上越数学教育研究，第 21 号，上越教育大学数学教室，2006 年，pp.147-160.

中学校における文字式指導に関する基礎的研究
－文字式が本当にわかって、使えるために何が大切か－

鈴木　敬介
上越教育大学大学院修士課程１年

１　はじめに

今まで中学２，３年生の授業を行ってきて気付いたことは、中学２，３年生でも文字式の計算ができない生徒が多い。いや、正確に言うと、文字式の計算があやふやな生徒が多いということである。

テスト前に、生徒がよく言う言葉は、「いいから計算のやり方だけ教えて」である。それは、テスト前だけ計算のやり方を覚えて、テストに挑むというものである。そして、テストでは、多少いい点数をとる。これは、一見すると問題点はないように見える。しかし、テストでできている内容といえば、やり方のみを暗記した計算問題だけであって、他の問題はできているとは言えない。

文字式の学習とは、文字式の計算のやり方だけを暗記することでは勿論ない。

Ｒ.Ｒ.Skemp(1992)は、理解について「関係的理解」と「道具的理解」の２つを区別している。「関係的理解」とは、なすべきこととその理由をともに知っていることであり、「道具的理解」とは、理由づけのない規則の適用であるとしている。

先に述べた、ただ単にやり方だけを覚えて、問題に適用する生徒は、スケンプのいう「道具的理解」をしている生徒であると言える。しかし、私が文字式の学習で目指したい生徒の姿は、他方の「関係的理解」をすることができる生徒である。

「関係的理解」にこだわる一番の理由は、なぜそうなるのかという疑問をもち、それについて自分で考えることが大切であると考えるからである。そして、それは学習指導要領の総則にもある、自ら学び自ら考えることができる生徒を数学の学習を通して育てたいと強く思うからである。

では、文字式の計算を関係的に理解するとはどういうことであろうか。

本研究は、文字式の計算を関係的に理解することを考察することで、文字式が本当にわかるとはどういうことかについて明らかにする。そして、文字式が使えるためには何が大切であるのかを文字式指導に関する先行研究を整理しながら、文字式指導の今後の実践的課題を明らかにすることを目的とする。

２　文字式が本当にわかるとは

文字式の計算のやり方だけを覚える生徒や文字式の計算にのみに力を注ぐ生徒が多い傾向があることは前節で述べた。ここでは、先行研究を基に文字式の計算を関係的に理解することについて考察することで、文字式が本当にわかるとはどういうことかについて考えていくこととする。

2.1　文字式の計算について

文字式の計算を関係的に理解するとはどういうことか。方程式の移項を例に述べる。教

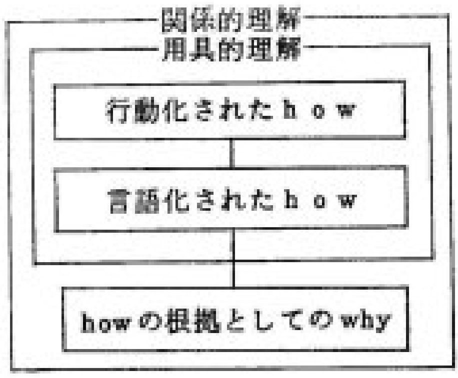
科書(2001)では、移項について《等式の性質①（両辺に同じ数や式をたす）や②（両辺から同じ数や式をひく）を使うと、等式の一方の辺にある項を、その項の符合を変えて、他の辺に移すことができます。このような操作を、移項といいます。》と説明している。このことを理解していることが、「関係的理解」をしているということである。つまり、等式の性質を使うという理由と、項を移動させるというやり方を理解していることである。一方「道具的理解」とは、移項する理由を理解せず、《等式の一方の辺にある項を、その項の符合を変えて、他の辺に移す》というやり方だけを理解していることである。

では、先行研究を基に、文字式の計算を関係的に理解することについて考察する。

最初に浅井ほか(1987)の研究をあげる。同氏は、実態調査により、生徒にとってつまずきの多い問題を把握し、その問題を中心によく似た式を例題として与え、練習の機会を増やし計算力の定着を図るという実践を行っている。この実践はドリル的な学習であり、「道具的理解」だけを考えた指導であると言える。ここでは、多少の効果はあったと述べているが、浅井の考察にあるように、《つまずきを少なくするように例題を考えてきたにも関わらず、思うようにつまずきを少なくすることができなかった》《確認テストのときは定着しているのに、単元終了時のまとめテストでは実態調査で多かったつまずきをする生徒がおり定着させることが難しい》と述べている。関係的理解・道具的理解の観点から、やり方を教え、練習の量により文字式の計算力の定着を図ったが、うまくいかなかった例である。つまり、この例は、文字式の計算における「道具的理解」には限界があることを示唆している。それは、ただやり方を覚えても、その場限りの学習となり、後には残らないというものである。逆に言うと、文字式の計算を関係的に理解することの必要性を裏づけているとも言うことができる。

次に藤井(1986)の研究をあげる。同氏は、「道具的理解（藤井は、用具的理解と表現しているが、ここでは道具的理解と同じものととらえ､以下道具的理解に統一する)」から「関係的理解」への深化を認知的コンフリクトを基にして、理解がどのように変容するかを解明している。また､認知的コンフリクトとは、コンフリクト（二つ以上の対立する傾向が、ほぼ等しい強さで同時に存在し、行動の決定が困難な状態）の要因が衝動や要求といった心理的なものではなく､認知的なものであり、個人の認知的シェマ内に発生した矛盾を契機として生じるものであると述べている。

