上越数学教育研究, 第 21 号, 上越教育大学数学教室, 2006 年, pp.21-30.

一つの教室の継続的観察を通してみた アメリカ第７学年の数学授業の特徴

岡 崎 正 和

１．はじめに

近年行われた国際比較調査は，国家間の学力の量的比較の議論に留まらず，国の政策や研究などに様々な影響を及ぼしている。日本では学力低下の議論が加速し，文部科学省による基本方針の変更や学習指導要領の改訂といった，教育史における大きな転換点にもなりうる現象が生じている。また，成績上位国の教育システム（特に PISA でのフィンランド）への関心が寄せられたりもしている（佐藤,2004; 中嶋, 2005）。

筆者は 2005 年１月から７月にかけてアメリカ・テネシー州 Vanderbilt 大学に留学する機会を得て，アメリカの数学教育を取り巻く現状の一端を見聞してきた。2005 年４月に開催された NCTM の年会や Vanderbilt 大学で行われた講演会に参加して感じたことは，今アメリカが変わろうとしていることである。

アメリカに衝撃を与えたのは国際教育到達度評価学会の第３回国際数学・理科教育調査（TIMSS：1995）におけるビデオスタディの結果である。日本，アメリカ，ドイツの 231 学級（日 50 学級，米 81 学級，独 100 学級）の授業（日本では中学２年が対象）が詳細に分析・検討され，その成果は，Stigler と Hiebert の著書「Teaching Gap」（1999）に簡潔にまとめられている。ビデオスタディを通して，日本の授業が数学教育学で述べられてきた知見と最も近い内容であったのに対し，アメリカの授業はそれとはほど遠い内容であったと述べられている。湊先生による訳本（2002）のタイトル「日本の算数・数学教育に学べ」に象徴されるように，日本の授業に注目が集まり，何が日本の授業の質を高くしているのかの問いに答えるものとして，教師集団の自己研鑽システムである「授業研究（lesson study）」に大きな注目が寄せられている。実際，NCTM の年会（Research Presession）における全体講演や幾つかの発表，そして Vanderbilt 大学の講演会は授業研究に関するものであった。しかしそのときの印象は，日本を多少意識し過ぎていたり，形式的に真似ることに議論が片寄っていたりしているということだった。

筆者は，お世話頂いた教授の紹介で，大学近くのミドルスクールにおける一教室の数学授業を継続的に観察することができた。そこで見た授業は，Teaching Gap で語られたアメリカの授業の姿と類似したものであったが，そうした記述には収まりきらない特徴も有していた。本稿は，その授業記録を報告・分析することを通して，観察した授業固有の特徴を明らかにしながら，日本の数学教育の実践に二三の示唆を得ようとするものである。

２．Teaching Gap に描かれたアメリカの数学授業のイメージ

冒頭でも述べたが，Teaching Gap に叙述されたアメリカの数学授業の特徴は，TIMSS ビデオスタディ研究のもと，81 学級の詳細な分析により導き出されており，かなり信頼

ある記述と思われる。その中で，米国の授業は「他の二国（注：日本とドイツ）に比して内容の程度は低く，数学的推論は求められません。教師は用語の定義を与え，特定の問題を解くための手順を演示します。生徒は定義を記憶することを求められ，解法の手順を練習します。米国の場合の標語は「用語学習と手順練習」です」(スティグラー他, 2002, p.40)と述べられ，授業の基本型が次のように示されている(pp.82-83 から一部抜粋)。

「・**既習教材の復習**　授業は宿題の点検，あるいは頭の準備運動的な練習に携わることから始まります。

・**本時問題の解決法の演示**　宿題の点検が終わると，教師は新教材を導入したり既習教材の復習をします。これにはあまり多くない数の例題を提示したり，あるいはその解法を演示します。教師は短い発問・応答を行いながら，演示の各ステップごとに生徒にかかわらせることもしばしばあります。

・**練習**　個別活動が課され，生徒は解決法が示された問いの類題を解くことが求められます。個別活動は，通常個人ごとに行われますが，解答を比較し，お互いに助け合うようにグループで取り組むこともあります。

・**個別活動の検討と宿題を課すこと**　授業の終末に近づくと，個別活動時の問いのいくつかが検討され，時には問題がいくつか加えられていっしょに解かれます。さらに練習問題を加えて宿題として課せられます。」

