上越数学教育研究，第 21 号，上越教育大学数学教室，2006 年，pp.161-170.

数学を創り上げる意識的な推論に関する考察

武内　裕
上越教育大学大学院修士課程１年

1. はじめに

筆者は，生徒に意欲的に既有の知識や経験を活用し，試行錯誤しながら問題解決を行い，数学的な知識を統合・発展させていく能力や態度を身につけて欲しいと考え，授業を行ってきた。しかし，実際の授業では，答えが導かれるとそれ以上考えようとしない生徒や，答えだけを修正し，間違いを深く見直そうとしない生徒が少なくない。多くの生徒たちが，答えの正誤のみに強いこだわりを持ってしまうのである。筆者は，これらの実態を見て，生徒が数学とは結果（答え）を出すことと考え，結果を導く過程への意識が低いのではないか。そのため，筆者の願いでもある数学を創り上げようとする能力や態度が身についていかないのではないかと考える。

そこで，本稿では，数学の授業の問題点を考える。そして，学問としての数学を創り上げる意識的な推論（Lakatos,1980）に着目し，小学校の算数で意識的な推論を実現した Lampert（1990）の事例から，意識的な推論の様相を考察することを目的とする。

2. 数学を創り上げる

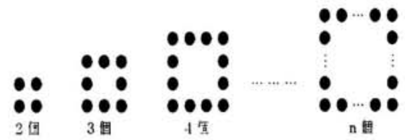
2.1. 数学の授業の問題点

まず，筆者の反省点をふまえ，数学の授業の問題点を，事例から明らかにする。

中学校２年「式の計算」の利用において，碁石の一般化問題を扱った事例である。以下のような問題が提示され，個人追究，共同追究が行われた。

【学習問題】

右の図のように，碁石を正方形に並べていきます。



（１）１辺に６個，１０個並べたとき，碁石はそれぞれ何個必要ですか？

（２）１辺にｎ個並んだとき，必要な碁石の個数をｎを使って表してみよう。

問題（２）についての全体追究の場面の一部を以下に示す。（T は教師，複数発話した生徒には，名前の後に数を記す。）

【場面１】

T1：では，どんな式で表せたか，理由と式を発表してください。（生徒に図と式を書かせたものを掲示し発表させる）

愛：（図 2.1.-1 で碁石の分け方を指で示しながら）僕は，こういうふうに分けて。１つがｎで，それが４つあるから 4n。４つ多くなるか 4n-4 になりました。

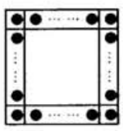


図 2.1.-1

T2：他には？

伊代：（図 2.1.-2 の分け方を指で示しながら）私は，こうやって分けたんだけど，n-2 が４つあって，残りの４個を足したから，4(n-2)+4 になりました。

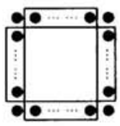


図 2.1.-2

T3：瑛司君，発表して。

瑛司 1：(図 2.1.-3 を提示しただけ)

n-1 のかたまりが4つあるので、

全部で 4(n-1)になった。

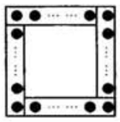


図 2.1.-3

T4：一樹君は，他の人と違うよね。

一樹：(図 2.1.-4 を提示) 僕は，表を作って考えました。

n	2	3	4	5	6
全部	4	8	12	16	20

図 2.1.-4

T5：いろいろな考えが出てきたけど，どれも正しいの？

瑛司 2：式を計算すれば同じになるよ。

T6：そうか，みんなで確かめてみよう。

(個人で式を計算して確かめ，全体で計算の仕方を確認する。)

T7：どれも，4n-4 になるから同じですね。(「碁石の個数は，4n-4 と表せる」と板書)

聡子：(つぶやき) どれも 4n-4 だから，愛さんのが一番いいのか。

場面1では，４つの考え方が出され，式の計算により，どの式も同値であることを確認をした。しかし、聡子の発話からも分かるように，4n-4 が一番よいという意識をもって授業を終えている。文字式の計算を活用するという目標は達成されているように見えるが，教師と生徒が数学を創り上げる授業になっているのかという疑問が残る。愛，伊代，瑛司から碁石の分け方が説明されているが，なぜそのように分けたのかという根拠，すなわち，この碁石問題の構造が議論に現れてこない。そして，他の正多角形が扱われないため，なぜ 4n-4 がよいのか，構造と結びつけて捉えられていない。つまり，推測とその検証の過程が議論に現れないまま，一気に一般化され，結果だけが強調されている。よって，生徒たちは，結果への意識が強く，問題の構造を捉えたり，結果の間違いを数学の本質に関わって修正したりできない。そのため，既有の知識を発展させることもできないのであろう。