認知的コンフリクトが生起する局面を特定するために、藤井(1986)は「道具的理解」と「関係的理解」の構造を次（【図１】）のように規定している。



【図１】道具的理解と関係的理解の関係

次に生徒に認知的コンフリクトを誘発すると思われる発問を各局面で行い、理解の状態を生徒自身の記述から解明している。ここでは、不等式を例にあげて考察している。

ここで明らかにされたことは、認知的コンフリクトは、理解の深化を「道具的理解」から「関係的理解」へ促す動因としての役割をもち、その変容の因果関係は、認知的コンフリクトが何と何の間に生起しているかに着眼することによってより明確になること。また、

「関係的理解」をするまでにはいかなくても「道具的理解」を強固なものにする役割を果たすことができるということである。

藤井(1986)の研究により、「道具的理解」から「関係的理解」への深化には、認知的コンフリクトが有効であるということがわかった。これは、文字式の計算を道具的に理解している生徒にとって、有効な実践であると言える。

一方、藤井(1986)の研究では、あらかじめ「道具的理解」をしている生徒が対象となっているために、「道具的理解」をしている生徒を変容させるための手がかりを与えうるが、生徒がなぜそのような計算をしたのか、あるいは、するようになったのかが十分に明らかではない。これを明らかにすることも文字式指導において重要であると考える。

最後に、杜(1991)の研究をあげる。同氏は、数の世界から文字の世界への移行には大きなギャップがあるとして、移行の過程で生じる不均衡を解消することで、文字式の計算における理解が深まると考えている。具体的には、生徒の誤った計算や間違った操作などについて、操作モデルという観点で分析し、それを操作システムとしてとらえ、その変容によって、文字式の計算の理解をとらえている。

この研究は、子どもの操作がどのような意図で行われているか把握することに着目した研究であると言える。一方、杜(1991)が述べているここでの文字式指導上の問題は、子ども自身が操作システムの変容を引き起こす要因がないことである。つまり、子どもが自分で行った操作に対して、おかしいと気付かないので、葛藤もなにも起こらず、結局教師側から指摘をして、気付かせていかざるをえないということである。

以上、文字式の計算についてまとめると、浅井の研究より、やり方だけを覚えるという「道具的理解」には限界があり、関係的に理解することが重要であることがわかった。つまずきを示す生徒に対する支援においては、藤井と杜の研究が有効であることがわかった。

一方、関係的理解・道具的理解の観点でみたとき、これらの先行研究からは、文字式の計算を関係的に理解させる指導を考えることは難しいと感じる。それは、文字式の計算を最初に学ぶときに、なぜ文字式の計算を学ぶのか、どのように計算するのかなどを理解することが重要であると考えるからである。

ここでは、文字式の計算を関係的に理解することについて考えてきたが、文字式の計算を関係的に理解することは、文字式の計算についてだけ考えても難しいことがわかってきた。つまり、文字式の計算だけを考えていても、なぜ文字式の計算を学ぶのかという理由やどのように計算するのかというやり方を理解しなければ、文字式の計算を本当にわかったと言えないと考える。

2.2 文字式を使う場の必要性

文字式の計算だけを考えても、文字式の計算を関係的に理解することは難しいということがわかってきた。ここでは、太田(1990)の研究を考察する。太田は、文字式の認識の発達にとって、具体を背景としてもちながら文字を使うということが大切であるとし、ある目的のために「文字式を使う」という行動の繰り返しによって、文字式に対する認識が深まるとしている。そして、文字式の学習の目的は、計算のために学習するのではなく、それを用いて事物を考察することを体験させ、そのなかで数量関係を考察する方法を身に付けさせることであると述べている。これが文字式の計算を学ぶ理由の一つであると考えることができる。

また、太田(1990)の研究結果から、《文字式の計算をよく間違える生徒は、具体的な場面で考えているときや、面積図などのモデルと対照させているときには、文字式を扱うことができるが、しばらくするとまた同じような間違いを繰り返し、計算練習の過程で文字式に対する認識の本質

的な部分とは違うものが定着させられている》とあり、これは、文字式の計算練習だけで学ぶことが危険であることと、ある具体的な場面で文字式の計算を考えることが必要であることを示唆している。

太田(1990)のここでの実践は、数あてゲームにより、文字式を使えるようになるまでの様相をとらえるものである。

ここで明らかにされたことは、数や図で考えながら、あるいは数や図に行きつ戻りつつしながら、文字式で表現したり、その変形を扱ったりという場を多く経験していくことが、文字式に対する認識の発達に関わってくるということである。そして、同氏は、文字式の学習とは、文字式が必要となる場面で繰り返し使いながら慣れていくものであって、計算できるようにしておいてから使うというものではないとして、文字式の指導は、数学の学習全体のなかに位置付けられるべきものであると主張している。

この太田(1990)の実践より、今まで文字式の計算を関係的に理解することについて考えてきたが、文字式の計算は、計算の場面に限って、文字式の計算を関係的に理解するというのではなく、ある場面を背景にしながら学ぶということが必要であるということがわかった。

また、文字式を用いて事物を考察することを体験させ、そのなかで数量関係を考察することで、文字式の計算の必要性を感じることができるということである。つまり、文字式の学習では、文字式の計算が目的ではなく、計算はあくまで文字式を用いて事物を考察するための手段であるということであり、単に文字式の計算ができても、具体的な場面で使えないと意味がないということである。