無論すべての教師がこのように指導している訳でなく，米国の変奏として２つのものが示されている(pp.59-60)。一つは復習をより強調する授業で，教師による援助を含めた個別指導タイプのものであり，他の一つはやはり復習であるが，グループで話し合い，難しい問題を一つ決めて，学級で発表させ，学級全体で話し合うタイプの授業である。しかし後者の場合でさえ，教師が口を挟み間違いを正すことで，話し合いを終了させてしまうこともあるようである。Stigler らはこれら２つを変奏としながらも，いずれのタイプも「用語学習と手順練習」の範疇に入るものであると指摘する(p.60)。

こうした教師の指導は，教師の数学観，すなわち「算数・数学が手順の集合であるという信念と合致」(p.90)していることや，米国流の学習観「教材を小分けにして一つずつ完全に習得させることが数学学習にとって最善である」「混乱や挫折は最小化されなければ」(p.91)ならないとの信念，あるいは「児童・生徒が学習に携わり，注意して聞いていることに責任を持って授業」(p.93)をするという教師の役割に関する信念と整合すると述べられている。さらに上記の信念の帰結として，「個人差は効果的な学習指導の障害」(p.94)という生徒間の個人差に関する教師の信念も挙げられている。OHP を使うことは「生徒が注意して教師の話を聞くべき」という教師の信念と整合し, 能力別編成をすることが「個人差は害である」という信念の点からうまく説明ができるという訳である。湊(2002)は，Teaching Gap で語られたアメリカの授業を，講義式の中に発問・応答が組み入れられる「問答型」の形態と特徴付け，この型での教師は数学を絶対の真理と見なし，子どもとは別の場所に数学があるとする外在的数学観に立つ為，真に子どもの成長を助けるような学習指導が行われないと指摘する。

一方, アメリカ, ドイツと対比される形で，日本の教師は生命論的な立場にたち，問題解決的な授業を組織する素晴らしい能力・信念を持つ実践家として記述されている。この記述は間違いでないにしても，正確さを欠いている感もある。例えば，日本の教師は「個人差は，子どもたちの話し合いや反省のための材料を提供する幅広い観念や解決法を生みだすがゆえに授業にとって有益」(p.94)と考えると述べられているが，習熟度別学習を推進

し，等質集団でこそよりよい学習指導が可能だと考える教師もいれば，問答型の授業を行う教師も数多く存在する。しかも，日本の授業は Teaching Gap に記述されたような「型」に収まるものではなく，より多様な様相を示すという（清水,2006）。アメリカが変わろうとしていることは述べた通りであるが，アメリカの授業にも現在多様な様相が存在するようである（蒔苗,2005）。そうした点に鑑みて，以下ではアメリカのミドルスクールの一教室について，一般的な型とともにより具体的に教材や指導の特徴について見ていきたい。

３．アメリカの授業は本当に悪いのか？ －ミドルスクールの一教室の継続的観察－

3.1. 学校，教師・生徒，教室の概要

筆者は，2005 年２月 22 日から５月 11 日にかけて，ナッシュビル・ダウンタウン近郊の Cherry Park Magnet Middle School（仮名）の一教室における７学年の数学の授業観察を実施した（全 26 回）。マグネットスクールとは，辞書によれば「特定の科目を重視し，広範囲から生徒を集める特色ある公立学校」とあった。数学の授業は同じ時間帯に毎日あり（10:40−11:30：50 分授業），当初は数学が非常に重視された教科編成になっていると思っていたが，一日に１限から７限まで，７つの科目が毎日同じ時間に教えられていたのであった。また，幅広く生徒を集める学校というのは名ばかりで，都会のダウンタウンとその近郊に住む，時には劣悪な環境で育つ黒人の子ばかりが通っている学校であった。

観察したのは，前代数（pre-algebra）の授業で，教師は黒人の若い女性 Mary 先生（仮名）であった。紹介して頂いた大学教授によれば Mary 先生の指導はアメリカの平均的な指導よりは上手な方だということだった。

まず，最初に学校内に入って目についたものはパトカーと屈強な警察官，おそらく生徒によって作成されたお尋ね者の写真と犯罪内容が書かれた作品，一人ひとりに与えられる鍵付きのロッカーであり，アメリカ社会の問題点が見え隠れする。しかし教室に入ってからの印象はがらりと変わり，子ども達はとても人なつこく，日本の子ども達と何ら変わりないという印象へすぐに変容した。

教室は横長の部屋で，大きさが不揃いのテーブルが 10 個ほどあり，一つのテーブルの周りに３，４人が腰をかけて授業を受けていた。教室の前には黒板でなく OHP がセットされていて，教師は基本的には OHP シートに指導内容を書き，スクリーンに投影させた。シートに書かれた文字は特殊な液を吹きかけ布でこすって消すことができ，シートは何度も使用された。OHP スクリーン横にはホワイトボードが３つほど設置されていて，子どもが宿題の解答を書いたり，重要な用語の定義を書き出すのに使われていた。