国立教育政策研究所（2005）が発表した調査分析結果の概要では，「問題を解く過程で，図や表をかいたりして，調べようとしている生徒は４割から５割程度」，「問題を解決し答えが出てしまうとそれ以上考えようとしていない生徒は７割以上」，「新しい内容を学習したとき，前に学習したこととどのような関係があるか考えている生徒が５割に満たない」という生徒の実態が明らかになっている。

筆者は，試行錯誤の過程が現れない授業の問題点や生徒の実態を見て，生徒に数学を創り上げるための推論が身についていないのではないかと考える。

では，数学を創り上げるとはどのようなことなのか。先行研究をもとに，数学教育の意義を概観し，そこから，数学を創り上げる活動を明らかにしていく。

2.2. 数学教育の意義・目標にみる数学を創り上げる活動

中島（1981），古藤（1991）らは，数学教育の意義は，数学の文化遺産としての伝達と人格形成にあり，数学教育の目標は，特定の固定的な数学の知識や技能を習得させることだけではなく，学問としての数学が発展してきたように，数学にふさわしい創造的な活動を体験し，創造的に考察し処理する能力や態度の育成にあると述べている。

では，「数学にふさわしい」とは，どのようなことであろうか。中島（1981）は，創造的な活動の方向性を，数学の特性「抽象性，論理性，形式性」に対比させた価値観「簡潔，明確，統合」などで示している。つまり，「数学にふさわしい」とは，特に数学が発展する上で重要な統合を中心としたそれらの価値観によって，創造的な活動が方向づけられていることであり，数学にふさわしい創造的な活動こそが，数学を創り上げることであると捉える。

さらに，中島は，数学にふさわしい創造的な活動において，以下のような構造を持つべ

きであると述べている。（1981,pp.83-102）

①課題を，簡潔，明確，統合などの観点をふまえて把握する
②仮想的な対象の設定とその実在化のための手法
③解決の鍵としての「数学的なアイデア」の存在と意識化
④構造の認識と保存－特に，拡張，一般化による創造の手法と論理
⑤評価－解決の確認とその真価の感得，残された問題点と発展への志向

つまり，数学を創り上げていく授業において，これら５つの構造が現れ，生徒たちが推論する上で意識されなければならないと考える。次に，数学を創り上げていく過程でどのような推論が行われるべきであるか Lakatos や Lampert の先行研究をもとに，その様相を明らかにする。

３. 意識的な推論の意義

Lakatos（1980）は，その著書「証明と論駁」において，学問としての数学が，証明と論駁によって改良され，成長していく様子を，架空の教室における生徒の議論の形で示している。議論の中の教師は，以下のように述べている。（p.50）

発見は上下するのではなく，ジグザグの道をたどるのです。反例に小突かれ，素朴な推測から前提へと動き，再び戻って素朴な推測を削除し，定理で置き換える。<u>素朴な推測と反例は一人前になった演繹構造には現れません；発見のジグザグは最終的な結果にはっきり現れることはないのです。</u>（下線は筆者）

つまり，一人前になった演繹構造に現れることのない素朴な推測や反例に着目し，証明と論駁のジグザグ過程をたどる議論を行うことが，数学的な知識の発展につながると考えられる。すなわち，この証明と論駁のジグザグ過程において，推測の仮説となる数学的な知識を反例等により修正・発展することが，意識的な推論であると考える。

しかし，Lakatos の「証明と論駁」とは，学問としての数学の発展であり，架空の授業として表した議論であることに注意しなければならない。この証明と論駁の考えを，そのまま学校数学に取り入れることが妥当であるのか検討の必要がある。

大竹（1993）は，Lakatos が示す「証明」を，「推測を分割する思考実験もしくは議論」と解釈し，「証明は推測を正当化あるいは検証するものである。また，証明は演繹的な推論によるものとは限定しない。帰納的な推論や類推あるいは類比といったものでもかまわない。」（p.33）という新しい証明観として捉え，証明と論駁の考えを高校数学に取り入れようと試みている。しかし，Lakatos が示す「推測」は，一般化が意識されたものであり，これを学校数学にそのまま活用すると，活用範囲が限られてしまう。そこで，推測の意味を広げ，生徒の考えに基づいた結果（答え）も含める必要があると考察している。つまり，推測の意味を広げることで，この新しい証明観に基づいた証明と論駁の考えが，高校数学でも十分に可能であると捉える。