そこで、文字式の計算を具体的に使う場として考えられる、文字式による論証を考察していく。

2.3　文字式による論証について

ここでは、羽住ほか(1990)の先行研究を考察する。同氏は何年かに渡り、文字式による論証についての研究を行っている。

最初の第１次研究報告(1990)では、《どうして文字式による論証のできが悪いのか》を考察するために、子どもの文字認知（文字式で表現する。文字式を読み取る。文字式を計算する）と関連させながら、子どもの文字認知や文字式による論証の理解についての子どもの発達の様相を解明し、発達段階（【図２】）を決め、その発達を促進するための指導内容・方法は何かを研究している。

水準０・・	「計算」「表現」「読式」ともに通過せず
水準Ⅰ・・	「計算」のみ通過
水準Ⅱ・・	「計算」および、「表現」か「読式」の一方が通過
水準Ⅲ・・	「計算」「表現」「読式」ともに通過

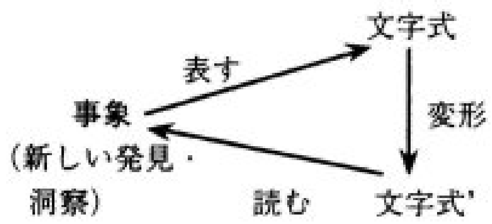
【図２】文字認知の発達段階

羽住(1990)の中学２，３年生を対象とした調査結果から、水準Ⅱ以上である生徒が多く、文字認知に関しての指導はまずまず行われていると述べている。しかし、それらの能力がある生徒であっても文字式による論証能力が低いことから、文字を使って証明しようという態度が育っていないことを指摘し、文字式の論証能力を高める意図的な指導が必要であると主張している。つまり、「計算」なら「計算」だけを学べばいいという指導だけでは、文字式による論証能力は育たないということである。

また、ここでは、「計算」に比べ、「表現」「読式」が苦手な生徒が多いということも明らかにしている。

では、文字式の論証において、「表現」「計算」「読式」をばらばらに指導するのではなく、

どのように指導したらよいのであろうか。それを考えたとき、三輪(1996)の文字式利用の図式（【図３】）を参考にするとよく理解できる。同氏は、３つの過程を一巡りすることで、新しい発見や洞察が得られることが期待できるとしている。



【図３】　文字式利用の図式

羽住(1992)の文字式による論証の第２次報告では、文字を利用しようと考える子どもがきわめて少ないことから、いろいろな場面で文字の有用性やよさを感じさせるような指導を行うことが必要であるとして、文字を使った説明を意図的にさせる工夫や、文字式の有用性やよさを生徒が感じるような状況をつくり、文字を使う必要性を指導する実践を行っている。

羽住(1992)は、文字式の計算は、数の計算と異なり、ただ計算をして結果をだすだけでなく、何のためにどのような「変形」をするのかという意識をもたせ、その文字式の計算が意味することを読み取らせる指導が必要であると述べている。つまり、文字式の計算といっても、単に文字式を計算する（簡単にする）だけではなく、目的をもって文字式を計算する（変形する）力が必要であるというのである。

熊倉ほかの第４次報告（1993）では、文字や文字式についての理解において文字を「変数」として意識することが関連しているとし、「変数」が「表現」、「読式」といかに関わっているかについて考察している。

ここで明らかにされたことは、文字を「変数」と読み取れるかが重要であるということである。そして、熊倉は文字を「変数」ととらえることができるような意図的な指導が必要であり、文字式による論証の理解は、「変数」についての理解の上に達成されると主張している。そして、第５次報告(1994)において、「変数」を含めた発達段階(【図４】)を定め、生徒の現状を分析している。

水準０・・	「計算」「表現」「読式」ともにできず、文字を「変数」とはとらえていない
水準Ⅰ・・	「計算」はできるが、「表現」「読式」はできず、文字を「変数」とはとらえていない
水準Ⅱ・・	「計算」「表現」「読式」はできるが、文字を「変数」とはとらえていない
水準Ⅲ・・	「計算」「表現」「読式」ができ、文字も「変数」ととらえている

【図４】文字認知の発達段階

最後に、鈴木ほかの第６次報告（1998）で、文字や文字式を理解しているということを、《文字や文字式を使うことの意義を理解し、文字式をいろいろな場面で利用することができたときに、文字や文字式について理解しているということができる》と述べている。

以上、文字式による論証についてまとめると、文字式による論証においては、いろいろな場面で文字の有用性やよさを感じさせるような指導を行うことが必要であること、文字式の計算は、単なる計算ではなく、目的にあった計算（変形）をすることが必要であること、つまり、文字式の計算においては、目的を伴った計算（変形）が大きく関わっているものと考えることができる。このことは、文字式の計算を関係的に理解することにとって、文字式の計算のみの指導ではなく、文字式による論証を含めた文字式を使う場における指導が必要であることを示唆している。

また、文字を「変数」と意識することが文

字式による論証の鍵を握っているということは、文字式の学習全般を通して関わってくるものと考えられる。つまり、文字式による論証には、問題文から数量関係を読み取りそれを式で表すという「表現」と、それを自分の目的に合わせて変形する「計算」と、最後にその式が何をあらわしているのかを読み取る「読式」という能力が必要であり、それらの能力は、互いに関連しているということである。

3　文字式が使えるために

ここでは、文字式による論証の先行研究を考察することで、文字式が使えるためには、何が大切であるのかを明らかにし、文字式指導の今後の実践的な課題を明らかにする。

3.1 「表現」「計算」「読式」について

最初に、文字式による論証で必要とされる能力である「表現」「計算」「読式」についての先行研究を考察していく。

3.1.1 「表現」について

太田（1992）の研究の目的は、中学生が事象を文字式を使って表そうとするときの様相を考察し、文字式に対する認識がどのようなものであるかをとらえることである。

特に任意の「変数」としての文字の使用に焦点をあてている。生徒が数の代わりに文字を使って「表現」する場面においては、文字は本質的に「変数」であるということである。

実践として、誕生日と年齢をあてるゲームを行っている。そこで、文字式を利用し形式的な処理にもちこんでいるように見える生徒が、実は、この課題の意味をもっとも理解していないというものである。それよりも、数や図に頼りながらも、それらの過程を大切にした生徒は、文字を変数として意識することができるという実践例である。