3.2. 授業観察の日程と授業の基本過程

観察時の授業内容は次の通りである。

- ・第１～２回：文字式
- ・第３～ 10 回：方程式
- ・第 11 ～ 17 回：分数（注１）
- ・第 18 ～ 20 回：平方根
- ・第 21 ～ 22 回：三平方の定理
- ・第 23 ～ 26 回：比例，一次関数，二次関数

授業は毎回，Teaching Gap で述べられた通り，宿題の解答から始まった。教師が生徒を指名し，生徒は白板に解答とサインを書く。そして一人ずつ解答の説明を行い，教師は正解していれば褒め，間違っていれば他の生徒に訂正を求めたりした。このやりとりを見る限り，教師が一方的に解法を押しつけるという雰囲気ではなかったと思われる。これに 10 分から 15 分ほど費やされた。

その後，本時の展開が始まる。Mary 教師はキズネール社が提供する教具をたくさんもっており，グラフ電卓を含めて，毎日何らかの教具を配った。基本的な計算にしろ考え方

にしろ，常に教具を用いた指導が行われた。その具体的内容は，「用語学習と手順練習」という面が色濃いものだったが，教師と生徒のコミュニケーションは日本よりも活発だった（アメリカの子ども達がお喋り好きだったと言った方が正しいのかもしれない。）

授業の残りの数分では，宿題が課された。

このプロセスを逆に辿れば，アメリカの授業の型を説明できるのかもしれない。つまり宿題を毎日課すには，毎日何らかの手続きが指導される必要があるということである。そのため「宿題の解答，手順指導，宿題の提示」という基本過程は，宿題を毎日課すという政策が存在する限り必然的に生じるものであると考えられる。

しかし筆者が観察した授業展開すべてを，用語学習と手順練習という言葉で括るのは難しいと考える。以下では文字式・方程式に関わる内容と，関数に関わる内容について，多少詳しく授業の様子を描写する。

3.3. 文字式，方程式の授業

3.3.1. 観察以前の学習状況について

筆者が観察した最初の授業は，文字式の導入に関する授業であった。しかし教科書によれば（Chapin 他,1999），生徒たちはすでに文字式を扱っていた。つまり，日本のように正負の数の計算を終えてから文字式を導入するのでなく，正負の数の学習以前から演算や数の関係を顕在化する仕方として，文字が教科書に散りばめられていた。例えば加減乗除の計算の場面でも，問題を $x = 4, y = -2, z = -3$ の時に，$x + y$，$10 - z$ の値を求めよ，のように提示することで文字を扱ったり，累乗の計算において数の累乗と文字の累乗を対比させることで，構造の顕在化を図っていた。作業上は「代入」活動が主であり，文字に表すことと数に戻すことが行き来されていた。こうした背景の中で，文字式と方程式の単元が次の場面で導入される（図１）。

3.3.2. 蜂の巣のシツエーション

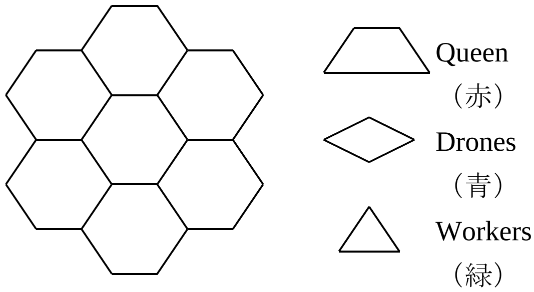

図１：蜂の巣のシツエーション

第１回目の観察時では，パターンブロックが配られ，まず正六角形のブロック７枚で蜂の巣を作り，そこに女王蜂のブロック（六角形の 1/2：赤），雄蜂のブロック（六角形の 1/3：青），働き蜂のブロック（六角形の 1/6：緑）を置いて，蜂の巣を敷き詰めながら，何通りの敷き詰め方ができるかを記録していく活動が行われた（図２）

赤	緑	青	合計
14	0	0	14
0	0	21	21
. . .	. . .	. . .	. . .