さらに，大竹は，この証明と論駁の考えを学校数学に取り入れていく意義を，「教師と生徒が共に数学を創っていく視点」と，「数学的な知識が社会的な相互作用の中で構成されるものであるという視点」にあると述べており，筆者も同様の立場をとることにする。

ただし，Lakatos の証明と論駁の前提には数学の可謬性（布川,1994）がある。しかし，学校数学では，ある程度，確定された知識が積み上げられていくものと考えるので，本稿では，そこまでの立場はとらないものとする。

４. 授業における意識的な推論の様相

Lakatos が主張する意識的な推論の過程を，

学校数学の議論において実現した研究者に Lampert がいる。Lampert（1990）は，伝統的な学校数学を学問としての数学に近づけようと試みた。小学校５年生の教室で，帰納的な態度，道徳的資質（Polya,1959）という意識的な推論を行う上で必要な価値観を取り入れた数学的ディスコース・コミュニティーを実現している。教師と子どもが共に「推測に始まり，反例や論駁を通して，仮定の検証に進むジグザグ道」（Lampert,1990,p.30）をたどる，つまり，意識的な推論の過程を議論で実現し，指数の性質を創り上げている。そこで，Lampert の指数の事例をもとに，意識的な推論の過程の具体的な様相を考察する。

4.1. Lampertの事例プロトコル

Lampert（1990）は，アメリカの小学校５年生に対して，以下のような学習問題を設定して，指数の授業を行っている。

【学習問題】

《学習問題１》1 から 100 までの平方表を作り，平方数のパターンを見つけよう。

《学習問題２》 5^4， 6^4， 7^4 の末尾の数は何でしょう。すべて計算しないで求めよう。

学習問題１に対して，子どもたちは，帰納的な観察をもとに，平方数の末尾の数の規則性を発見し証明した。その後，学習問題２の 5^4 の末尾の数について考えた。推測と証明，論駁のジグザグ過程をたどりながら， 5^4 の末尾の数に対する推測が，５の累乗すべての末尾の数や下２桁の数に対する推測へ発展している。さらに，その推測が，６の累乗すべての末尾の数に対する推測へと発展した。

その後， 7^4， 7^5 の末尾の数についての議論が行われた。その議論において発話された内容を以下に示す。（T は教師。複数発話した子どもには，名前の後に数を記す。）

【場面２】

T3 :「では， 7^5 の場合はどうなる？」

Arthur1 :「私は，また 1 になると思う。」

Sarah :「私は 9 だと思う。」

Soo Wo1 :「私は 7 になると思う。」

T4 :（7^5 = 1? 9? 7?と板書して），「Sam，あなたは心の中で正しいことを証明したに違いないわね。」 「Arthur，なぜ，あなたはこれが 1 だと思ったの？」

Arthur2「7^4 は 1 で終わるから，それにもう一回 1 をかけるから。」

Gar2 :「7^4 の答えは 2401 になる。その答えに 7 をかける。だから 7 × 1 だよ。」

T5 :「なぜ 9 なの？ Sarah。」

Theresa :「私は，Sarah が 4 9 に違いないと考えたのだと思う。」

Gar3 :「おそらくそれは 9, 1, 9, 1, 9, 1 となっていると思う。」

Abdul :「7^4 は 1 で終わるから，もし，それに 7 をかけるなら， 7 で終わることになる。」

Carl1 :「それは 7 だ。だって 49 × 49 × 7 ということだから。」

Arthur3 :「私はまだ 1 だと思う。だって，7 × 7 を計算して 49 になる。それから 7^4 は 49 × 49, 7^5 は 7^4 に 7^4 をかけるから 1 で終わると思う。」

T6 :「49^2 はいくつ？」

Soo Wo2 :「2401 だよ。」

T7 :「Arthur の理論だと 7^5 は 2401 × 2401 だから，ここの 1 とここの 1 で…。」

Soo Wo3 :「それ（7^5）は，（2401 × 2401 ではなくて，）2,401 × 7 だ。」

Gar4 :「それは 9 にならないことの証明にもなる。 7^3 は 3 で終わるから，9,1,9,1 にはならないはずだ。」

Martha :「私は 1, 7, 9, 1, 7, 9, 1, 7, 9 になると思う。」

T8 :「何で 7^3 の末尾は 3 なの？末尾の数は… 9 × 7 で 63 になるわ。」

Carl2 :「Abdul のはうまくいくから間違っていない。彼は末尾の数に 7 をかけると言った。そして末尾は 9 になったから，末尾は 3 だ。だから，1, 7, 9, 3, 1, 7, 9, 3 になるよ。」