ここで明らかにされたことは、文字式の認識が場面に依存しながら生まれ、使われるということである。そして、同氏は、文字式を使い始めたころの生徒にとっては、文字式による形式的な処理の背景に、それがどのような場面と対応しているか、どのような数の計算を表しているかということを意識しながら文字式を使うことが大切であると述べている。

また、太田(1992)は、数に頼って考えながら、次第に数を離れて演算をとらえ、変数となる数量をつかんで記号や文字で表現しようとする、つまり、はじめから文字を考察の道具とするのではなく、場面の考察の過程で変数を捉え、そこに文字が浮かび上がってくると述べている。

自らの教職経験を振り返ると、文字式の導入に関しては、具体的な場面で考えてきた。しかし、それが終わるとすぐに「表現」についての練習問題を数多く行った。例えば、教科書にある「ａ円持っていて 300 円使ったときの残金を文字式を使って表せ」というような問題に対して、ａのところに具体的な数を１つ当てはめ、すぐに文字式で表すという「1000 円もっていたら、おつりは、1000－300 だから、1000 をａに変えて、ａ－300 だよ」というような指導である。ここでの指導では、「変数」という意識もあまりせず、表現と文字式のきまりの練習をやや「道具的理解」に近い指導で行ってきた。また、問題文の条件にあう関係を文字式で表すだけで満足する活動となり、文字式で表すことの必要性やよさを実感できる指導にはならなかった。

この太田(1992)の実践は、ただ単に文字式で表そうとするのではなく、数式から次第に文字式へと向かうものであり、文字式で表す理由やよさをしっかりと実感できるものであると言える。

次に、古川(2005)の研究をあげる。この研究は、文字式をよりよく理解できるための授業の在り方を検討しているものであり、表記の対象となる命題の側面の理解を重要視した

ものである。

実践の一部として、教室全体で偶数や奇数の物理的概念の理解の状態をマグネットや○印で表したカードなどを用いて確認する過程で、生徒の概念の変容を考察している。

ここで明らかにされたことは、偶数に対するそもそもの理解を深めること、すなわち命題の体系としての偶数の理解が表記の体系としての偶数の理解すなわち文字式で表すことの理解へとつながるということである。また、古川(2005)は、物理的概念を意識することが偶数や奇数についての理解を支え、文字式で表すべき対象についての理解を深めるものと考え、それが、文字式で表現する基盤になるものだと述べている。

自らの教職経験を振り返ると、概念にかかわる表現については、帰納的に教えている場合が多かった。例えば、「連続する３つの整数は、（４，５，６）などであるから、最初の整数をｎとすると連続する３つの整数は、（ｎ，ｎ＋１，ｎ＋２）で表せるよ」という指導であり、あまり概念的なものを意識せずにほぼ暗記させる指導を行ってきた。それはまさに、概念に対して生徒に「道具的理解」をさせている状況であり、生徒は文字式で表すことの意味もわからずに学習している場合が多かったと言える。また、偶数についても２ｎと表せると暗記している状態なので、２(ｎ＋１)を偶数と読むことができない生徒が多かったのではないかと考える（ここでのｎは整数)。

この古川(2005)の実践は、概念を構造的に捉えたものを文字式で表すという必要性に迫られるものであり、生徒が文字式で表すことの意味を理解できるものであると言える。

3.1.2 「計算」について

前章では、文字式の計算においては、ただ単に計算するだけではないことを述べてきた。ここでは､文字式の計算の重要な意味をなす、文字式による論証での計算についての先行研究を考察していく。

過外（1999）の研究は、証明の表現を「式変形型」「並列型」「方程式型」の３つに分類できるとしている。具体的に「連続する２つの整数の平方の差は、もとの２つの整数の和に等しい」という課題においては次のように表すことができる。

「式変形型」 $n^2-(n-1)^2$ $=2n-1$ $=n+(n-1)$　　を導くもの
「並列型」 $n^2-(n-1)^2$ ┆ $n+(n-1)$ $=2n-1$ ┆ $=2n-1$ 仮定と結論の両方から計算し、 両方とも２ｎ－１となることを導くもの
「方程式型」 $n^2-(n-1)^2=n+(n-1)$ $2n-1=2n-1$ 最初からイコールで結ぶもの

そして、同氏は､「並列型」による証明を授業で取り上げ､「式変形型」と比較することで「式変形型」の仕組みや理解を狙っている。

ここで明らかにされたことは、生徒は､「並列型」のほうが証明を完成させやすく､「式変形型」による目的にそった変形は難しいこと、証明を「並列型」でスタートした生徒が、最後から二行目で$n^2-(n-1)^2=2n-1=n+(n-1)$という式から、$n^2-(n-1)^2=n+(n-1)$であることを導きだしたことから､「並列型」から「式変形型」への思考が移行する手掛かりになること、目的にそった変形が生徒にとっては困難であるということである。

続けて、田中(2004)の研究をあげる。田中は、学習指導の過程における生徒のコンセプションとその変容に着目し、その変容と変容の契機を探ることを目的としている。

ここで明らかにされたことは、2 人の調査解答を分析した結果、記述には大きな違いが見られなかったが、それぞれの持つコンセプションが異なっていたということである。具体的には、論証の最後に、３ｎ＋３を分配法則でくくりだし、３(ｎ＋１)が導けるというものと、結果が３×(ｎ＋１)となるだろうと予測して、式変形を行うという２つの違ったコンセプションである。