図２：組み合わせの表（生徒のノート）

次に，教師は「赤が 12，青が３，合計が 15 の時，緑はいくつか」「赤と青の合計が 16 の場合は，どんな組み合わせか」といった問題を提示する。ここでは，教師は未知数を見つけさせたり，それを表す式を考えさせたり，組み合わせの数を数えさせるといった総合的な活動を仕組んでいた。

3.3.3. 文字式に表す

第２回目の観察授業の主題は，Simplifying Variable Expressions であった。前時の活動からいかに展開されるかを期待していたが，全く違う活動がなされる。「バスケットボールの試合に Cherry Park チームは３台のバスと６台の自転車で，Bass チームは２台のバスと７台の自転車で向かう」という状況が示されるとともに，教具が配られ，「試合に行く合計人数を示せ」という問いが発せられる。

生徒たちは教具を並べ，それぞれのチームの数を図のように表す。

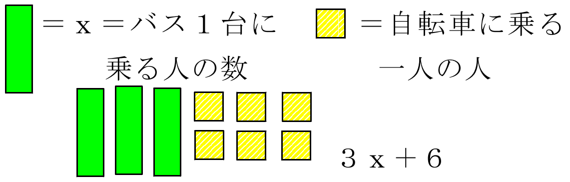

図３：文字式に表す

さらに，３ｘ＋６と２ｘ＋７を表す教具を合わせる物理的な作業を記号操作に翻訳する形で，５ｘ＋ 13 を導出する。ここで教師は，「項（term）」という用語を「文字式の一部」として導入し板書する。例として５ｘ＋ 13 の２つの項が示された。続いて教師は「同類項」，「係数（変数にかけられた数）」「同類項の合併（同じ変数をもつ項を足したり引いたりすること）」を導入し，具体例を示しながら同類項の加減ができるかどうかを生徒とやりとりしながら確認する。

3.3.4. 方程式の学習

第３回から 10 回目までの観察授業では，方程式が指導される。まず蜂の巣の場面に戻り，いくつか等式を作る。例えば「５女王蜂＋７働き蜂＋ 10 雄蜂＝ 22 蜜蜂」「12 女王蜂＋__ 働き蜂＝ 18 蜜蜂」のような式である。

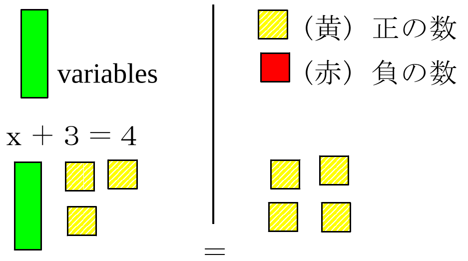

図４：方程式の導入場面

その後，「方程式」「解」「変数」の定義を与える。完全な定義というより，説明を与えたものに過ぎないが，語の意味を明確化して，その語を使って子どもとやりとりする。次に前時と同様に教具を配り，長い棒を変数，黄色の正方形を＋１，赤の正方形を－１と決め，まずｘ＋３＝４の解き方を示す（図４）。

日本の様に，天秤をイメージさせはしないが，教師は「バランスを保つように」両辺から取り去るという説明を入れながら，答えを導いていく。次の問ｘ－３＝４では，「逆算（inverse operation）」という言葉を導入し，正負でペアを作り取り除くという説明を与えた（図５）。一見不親切な説明と，用語のトップダウン的な導入であったが，生徒たちは，具体物を上手に操作し，主に具体物の操作の点から式を作り，答えることができていた。

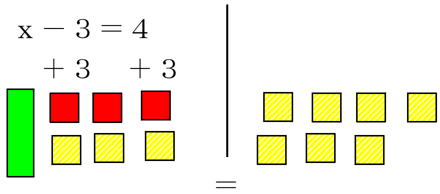

図５：逆算（反数）の導入

４回目の観察では，ｘ － ６ ＝-18，2x ＝-8 のような一次方程式に対して，教具を使って状況を「モデル化せよ（model）」，次に「図に表せ（sketch）」，最後に「解け（solve）」という解決ストラテジーを与え，作業を行わせていた。その後に代数的方法として「両辺を２でわる」のような方法が示されるとともに，逆算という言葉が何度も強調された。この指導法は，第５回目の観察での文章題解決指導で「1. 変数を定義せよ」「2. 乗法を使って方程式を書け」「3. 方程式を解け」というストラテジーが与えたこと，６，７回目の授業で 2x － ３ ＝ ７ のような２ステップの方程式を解くとき，「モデル化」「スケッチ」「解く」という３段階ストラテジーを再び示したことなどに，反復して用いられた。

やり方を示すという点では形式的な指導であるが，常に教具を操作させ，図を描かせ，それらとの対応において式操作をさせるという指導であった。日本では中学１年はおろか小学校高学年でも殆ど教具を使わず，抽象化を図った後は式だけの指導になる傾向があるが，それとは対照的な指導であった。