Arthur4「私は考えを訂正したい。それは，7 × 7 × 7 × 7 × 7。今，私はそれを 7 × 7 × 7 × 7 × 7 × 7 × 7 × 7 と考えていた。」

4.2. 推測と証明，論駁のジグザグ過程

Lampert（1990）は，帰納的な観察と演繹的な議論を，推測と証明，論駁のジグザグ過程として捉え，推測を一般化する様相と，推測のもとにある仮説を修正する様相を考察している。

4.2.1. 推測の一般化

場面２では，教師の発問「7^5の末尾の数は何か」に対して３つの推測が出され，その推測に対する証明と論駁の議論がなされている。しかし，Gar3「おそらく，それは 9,1,9,1,9,1 となっていると思う。」，さらに，Martha「私は，1,7,9,1,7,9 になると思う。」，Carl2「だから，1,7,9,3,1,7,9,3 になるよ。」から分かるように，推測が7^5の末尾の数字から７の累乗の末尾の数字の規則性に発展している。Lampert は，この議論を「特定の領域で指数がどのように働くかについて立てた仮説のうち，どれが別の特徴をもつ新たな数の集合でも検証可能になるかという討論の場」（1990,p.52）と捉え，子どもたちは，５や６の累乗の末尾の数の規則性を７の累乗という新しい領域に拡張しようとしていると考察している。つまり，推測の一般化を行っている。

さらに，Lampert は，推測の一般化の過程に，類推的な推論が働いていることも指摘している（1990,p.49）。

Polya（1959）は，「一般化特殊化および類比は，数学の問題を解く際に共同で行われることが多い。」（P.16）また，「特に類比を用いることなしに，うまく運ぶことができるようなどんな発見もないであろう。」（p.18）と述べ，発見的な推論としての類推の重要性を示している。よって，推測する，または，推測を一般化する過程では，類推の考えが有効に働くことが示唆される。

4.2.2. 推測のもとにある仮説の修正，そのための論駁の重要性

Lampert は，Polya や Lakatos が述べる道徳的資質をもち，推測のもとにある仮説，すなわち，既有の数学的な知識を意識的に修正している子ども Arthur に注目している。

Arthur のはじめの推測は，「（Arthur1）また１になる。」である。その根拠として，まず，「（Arthur2）7^4 は１で終わるから、それにもう一回１をかけるから。」を挙げている。そこには，7^5は7^4×7^4で求めることができるという指数の作用の誤った理解が仮説となっている。この後に，Gar2 や Abdul，Carl1 が末尾は７になることを証明しているが，Arthur は，「（Arthur3）私はまだ１だと思う。だって、7 × 7　を計算して 49 になる。それから 7^4 は 49 × 49、7^5 は 7^4 に 7^4 をかけるから１で終わると思う。」と主張し，はじめて仮説が言語化されるが，修正できていない。

Gar2 や Abdul，Carl1 の発話により Arthur が推測を修正できなかった原因を考える。Gar らは，Arthur の１回目の根拠（Arthur2）から，Arthur の誤った仮説を把握できていなかったと思われる。そのため，Gar らの発話は，「７になる」という推測の証明にはなるが，Arthur の推測への論駁にはなっていなかったのである。しかし，教師の T7 と T8 の発話により，Arthur の誤った仮説が顕在化し，Soo Wo3 により，Arthur の誤った仮説を論駁する意見が出された。それによって，Arthur は自らの仮説の誤りに気づき，指数がどのように働くかを修正することができたと考える。

上記のように，Arthur を中心として発話に注目することで，推測に対する証明と論駁のジグザグ過程の中で，推測のもとにある仮説の誤りを修正する，つまり，数学的な知識を創り上げていく意識的な推論の様相を捉えることができた。しかし，ただ推測を否定する

だけの論駁では，推測のもとにある誤った仮説を修正するために有効に働かない。論駁する者が誤った仮説を捉え，正当化されるべき仮説と比較するなどして，的確に指摘することが必要であると考える。また，複数の推測が出されていたことも，そのもとにある仮説を意識して修正する上で，有効に働くと考えられる。

4.3. 反例による論駁

Lampert は，意識的な推論の過程で，反例の重要性を示している。事例の中でも，推測「５や６の累乗の末尾の数は基数と同じである」や「下２桁が基数の平方と同じなる」に対して，発展させた推測「１から９までどの数にでも当てはまるじゃないか」が出された場面で，具体的な反例「７^{2}は４９になる」や「６のときの末尾２桁も，いつも３６にはならない」を挙げ，推測の修正「もとの数と末尾の数は,いつも同じというわけではない」が行われた。しかし，ここでの反例による論駁が，その後の推論にどのような影響をもたらしているかは読み取ることはできない。