ここで、田中(2004)は、分配法則でくくりだす生徒のコンセプションについては、「先生が説明したから」という信念に基づいているものであると述べている。また、そのコンセプションが結果を予測する（目的をもって）ことができるというものに変容するには、式の構造に着目することを学ぶことができる因数分解（展開⇔因数分解）の学習が関わってくると述べている。

自らの教職経験を振り返ると、計算した結果の式が最後に分配法則でまとめることができるという指導であった。つまり、課題の結論を式の形で予想することなく式を計算し、最後に分配法則でまとめることができるというものである。これは、式変形の目的も意味も何も考えておらず、ただ計算するという「道具的理解」にあたる指導であったと言える。

過外(1999)と田中(2004)の実践は、文字式を目的をもって変形することの必要性を述べていると言える。つまり、計算する理由を考えることが大切であるということである。

3.1.3 「読式」について

両角（1997）は、式を読むことについて、《形式的な文字式計算の妥当性を求める場面、文字式の有用性（よさ）を感得する場面など、文字式の学習を進めていく上で、式を読む活動は必要不可欠である》と述べ、各学年で「式を読む」ことを重視した実践を行っている。

中学２年生の具体的な実践として、正方形を２つ重ねたときにできる面積や周の長さを文字式で表し、友だちが表した文字式をみて、どのように考えて式をつくったか読み取る活動を行っている。

ここで明らかにされたことは、文字式は、カッコの有無や位置、その形によって多様な解釈をすることができること。また、相手に自分の考えを伝えるためには、文字式の形に注目することが必要であるということである。

自らの教職経験を振り返ると、マッチ棒を並べて、その本数をどのように数えるかという課題で、さまざまな式の形に表現させる活動は多く行ってきた。しかし、友だちが表現した文字式を読み合うという活動や、他の式との関連性などを考えるという活動はあまり行ってこなかった。つまり、文字式を読むことを意識した授業はあまり行ってこなかった。

この両角(1997)の実践は、「読む」活動に対して、「読む」⇔「表す」の関係が大切であることを示唆している。

ここで、教科書の「読む」に関する問題を見てみると、「表現」についての問題は多数あるのだが、「読式」についての問題は、ほんのわずかしかない。また、その問題も「次の式が答えとなるような問題をつくりなさい」というもので(1) ａ ÷ ７ (2) 100＋ ｘ ×10　という２題しかなく、授業ではあまりこのような問題には、触れないことが多い。しかし、杉山(1990)は、これを具体に引き戻すよみとして、演算の意味することの理解を深めることと、具体例を作ることにより、一つの式がいろいろな具体を表していること、つまり、一般を意味することを認識させ意味をもっているとしており、杉山(1990)も「読む」ことの大切さを訴えている。

次に草野(1997)の研究をあげる。同氏は、式を読む活動のはたらきを明らかにすることを目的として、調査を行っている。

具体的には、おはじきの個数を求める問題で、正方形の形におはじきをならべ、最初に一辺に６個のおはじきがある場合。次に一辺

が 100 個のおはじきがある場合のおはじきの数の求め方を調査している。

実際に、一辺が 6 個の場合は、一般化可能な式を用いて解決したが、次の一辺が 100 個の場合にその式を適用できなかった子どもに対して、読む活動を取り入れることで、最初の式が一般化可能であることに気付くことができるというものである。

ここで明らかにされたことは、図の操作にもどり、図と関係づけた式の読みを行うことで、「開始の活動」の反省が促され、そこで、式の一要素に限定した考察を行うことにより、式を数量の関係として捉えられるようになり、さらに同じ操作が行えることを通して、式が適用できることの理解が図られるということである。

自らの教職経験を振り返ると、このような問題をテストで出題すると、文字式を使用して一般化できる生徒はクラスで１，２人程度であった。図などから、その関係を理解して数式で表すところまでできる生徒は半数ぐらいであった。つまり、まず関係を捉えることができない生徒の段階と、数式で考えていたものを文字を使って一般化することができない生徒の段階があるということである。

この草野(1997)の実践は、生徒が困難を感じる、数式から文字式への移行を読む活動によりスムーズにできるというものである。

最後に、清水（1997）の研究をあげる。同氏は、文字式をひとまとまりと見ることに焦点をあてて、生徒の文字式に対する理解の困難性を顕在化することを目的としている。

清水(1997)は、質問調査とインタビュー調査を行い、式を計算の過程と見るプロセスの見方と式を結果と見るプロダクトの見方の視点で分析を行っている。具体的には、「ａ＋３ｂ＋５ｃ＝25 のとき、ａ＋３ｂ＋５ｃ－10 の値を求めよ」という課題について、生徒の解答をもとに分析している。

ここで明らかにされたことは、文字式をひとまとまりと見るためには、文字式をプロセスの見方からプロダクトの見方に移行する必要があること。そして、その移行には困難が伴うこと。また、代入法を避ける生徒は、文字をひとまとまりと見ることができないので、指導が必要であること。一旦プロダクトの見方ができるようになると次からは容易になるということである。

自らの教職経験を振り返ると、文字式をプロセスとみるのかプロダクトとみるのかということを意識してこなかった。しかし、小学校の数式は計算の過程のみを表していたが、文字式では、計算の過程を表すと同時に結果をも表すことに困難が生じる生徒が多いということは実感していた。これは、三輪（2001）のいう算術学習に由来するミスコンセプションや誤答をうむ原因であるというものである。清水(1997)の実践は、その数式から文字式に移行する過程において、式を読むことが重要であるということを主張するものである。