しかし，図の操作と式の操作はそれほど生徒に明確に意識されておらず，教師は生徒の

宿題(−7 ＝ 2y ＋1)の解答(図６)の問題を再度OHP でとりあげ，両辺にー１の四角を置き，「右辺の数の部分が＋１とー１でキャンセルされて０になるので取り去ることができる」と説明したところ，教室の中で驚きの声がわいた。こうした指導を通して，式と図の対応や式操作の意味が明確化されていった。

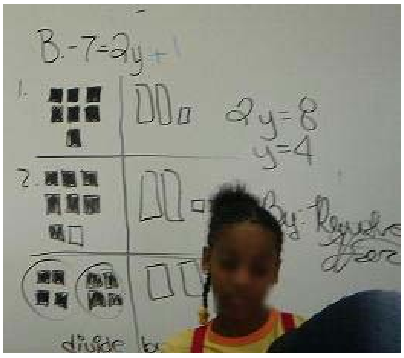

図６．生徒による宿題の解答

以上が文字式と方程式に関わる授業の概要である。内容的にみて，比較的多くの手順指導が見られたが，続いて記述する関数の導入では多少異なる様相を呈する。

3.4. パターンに基づく関数の導入

23 回目の観察授業では，その数時間前に学習した平方根と同じ状況から，関数が導入される。まず「Alan は１ foot ×１ foot の石板を組み合わせて，裏庭に正方形のテラスを作ろうと計画している。石板が何枚いるかを注文するために，寸法を決める必要がある。Alan の計画を手助けするにどんな情報を集めればよいか」というシツエーションが与えられた。そして正方形のパターンブロックを使い，徐々に大きなテラスを作りながら，「テラスの一辺の長さ」「加えられたブロックの数」「周囲の長さ」「テラスにおけるブロックの総計」のデータ作成活動が行われた(図７)。引き続いて，周の長さ，加えたブロックの数，ブロックの総数を正方形一辺の長さｎで表すよう促し，生徒とやりとりしながら p ＝ 4・n のように記号化を導入した。

正方形一辺の長さ	加えたブロック数	周囲の長さ	ブロックの総数
1	1	4	1
2	3	8	4
3	5	12	9
4	7	16	16
5	9	20	25
6	11	24	36
7	13	28	49
8	15	32	64
9	17	36	81
10	19	40	100

図７．テラス造営上必要な幾つかの数値

24 回目の観察では，表の中の関係を x と y で整理し，y ＝ 4x，y ＝ 2x － 1，y ＝ x^2 の３式を導いた後，生徒に方眼紙を渡し，座標軸を書かせ，一緒に点(1，4)，(2，8)，(3，12)を座標平面上にプロットする。ここで教師は色々な定義を導入する。

T：これを linear と言います。言ってみて。

Ss：Linear!

T：すべての解(solutions)のペアは，この直線上にあります。(次のように板書)

$$\left.\begin{array}{l}(1, 4)\\(2, 8)\\(3,12)\end{array}\right\}\ \underline{解}$$

等式を真にする順序対

＝直線上の順序対

そして y ＝ 4x を例に，(3，3)や(2，3)が解でないことも示した。次に，y ＝ 2x － 1 に移り，そのグラフを皆で描いていく。ある生徒が「いつも上に２つ，右に１つになっている」ことに気づき，発言する。教師は「とってもいいことを言っているわ」と，その発言をとりあげながら，傾き(slope)の意味に触れる。

最後に，y ＝ x^2 のグラフを描く(図８)。教師はここでも linear かどうかを生徒に尋ねる。さらに「いくつ解があると思う？」と尋ねると，何人かが「無限個！」と述べることができた。一次と二次を比較して初めて，一次ということの意味が生じるという点で，種

々の関数を一度に経験することには意味があると思うし，グラフ上の点を等式の解と見て，それが無限個存在することの意味づけは，日本よりも高いレベルの内容のように思える。

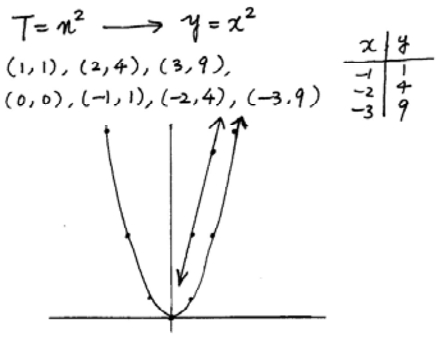

図８.

