではなく、対象の一部分へのかかわりを繰り返すことで、少しずつ情報を得ていくということである。

そして、子どもはそこで得た情報から自分の解決を見直したり、振り返ったりする。廣井（2003）は、「計算結果を図に当てはめることで、不整合となっている考えに気付いた。」と述べている。自分の考えを振り返るとは、廣井の言うように、「あれ？」「おかしいな！」という気付きが焦点化されることで対象への見方が変化していくということである。ここでも、計算結果と図という算数的な表現が問題の関係性を捉え直すきっかけとなっている。そうして、問題構造を把握していくのである。

また、菊池（1996）の言う「(かかれた情景図をもとに）子ライオンを１と見て、親ライオンを３つに区切っている。それによって、図の中に‘４’という問題文にも情景図にもなかった新たな情報が示されている。このかき込みをされた図は、構造把握上の進展と捉えることができる。」ということは、情景図へのかき込みという算数的な表現をすることで、子どもは繰り返し対象にかかわり、それにより、問題構造を捉えていくということである。菊池の場合は、その結果、全体を４で割ると

いう新しい解法の発見が可能となっていった。

５．解決過程の重要性

ここで、実際の解決過程に目を向けてみたい。そこでは、今までの自分の思考を捨て（変更し）て、ある時急に意味の捉え直しが行われたり、別の解法に移行したりというような解決場面に出くわすことがある。その１つのきっかけは、先行研究から式や図などの算数的な表現と考えられる。そして、Dörfler の一般化モデルで言う「開始の活動」と式との関連性を図ったり、算数的な表現と問題との整合性を図ったりという対象とのかかわり合いによって解決がなされていくということを草野（1997）や廣井（2003）の研究が示唆している。

しかし、解決過程での意味の捉え直しや解法を変える要因についての研究は十分になされていないのではないか。

草野（1997）の調査では、その場面を次のように書いている。

「そこで、『４×４』の『４』は何を表しているか、式の一要素に限定した思考がなされる。ここで、１辺が６個の場合の『４個』と同じ部分を１辺が 100 個の図に表すことによって外側の両端を除いた部分であることが捉えられ、１辺が 100 個の場合は『98 個』になることが理解できた。」(p,90)

また、廣井（2003）の調査では、その場面を次のように書いている。

「そこで、問題文に立ち返ることで、親子の合計体重を 252 とする考えを生かし、さらに子ライオン３頭と（図 13 の）右側の子ライオン１頭の合計が全体の 252kg になることを理解し、全体を『４』で割るアイデアに到達したと考える。」(p,17)

確かに、算数的な表現をもとに対象にかかわり合うことで、深い追究や新しい解決がしやすくなっている。しかし、草野の場合では、「開始の活動」と関係付けた式のよみを行うと、どうして限定した思考がなされ、外側の両端を除いた部分という意味の捉え直しが起こるのだろう。廣井の場合では、問題の条件を１つの図にまとめ、問題文に立ち返ると、どうして子ライオン３頭と右側の子ライオン１頭の合計が 252kg になることに気付くのだろう。

実は、筆者も菊池が使用した２つの問題と同様の問題を小学６年生に解いてもらう調査をしたが、そこで、次のような意味の捉え直しや解法の移行が起こった。

問題１から問題２に移ってから 12 分 42 秒間、４つの解決場面で多くの式を書きながら考え続けた Mako（被験者）は、深いため息をついた。そして、５つ目の解決場面で一気に式を書くまでの２分７秒間、次のような行動をとった。「首を上げて横に振る」「ペンにキャップをする」「プリントを押さえている左手のひらが汗ばみ、左手を動かした時にベリッと音がする」「ペンのキャップを取るが、動かずに、再度問題文を読み直す」。後で聞くと、その間、次のようなことを考えながら、対象とかかわり合っていたことがわかった。

「最後は、Ｕ先生の言葉を思い出した。Ｕ先生は、算数をやる時、難しい数字が出たら簡単な数に直せばわかるって言ったから、親子のライオンの合計を 20 で考えたら、やり方がなんとなくわかって･･･できた。」

Mako は、「子ライオンの３倍が親ライオンの体重であること」や「子ライオンと親ライオン１頭ずつの合計が 252kg になる」という問題構造は捉えていた。だから、「総和が 252kg で、親子の体重比が３：１」という対象に対して、252 を２や３で割り、次に２や３や 1.5（問題１の計算方法をもとに編み出した３÷２で求めた数）で割って子ライオンの体重を求め、その３倍をして親子の合計が 252 になるかどうかを常に確認していた。

その後、「ダメだなあと思って･･･」、「頭がごちゃごちゃになってわかんなかった」等の事後のインタビューでの言葉から、今までの

解法に一区切りつけたことがわかる。

そして、最終的にU先生から聞いた「数値を簡単にして考える」という数学的ストラテジーを思い出し、全体を 20 として考えを進めていった。

解決後に Mako はこう言っている。

「結局、こんなにいっぱいやっていたけど、たった３本の式（252÷２＝126、126÷２＝63、126＋63＝189）で済んじゃった。今までの苦労はどうだったんだろう。最初から授業のことを思い出せばよかった･･･。」

意味の捉え直しや解法の移行ということで考えたいことは２つある。

１つは、対象とかかわり合う以前の経験である。Mako は後で嘆くような大きな解法の移行を行った。しかし、「数値を簡単にして考える」というストラテジーを用いて考えたようだが、実際は、問題１で求めた解法、つまり、全体を２で割り、さらに差の 12 を２で割り、それを一方にたし、他方から引くという算数的な表現（60÷２＝30、12÷２＝６、30＋６＝36、30－６＝24）をもとにしたかかわり合いを問題２でも適用したのである。解答を導き出した３本の式は、まさに問題１の解法と同じ構造だったのである。Mako は、今までの解決をすべて破棄したようでいて実はそうではなかった。また、新たに「数値を簡単にする」というストラテジーを導入したようだが、全体を 20 とした後の思考は、問題１と同じであった。