3.2 文字式使用の「よさ」について

前章の羽住(1990)の報告にもあるように、子どもが文字式を利用しないことが問題点であるとして、文字式の有効性やよさの必要性を主張している。ここでは、文字式の「よさ」について先行研究を考察していく。

3.2.1 文字式の「よさ」について

大塚(2003)の研究は、文字式の「よさ」の認識が問題解決や基礎的な知識・技能とどのように関連するのかを明らかにすることを目的としている。また、文字式を用いて解くための十分な基礎的な力があると思われる生徒であっても、文字式を用いて問題を解かない生徒が多いことについて、基礎的な力の他に、文字式の「よさ」の認識が必要であることを述べている。

ここで明らかにされたことは、調査の結果から、生徒は文字式の「よさ」について、「形

式性」や「構造性」については指摘しやすいが、「一般性」については、指摘することが難しいということである。そして、大塚(2003)は、今後どのように「よさ」を意識させるかが課題であるとしている。

ここで、文字式の「よさ」のひとつである「一般性」について、文字を「変数」として意識することにも関連しており、文字式指導において重要であると考えられる。そこで、「一般性」についての先行研究を次に考察していく。

3.2.2 文字式の一般性について

藤井（2002）は、《本来は表記が問題なのでなく、表記内容の一般性を志向することに代数的思考の本性がある》として、数字を用いて文字式の素地指導が展開できることを、一般性を意図的に内包した数（擬変数）に焦点をあてて具体的に明らかにすることを研究の目的としている。

藤井(2002)は、擬変数のよさとして、数字を多様に見ることが求められていることから、変数概念への新しい道を開くと述べている。

実践課題として、ａ－ｂ＝ａ＋(10－ｂ)－10 について、数字の式から、一般性を把握できるかどうか実践している。なお、ここでの実践の対象は、小学２，３年生である。

ここで明らかにされたことは、子どもの「ひく数がどんな数でも」や「いくらひかれる数が増えたりしても」という発言から、数を擬変数として解釈することができる子がいるということである。

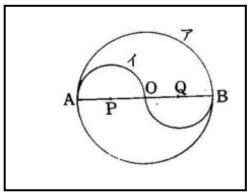
そして、藤井(2002)は、その一方で式を計算の過程としかみることができない子がおり、算術に潜在している代数的性質を認識することが重要であると述べ、数を代数的によむことやかくこと、処理することと明示的に指導していくべきであるとしている。また、数式については、計算をしないで式をよむことも大切だと主張している。

最後に、羽住（1992）の研究をあげる。これは、先にあげた先行研究である。同氏は、いろいろな場面で文字の「有用性」や「よさ」を感じさせるような指導を行うことが必要であるとして、文字を使った説明を意図的にさせる工夫や、文字式の「有用性」や「よさ」を感じるような状況をつくり、文字を使う必要性に生徒を追い込むという実践を行っている。

具体的な実践として、中学１年生で、問題１から問題３までを順番に出題している。

〔問題１〕

直径 12cm の円Ｏがある。この円Ｏの直径ＡＢを中心Ｏで２つの線分に分け、それぞれを直径とする円Ｐ，Ｑをかく。ＡからＢへいくのに、アでいくのと、イでいくのとでは、どちらが近いですか。



〔問題２〕

ＡＢを１：２で分けるという内容に変える。

〔問題３〕

ＡＢを適当な点で分けるという内容に変える。

このように問題を具体的な数字から一般的にしていくという実践である。

ここで明らかにされたことは、最初の問題１，２において計算で説明していた生徒が、問題３においては、文字を利用して説明するようになったということである。このことから、羽住(1992)は、文字を使った説明を意図的にさせることが大切であると述べている。

４　指導への示唆

本稿では、文字式の計算に関して、「関係的理解」をするためにはどのようにすればよいのか、という筆者の問題意識から先行研究を概観、整理してきた。

文字式の計算を道具的ではなく、関係的に理解することが重要であることが、浅井

(1987)の研究により裏づけることができた。

また、文字式の計算を道具的に理解している生徒に対して、関係的に理解させるためには、藤井(1986)や杜(1991)の研究が有効であることがわかった。それは、文字式の計算をただ単にやり方だけを暗記している生徒に対して、計算の理由を認知的コンフリクトや数式との違いなどから捉えなおすことで、計算のやり方に対する理由がわかるという実践であった。

しかし、それは文字式の計算だけに関わっているものであり、なぜ、文字式の計算を学ぶ必要があるのか。文字式の計算のよさは何なのかという疑問に対する十分な答えとはならなかった。

太田(1990)の研究は、文字式の学習は、事物を考察しその中で数量関係を考察する方法を身に付けさせるものであることを示している。また、羽住(1992)の研究は、文字式による論証において「計算」は、何のためにという目的をもって行う必要があるということを示している。つまり、生徒に文字式の計算を関係的に理解させる指導においては、文字式の計算だけを考えるのではなく、「表現」「計算」「読式」を総合的に捉えさせることが必要であることが示唆される。

これは、文字式の計算がいくら得意であっても、文字式の「よさ」がわからずに、文字式の計算が必要な場面であっても文字式を使おうとしなかったり、文字式の計算により変形された文字式が何を示しているのかを読むことができなければ意味がないということである。

すなわち、文字式の計算を関係的に理解することは非常に重要なことではあるが、文字式が本当にわかるということは、文字式の計算を関係的に理解するだけでは十分ではなく、文字式の「表現」「計算」「読式」を総合的に捉えることが重要であることがわかった。