グラフを作る作業の後，式を使ったデータ作成活動が行われた。教師は「y ＝ 2x ＋３について考えてみましょう。これにはデータがないね。まずデータを作って下さい」と述べ，x を−2, −1, 0, 1, 2 とした表を作らせた。一つ例を示してやると，生徒たちは「簡単，簡単」と述べながら，作業を行っていた。教師は，生徒が２，３のデータを見つけた時，「次の y は何か分かる？」「どんなパターン？」と，y の値をパターンから見つけさせようともした。そして，そのパターンが傾きに相当していることを示唆した。

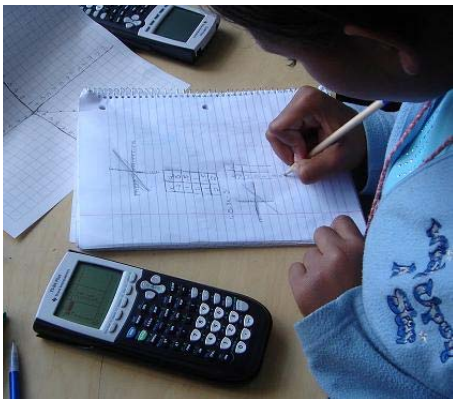

図９.

25 回目，26 回目では，グラフ電卓を使って様々な一次関数を描き，そのグラフと数値をノートに書き取る作業が行われ，仲間と互いのグラフを見比べ，特徴を見つける活動が行われた（図９）。生徒たちは仲間と議論し合いながら，関数の色々な特徴を見つけていた。その後教師は「y 軸と３で交わって，傾きが２の直線を書いてみて」と要求し，傾きと切片に関してグラフと式とを関係づけようと指導した。

この授業で彼らは学年を終え，長期休暇へと入っていく。つまりこの 26 回目の観察授業が，７学年最後の授業であった。

４．授業の特徴

本節では，Mary 先生の授業の特徴をいくつか抽出してみたい。

4.1. シツエーションの設定と教具の使用

授業を型として見るならば，Mary 先生の授業は，Teaching Gap の中で語られた「用語学習と手順練習」の範疇に入るのかもしれない。特に，文字式，方程式の授業では，その内容の性質上，多くの手順を含み，また先にも述べたように，宿題を出すという制約があるため，手順の指導はかなり必然的に授業の中に組み込まれてくることになるだろう。

しかし Mary 先生の授業は，形式的な手順を導入する一方で，アイデアを生じさせる為のシツエーションを設定していることが特徴であろう。文字式と方程式の学習では蜂の巣の状況が与えられ，関数の学習では正方形のテラス造営の状況が与えられた。特に後者の学習ではテラスを作る上での種々の数のパターンを組織化する手段として，関数が導入され，教師も「パターンを組織化しなさい」と何度も発言していた。

問題点を指摘するなら，特に文字式と方程式の学習において，シツエーションと形式数学とがあまり結びついていないように思われたことである。つまり，シツエーションで活動した後に，教師が定義や数学的な見方を提示することが多かったと言える。

ただしこのギャップは，毎回与えられる教具の使用によって，かなり埋められた可能性

がある。この教具の使用は Mary 先生の授業のもう一つの大きな特徴であろう。実際生徒たちは形式的手順のみの作業をするのでなく，常に教具を操作し，図を描き，それとの対応のもとで計算などを行っていた。つまり生徒たちは教具の使用を通して，具体と形式の繋がりを付けていたのかもしれない。

しかし，Gravemeijer（1997）が「媒介モデルに反対する理由は，このアプローチにトップダウンの要素がまだ存在することである。つまり，形式的な知識は所与のもの（given）として扱われ，媒介モデルはこの形式的数学的な知識から引き出される」（p.339）と述べているように，必ずしも子どもからのボトムアップのアプローチになっていない。つまり，シツエーションと教具と形式数学の三者の間で，子どもの思考が繋がっていない可能性があるのである。子ども達が数学を構成するという視点，授業の物語性（Krummheuer，2000）や教授学的状況（岡崎,2003）という視点からの授業展開が欠けており，従って授業の型としては用語学習と手順練習，あるいは問答型（湊,2002）に留まるものであろう。

一方，関数の展開には繋がりや連続性の工夫があったと思われる。ここでは比例，一次関数，二次関数が同時に扱われ，一次，傾き，切片などの意味を考えるよい場が存在した。また，指導がグラフを中心に展開されたことが特徴である。難しく展開するのでなく，グラフ電卓を活用し，グラフをノートに書き写し，互いに見比べて，パターンの特徴ひいては関数の特徴を議論するという流れである。もちろん式で考えることもしたが，式はむしろグラフを描く上でのデータ作りの源として扱われた。日本では式の扱いを重視するが，グラフを中心にした指導が特に下位の生徒に効果的だという結果もあり（大塚,2006），パターンとグラフを中心とした展開が授業に連続性を持たせたとも考えられる。