Mako の場合、式という算数的な表現が対象とのかかわり合いを促している。また、問題１で解いたという以前の経験がその後の解決においても重要な位置を占めている。

このことは、前述の草野（1997）にも見られる。前述の Natu は１辺が６個のおはじきの問題で４通りの考え方で求答した。Natu は、その２番目の解法である６×６＝36、４×４＝16、36－16＝20 という式が１辺が 100 になっても有用と考えていた。（100 個の場合に使えそうな考えを教師に聞かれ、「じゃあ、２（番目）かな」と答えている）だからこそ、Natu は中の「４」の意味を「開始の活動」と合わせて考察していけたのである。

２人の事例では、２人とも式の有用性はわかっている。それを問題２や 100 の場合にも適用できないか考えていたのである。式はかかわり合いを促していたが、いきなり問題２や縦横 100 個のおはじきの問題が出されたら、Mako や Natu はどのような考えをしたのだろうか。

解決過程での意味の捉え直しや解法の移行には、以前の経験などの要因が関係するのではないと考える。

２つ目は、図や式という算数的な表現同士を関連付けるということである。Mako は解決後の教師の「もう少しわかりやすくかいてって言ったらなんかかけそう。なんかこうパッと見てわかるような･･･。」という言葉に対して、下のテープ図をかいてこう説明した。

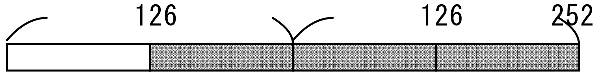


図３　Mako が説明のためにかいたテープ図

「（テープ図を描き、右端に 252 と書く。テープ図の真ん中に縦線を引き）ここが半分だから、（左右の半分のところに 126 と書く）半分にすると、ここ（半分に分けた右側に斜線を引く）にこの半分（左半分の右側の半分）をさらにつけちゃえば（左半分の右側の半分に斜線を引く）、これ（左半分の左側の半分）の３倍になるから。」

Mako は、対象である「総和が 252 で３：１」に合致する数値を得て、説明もできた。しかし、全体の１/４が子ライオンという問題構造までは捉えられていないようだった。つまり、Mako は、全体を２で割り、さらに２で割ったものは、全体の１/４になるとは捉えられなかった。実際、この解決直後に、総和が 255kg で、体重比が４：１の問題を出したところ、

÷５はすぐには出なかった。
廣井（2003）は、「子どもは、計算結果を図に当てはめることで、不整合となっている考えに気付いた。そして、これらの気付きから問題の構造を把握するきっかけを得た。」としたが、この「図に当てはめる」ということが重要になってくるのだろう。つまり、式と図という算数的な表現がそれぞれ単独で対象にかかわるのではなく、それらを関連して対象にかかわり合うことで意味の捉え直しや解法の移行が行われていくということである。
以上のことから、解決過程での意味の捉え直しや解法を変える要因として、対象とかかわり合う以前の経験や、図や式という算数的な表現同士の関連が考えられる。これらのことが、解決過程の追究に必要になってくる。

６．おわりに

本稿では、問題解決の過程で、子どもが算数的な表現を用いて対象とかかわり合うことについて整理した。そして、そう単純ではない解決過程に着目する研究の重要性を示した。
今後も子どもの解決過程をよりていねいに探っていこうと考えている。特に、授業中によく見られる意味の捉え直しや解法の移行などの思考の転機の場面である。そのために、式や図などの算数的な表現に着目していきたい。
ところで、布川（2005）は、解決過程を「解決者と問題場面との間の相互作用」としている。解決者と問題場面が相互に作用し合っているという、そのかかわり合いの様相が解決過程を探る側面になると考える。

引用・参考文献

日野圭子.（1997）.一人の児童を通してみた数学的表記の内化の過程の分析；比例的推論との関わりにおいて（1）. 日本数学教育学会誌, *79*(2）, 2-10.
日野圭子.（2002）.授業における個の認知的変容と数学的表記の役割;「単位量当たりの大きさ」の授業の事例研究を通して. 日本数学教育学論究, 79, 3-22.
廣井弘敏.（2002）.算数の問題解決における図による問題把握を促す教師の支援について.上越数学教育研究, *17*, 113-124.
廣井弘敏.（2003）.小学５年生に見られる図による問題把握.日本数学教育学会誌, *85*(6), 10-19.
菊池光司.（1996）.算数・数学の問題解決における図的表現の働きに関する研究. 上越数学教育研究, *11*, 51-60.
草野　収.（1997）.算数における式をよむ活動についての一考察.上越数学教育研究, *12*, 81-92.
中村享史.（2002）.「書く活動」を通して数学的な考え方を育てる授業.東洋館.
布川和彦.（1995）.「考え方」としてのストラテジーの指導.古藤怜先生古希記念論文集編集委員会（編），学校数学の改善：Do　Math の指導と学習（pp.99-113）.東洋館.
布川和彦.（2005）.問題解決過程の研究と学習過程の探求；学習過程臨床という視点に向けて.日本数学教育学会誌, *87*(4）, 22-34.
布川和彦.（印刷中）.問題の理解と問題場面の理解. 算数･数学教育の新世紀.東洋館.
清水美憲.（1987）.数学的問題解決における問題意識と「問題」の変容に関する一考察.筑波数学教育研究, *６*, 15-22.
小学校学習指導要領解説算数編.(平成 11 年).文部省.p,58.
渡邊一弘.（1996）.算数学習における図的表現についての一考察.数学教育論文発表会論文集, *28*, 295-300.