次に、文字式が本当にわかって、使えるためには何が大切であるかを考えたとき、三輪(1996)のいう文字式利用の図式は、すべての先行研究を整理することで有用であることがわかる。ここでは、三輪(1996)の観点からこれに関する先行研究をまとめることで、文字式が本当にわかって、使えるためには何が大切であるのかを明確にし、今後の文字式指導の実践的課題を明らかにして本稿を閉じることとする。

文字式が本当にわかるとは、文字式の計算だけを関係的に理解するのではなく、「表現」「計算」「読式」を総合的に捉えることであることを述べた。ここで、三輪(1996)の言う「目的をもって文字式を変形すること」について、過外(1999)、田中(2004)は、ただ単に文字式の計算をするのではなく、変形するためには、結果の式を予想させることが重要であると述べている。つまり、予想するということが、式を「読む」活動と大きく関わっており、「計算」だけを学んでも十分ではないということを裏づけている。

また、羽住(1992)は、中学1年生に文字式の意義を感じさせる程度の「文字式による説明」を指導する必要があると主張している。これは、教育現場の中学1年生の段階において、「表現」「計算」についての部分的な学習に片寄りがちになっていることを指摘しているものである。つまり、中学1年生での文字式指導では、「表現」「計算」の「道具的理解」の指導に片寄るのではなく、中学1年生の段階から、文字式の「表現」「計算」「読式」を総合的に捉えて学習することが重要であるということを示唆している。

すなわち、今後、中学1年生の段階で文字式の「表現」「計算」「読式」を総合的に捉えさせる指導をどのように行うかが、実践的課題の一つであると言える。

次に、文字式を使えるためには、大塚(2003)の言う「よさ」を実感させることが重要となってくる。生徒は、文字式の「よさ」を実感

することができれば、次の課題に直面したとき、文字式を使ってみようとするであろう。これについて、一般化が大きく関係してくる。つまり、ある課題において、一般化することができれば、次の場面においても文字式を使い問題を解決することを経験できる。それが、次に文字式を使おうとする意欲につながると考えるからである。

しかし、大塚は(2003)は、三輪(1996)のいう「事象から文字式に表す過程」において、文字式を用いて一般化することが生徒にとって一番困難であることを指摘している。また、羽住(1990)も「計算」に比べ、「表現」と「読式」が苦手な生徒が多いことを調査により明らかにしている。

文字式を用いて一般化するためには、文字を「変数」として意識することが重要であることが、熊倉ら(1993)の報告で明らかとなっている。また、「変数」を意識させる手だてとして、太田(1992)は数や図と関連づけることが有効であることを明らかにし、羽住(1992)は最初に数式で考えている段階から徐々に一般化させることが有効であることを明らかにし、そして、藤井(2002)は、擬変数で一般化が意識できることを明らかにしている。

また、一般化と三輪(1996)の言う「変形した文字式を読み取る過程」について、熊倉ら(1994)の調査結果から、「変数」と「読式」との関連性が明らかとなっている。それについて、草野(1997)は、読む活動により、式を数量の関係として捉えることができるようになり、一般化につながることを明らかにしている。清水(1997)も、文字式の過程と結果の両方の意味についての理解に関して、文字式を読む活動が重要であることを明らかにし、読む活動が文字式を関係的にみることにとって有効であるということを述べている。杉山(1990)も、読むことで式を一般化する認識が深まると述べている。両角(1997)は、式を読む活動が文字式で「表す」ことと関連していることを明らかにしている。

以上、文字式が使えるために、文字式のよさである一般化ができることが重要となる。そこで、生徒にとって困難とされる一般化については、文字を「変数」として意識させることが重要であり、そのためには、数式や図などと関連づけながら式で表すことが大切であることがわかった。また、古川(2005)が言うように、概念に着目することも大切であると考える。

また、一般化には、読む活動が重要な役割を果たすことがわかった。つまり、式を読むことで、変数を意識することができたり、式を関係的に捉えることができたりして、文字式を用いて一般化することがスムーズになるということである。

今後は、生徒にとって一番困難とされる「事象から文字式に表す過程」について、「読む」活動をどのように位置付けるかが、重要な実践的課題である。

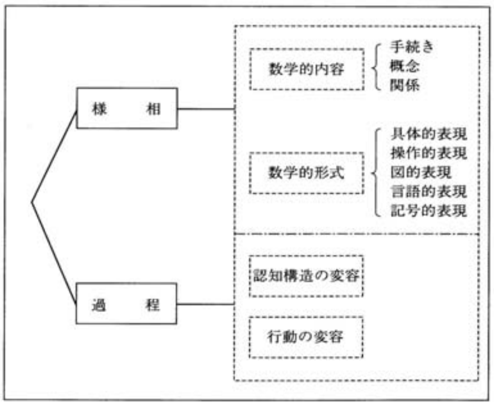
5　今後の課題

最後に、現在、教育現場において、テストを白紙でだす生徒が多いことが目立つ。これは、先にも述べたように、式で表すことが非常に困難であることを示しているものと考えられる。いくつかの研究実践においても白紙解答が多かったと述べられている。しかし、今まで紹介してきた先行研究は、この白紙解答をした生徒についての考察までは行われていない。筆者は、この白紙解答をしている生徒を理解することも大切であるのではないかと考える。

ここで、小山(1992)は、理解のモデルについて、大きく分けると児童・生徒が既に理解している状態、すなわち理解の「様相」に関するモデルと、児童・生徒が理解しつつある「過程」に関するモデルがあると言っている。(【図５】)