この関数の授業ではグラフの特徴などを積極的に提案する生徒たちの姿が見られ，教師も，その発言を傾きや切片の概念と結びつけたりした。ここでは状況が正方形のパターンからグラフへと移りながらも，生徒たちがその中に含まれる関係や特徴を議論し，顕在化し，数学化する姿が見られた。自力解決・討論型の授業とまでは言えないにしても，問答型を越えた授業展開であったと考えたい。

4.2. 前代数の教材展開について

本節では，他の学習内容に触れながら，前代数の特徴を見てみたい。

観察した授業科目名は「前代数」であり，学年は日本の中学 1 年に相当するが，日本では他の学年で扱われる内容が含まれていた。

最も時間数が充てられたのが分数の学習である（10 数時間）。日本では分数の演算は算数の完成を示す内容であるが，アメリカでは分数の学習が「前代数」として位置づけられていた。この見方は山口と岩崎（2005）が「分数の除法の学習が初等数学と中等数学を架橋する」としたことに整合すると思われる。

また，日本では中学３年に学習される平方根と三平方の定理が導入されたことが特徴的である。特に無理数の定義の仕方は日本と異なる特徴を持っていた。平方根は，正方形のパターンを利用して，自然数の完全二乗数（1, 4, 9, 16, 25, ...）の逆として導入され，それに引き続き，「$\sqrt{28}$ がどれくらいの大きさか」という質問により，それが５と６の間にあるという意見を生徒から出させた後，電卓を使って様々な数の平方根の概数を導いた。次の授業では$\sqrt{-25}$ が存在しない理由について話し合い，無理数の定義が与えられた。しかしその定義は日本のように「分数で表せない数」ではなく，「繰り返しのない，終わりのない小数（nonrepeating，nonterminating decimals）」であり，無理数の例も「0.20220222022220...」のような数であった（教科書も同様）。また，平行根の計算は導入されず，無理数に触れる

程度の学習であった。

三平方の定理の教材に関しも，日本では中学数学の内容がそこに向かって集約されていく重要教材であるが，観察授業では電卓を用いて活動しながら定理を発見するだけの指導であり，定理の逆などは扱われなかった。

総じて見れば，文字式，方程式を含めて，これらすべての内容を 30 時間程度の間に消化したのは,わたしには一つの驚きであった。しかし，Dewey のいう「漠たる全体・分析・確定した全体」(平林,1999)という流れを，ある内容の学習指導に限定せず，より長期的に捉えるなら，前代数は代数学習の為の漠たる全体であってよいのかもしれないし，26 時間の観察授業をそのように見れば，中学校数学で学ぶ内容の全体像が与えられていると言えなくもない。教材も分析的というよりは総合的あるいは概観として扱われている。

また，算術から代数への移行という面から見れば，分数の学習や，操作活動，図・グラフを描く活動が頻繁に採り入れられており，算術との乖離がかなり緩和されていると思われる(注２)。文字式の扱いも，算術と区別する形で導入するのでなく，算術における関係を顕在化する為に色々な場面にちりばめられている。この教材の見方は日本のカリキュラム作成にも一定の示唆を与えるのではないかと思われる。

もちろんこれらの展開は，スティグラーらが懸念するように，表面的あるいは低次元の知識の理解に留まる可能性があるので，真にこの学習が生きるかどうかは，８学年以降の学習指導によることになろう。

4.3. 社会的・思想的背景との関連

最後に Mary 先生の授業をアメリカの文化的・思想的背景の視点から積極的に意味づけてみたい。

Mary 先生の前代数の授業の特徴を示すなら,「定義を示し，それに基づき生徒と議論する」「教具（グラフ電卓を含む）を使い，その使用の中で形式数学の意味づけを図る」「シツエーションに基づき教材を総合的に扱う」を挙げることができる。これらはアメリカの社会的背景や思想的背景を考えれば，ある程度意味づけが可能だと思われる。

Mary 先生のみならず，アメリカの授業で用語学習を丁寧に行うのは，言語中心の社会からの要請と不可分ではないように思う。例えばアメリカ社会では，契約書に基づきながら交渉を行うといった事態は頻繁に生じる。言葉の正しい理解と使用は，市民教育として不可欠なことであり，そうした社会的要請が授業にも反映しているのではないだろうか。