羽住(1990)のモデル（【図２，４】）は、「様

相」に関する理解のモデルであると言える。つまり、水準を0からⅢまで設定し、生徒がどの状態であるのかを知るためのモデルである。このモデルでは、白紙の解答をした生徒の理解に関しては、水準0という捉え方で終わってしまい、白紙の解答をした生徒の理解をうまく捉えることができない。



【図５】算数･数学の理解のモデル化の観点

また、筆者がこれまで述べてきた、Skemp(1992)のいう､関係的理解と道具的理解のモデルも理解の「様相」についてのモデルである。それは、筆者が目指す生徒の姿は、関係的に理解している状態であるということ。つまり、やり方もその理由も理解しているという状態である。しかし、白紙解答の生徒に対しては、関係的理解をしているかどうか判断することが難しい。

そこで、このような白紙解答の生徒に対して、小山(1992)のいう「過程」に関する理解のモデルで生徒を理解する必要があると感じる。

小山(1991)は、理解するとは、それを既有のもの、つまりシェマや認知構造と呼ばれるものと認知的に関係づけることであると定義している。そして、数学の理解にはいくつかの階層的水準があり、理解が深化するとは、この水準が上昇することを意味すると述べている。さらに、反省的思考とは、学習者が自らの無意識的な活動や操作に注意を向け、それらやその結果を意識化して図や言葉によって表現することを目的とする思考であると捉え、この反省的思考が、理解の深化に重要な役割を果たすと述べている。

また、同氏は、理解の深化の過程を解明するための理論的枠組みとして、階層的水準と「直観的段階⇒反省的段階⇒分析的段階」をそれぞれ縦軸と横軸にもつ理論的枠組みを構築している。

この小山(1991)の「過程」のモデルを参考にして、生徒が図や言葉、式などに表すまでの過程とそれぞれの変容を捉えることが今後の筆者の課題である。

参考・引用文献

浅井昭四ほか５名.（1987）.分かりやすい授業を目指した計算指導―つまずきの実態調査を踏まえてー．日本数学教育学会誌，69(3),13-20.

藤井斉亮.(1986).理解と認知的コンフリクトについての一考察．日本数教学会誌数学教育論究，Vol. 45・46，第６８巻,24-28.

藤井斉亮・MaxStephens.(2002).数と計算の学習指導における疑変数の役割に関する研究,日本数学教育学会,第３５回数学教育論文発表会論文集，163-168.

古川真哉.(2005).文字式の理解に関する背景的･根源的要素についての研究―命題と表記の二つの側面に焦点をあてて―．日本数学教育学会，第３８回数学教育論文発表会論文集,253-258.

羽住邦男・中西知真紀ほか２名.（1990）.文字式による論証．日本数学教育学会誌,72(9),2-10.

羽住邦男・中西知真紀ほか３名.（1992）.文字式による論証ー授業を通しての検討.日本数学教育学会誌，74(1),7-15.

過外正律.（1999）.文字概念を育てる授業のあり方―文字式による証明での論証認知―,

日本数学教育学会誌，81(3),2-10.
熊倉啓之・国宗進ほか４名．（1993）．文字式による論証（第４次報告）－論証と変数―．日本数学教育学会誌，75(7),10-18.
熊倉啓之・鈴木裕・国宗進ほか２名．(1994)．文字式による論証（第５次報告）－文字認知に関する実態―,日本数学教育学会誌，76(7),11-18.
草野収.(1997)．算数における式をよむ活動についての一考察,上越数学教育研究，12,81-92.
小山正孝．（1992）．数学教育における理解のモデルについて.岩合一男先生退官記念出版会編,数学教育学の新展開(pp172-184).聖文社.
小山正孝.(1991).数学の理解の過程を解明するための理論的枠組み.日本数学教育学会，第24回数学教育論文発表会論文集,25-30.
三輪辰郎.(1996).文字式の指導序説，筑波数学教育研究,15,1-14.
三輪辰郎.(2001).文字式の指導に関する重要な諸問題,筑波数学教育研究,20,23-38.
両角達男.(1997).式を読むことを重視した文字式指導に関する研究―同一生徒に対する３年間の継続的な授業実践を通して―.日本数学教育学会，第３０回数学教育論文発表会論文集,253-258.
太田伸也．（1990）．文字式に対する認識の発達について．日本数学教育72(7),2-11.
太田伸也．（1992）．中学生の文字式に対する認識について，日本数学教育学会誌74(9),11-19.
大塚高央.(2003).文字式の活用を促す学習指導に関する基礎的研究―文字式の「よさ」の認識と基礎・問題解決との関連に関する調査から―,日本数学教育学会，第３６回数学教育論文発表会論文集，133-138.
R. R. Skemp.(1992)．新しい学習理論にもとづく算数教育，東洋館
鈴木裕・中西知眞紀・熊倉啓之ほか３名．（1998）．文字式による論証（第６次報告）－指導上の問題点とそれらを克服するための留意点，日本数学教育学会誌80(11),8-16.
清水宏幸.(1997).中学生数学における文字式の理解に関する研究―文字式をひとまとまりと見ることの困難性に焦点をあてて―.日本数学教育学会，第３０回数学教育論文発表会論文集，247-252.
杉山吉茂．（1990）．式をよむことについて．学芸大数学教育研究，２,17-25.
田中真樹子.(2004).中学生の文字式の論証に関するコンセプションの研究―見通しを持った意図的な式変形に着目して―.日本数学教育学会，第３７回数学教育論文発表会論文集,133-138.
杜威．（1991）．学校数学における文字式の学習に関する研究．東洋館．
中学校数学１.(2001).学校図書