また，シツエーションを設定して，数学を教具の操作によって意味づけることは，プラグマティズムの思想に整合するように思える(注３)。グラフ電卓を使い，グラフの見方を通してパターンの様子を知ることは，関数を現実的な効果の点から把握しようとする営みであろうし，無理数を繰り返しや終わりのない数と定義することも，電卓の使用と切り離して考えられないように思う。実用性の高い三平方の定理が，論証とは別個に指導されることも，こうした背景があるからではなかろうか。

もちろん誤解も多分に含まれていようが，少なくとも他国の教育を真似る前に，自国で展開される授業の社会的・思想的背景を意識化しておくことは必要不可欠な作業のように思う。その意味で，アメリカの授業は，数学教育の知見から見てまずい点は多々あるにせよ，教師たちは自国の文化や社会に応じた授業を作りあげてきているのではないかと考えたい。Stigler らが学習指導は文化的営みであるがゆえに，それを変化させることはきわめて難しいと述懐するように(p.86)，授業改善の第一歩は，自国の授業の思想的，文化的，社会的特徴を，より建設的な立場から理解することではないだろうか。

５．おわりに

本稿ではアメリカ・ミドルスクールにおける７学年の一教室の数学授業を，主に Stigler と Hiebert の著書 Teaching Gap の中で語られたアメリカの姿と対比する形で，特徴づけてきた。授業を型として見るなら，その授業は Teaching Gap で述べられた「用語学習と手順練習」という言葉で語れるようなものであったが，個々の特徴を吟味すると，教材展開，指導の手立ての仕方など，その記述には収まらない，いくつか有用だと思われる特徴が見出せたし，授業づくりそれ自体がアメリカの社会や思想に適したものになっているのではないかと思われた。

本稿での議論を自らに反射的に適用させれば，日本の文化や思想を背景とした数学教育を展開することが求められよう。筆者は全体論に基づく数学教育の展開（*cf.* 岡崎, 2003）にその可能性を求めているが，これについての議論は別稿に譲ることにしたい。

注および引用文献

注１：分数の学習が行われた期間に学会参加の為１週間ほど観察できなかったので，分数の学習には観察した７時間分の他に，５時間程度が充てられたものと思われる。

注２：この学校区では初等４年，ミドルスクール４年，ハイスクール４年の制度を敷いており，ギャップはむしろ他の学年段階間にあったのかもしれない。

注３：ここでは厳密にプラグマティズムを規定するのでなく，物事の真理を実際の経験の結果との関係で判断しようとする考え方という程度の意味で使っている。

Chapin, S. *et al*.（1999）. Middle Grade MATH: Course 3: Preparing for Algebra and Geometry. Prentice Hall.

Gravemeijer, K.（1997）. Mediating between concrete and abstract. T.Nunes & P.Bryant（eds.）, *Learning and Teaching Mathematics: An International Perspective*（pp.315-345）. Psychology Press.

Krummheuer,G.（2000）. Mathematics learning in narrative classroom cultures: Studies of argumentation in primary mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, *20*, 22- 32.

平林一栄.（1999）.教授単元の思想.「生きる力をはぐくむ算数授業の創造」刊行会編，よりよく問題を解決する子ども. ニチブン.

蒔苗直道.（2005）. 米国の数学教育の現状とスタンダードの多義性. 新算数教育研究会（編）, 新しい算数研究 12 月号, 34-35.

湊三郎.（2002）. 授業三型論に基づく教師の数学的資質. 上越数学教育研究, 17, 1-20.

中嶋博.（2005）. 学力とは何か. http://www.mainichi-msn.co.jp/shakai/edu/gakuryoku/

岡崎正和.（2003）.全体論的視座からの正負の数の加減の単元構成に関する研究－教授学的状況論と代数的思考のサイクルの視点から－. 数学教育学研究, *9*, 1-13.

大塚高央.（2006）.小学校とのつながりを意識した関数指導～中学１年，基礎コースでの実践を通して～. 上越数学教育研究会冬季講座発表資料.

佐藤学.（2004）. 改訂版 教育の方法. 放送大学教育振興会.

清水美憲.（2006）.系列の中でとらえられる数学科授業の構造的特徴. 第 38 回数学教育論文発表会論文集, 673-678.

Stigler, J. and Hiebert, J.（1999）. *The Teaching Gap: Best Ideas from the World's Teachers for Improving Education in the Classroom*. The Free Press.

スティグラー，ヒーバート. 湊三郎訳.（2002）. 日本の算数・数学教育に学べ：米国が注目する jugyo kenkyuu. 教育出版.（湊による「訳者による解説と文献」も参照）

山口武志, 岩崎秀樹.（2005）. 一般化分岐モデルに基づく分数除の教授・学習に関する研究. 数学教育学論究, *84*, 3-25.