しかし，Lakatos は,「証明と論駁」の中で，推測の真偽を判断するのに，反例による論駁の重要性を示した。また，Balacheff（1986）も，反例の効果をモデルで示し，その重要性を示している。Balacheff は，反例が証明や命題・推測だけでなく，知識背景や合理性への効果を生むということを強調している。

手島（1994）も，「証明が推測した事柄の正当化や検証を対象に据えるとするならば，そこに有効に働きかけてくるのが反例による推測の見直しである。」（p.3）と述べ，反例による論駁の重要性を示している。しかし，子どもたちの実態を見たとき，反例を見出すことが困難であることも指摘している。その原因として，学校数学の指導法を挙げ，授業の中で，推測することやその仮説に問題意識をもつ姿勢をつくることが必要であると述べている。

つまり，推測の仮説に着目し修正するためには，反例を挙げることが有効であることが分かる。しかし，生徒は適切な反例を挙げることが困難であるので，教師の支援が必要であることが示唆される。

4.4. 考察

Lampert は，Lakatos の意識的な推論を，推測と証明，論駁のジグザグ過程として，小学校の算数の授業で実現した。その推測と証明，論駁のジグザグ過程では，数学的な知識を発展させる様相と，修正する様相が見られた。

その２つの様相に共通して見られたことは，推測や証明の未熟さや誤りに対して，新たな推測や証明が出されたり，反例などをもとに論駁したりするジグザグ過程をたどる推論が行われていることである。その過程では，推測のもとにある仮説が意識され，議論の中で顕在化することによって，数学的な知識として発展したり，修正されたりしている。

また，推測を新しい推測に発展させる過程や，証明から新しい証明を導く過程では，既有の知識と結びつけ類推的な考えが働いていることも明らかになった。そして，推測や証明の確信を高めたり,反例を見つけるために，事例検証とのジグザグ過程も明らかになった。筆者は，このジグザグ過程を数学を創り上げるための意識的な推論と考える。しかし，Lampert の事例は，小学生を対象とした特殊な事例である。よって，中学校数学においても妥当であるのか検討する必要がある。

5. 筆者の推論過程にみる意識的な推論の考察

Lampert の事例に見られた意識的な推論の過程の様相が，中学校レベルの数学の推論過程でも起こりうるか，筆者の推論過程をもとに検討する。

5.1. 取り上げる学習問題と筆者の解決過程

古藤（1990,1995）が取り上げている７の倍数判定法の事例をもとに，学習問題を以下のように設定する。

【学習問題】

かけ算九九表を使って，○の倍数のきまりを見つけよう。

【かけ算九九表】

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

この学習問題は，倍数の規則性に着目し，一般化しようと試みることにより，倍数の判定法に発展する可能性があるものである。つまり，数学を創り上げていくことができる問題として取り上げる。まず，筆者自身がこの問題に取り組み，どのように推論していったか，７の倍数までの概略を簡単に示す。

《①一位の数の規則性に着目》

・２の倍数…一位の数が２の倍数。

・５の倍数…一位の数が０か５。

《②各位の数の和の規則性に着目》

・９の倍数…各位の数の和が９になる→各位の数の和が９の倍数になる。

※ここから，問題が倍数の規則性から倍数の判定法に変化する。

・３の倍数…各位の数の和が３の倍数ならば３の倍数。

《③各位の数の関係がその倍数になることに着目》

・４の倍数…下２桁が 00 ならば４の倍数である。下２桁の数は，４の倍数４から 96 がくり返される→十位の数の２倍と一位の数の差が４の倍数ならば，４の倍数になる。

・６の倍数…十位以上の数の２倍と一位の数の差が６の倍数ならば６の倍数。その差が大きい場合は，同じことをくり返せばよい。

《④一般化されている判定法を活用する》

・６の倍数…２と３は互いに素なので，６の倍数は，２の倍数かつ３の倍数である。

5.2. 筆者の7の倍数判定法を見つける推論過程

筆者の７の倍数判定法を見つける推論過程を以下に詳しく示す。（文頭の［数］は，推論の順序を表している）

※［1］［2］［3］の推測が、ほぼ同時に起こり、［1］の検証から行った。

［1］2,5,4 の倍数の判定法は簡潔であるので，一位の数や下２桁の数に規則性がないかと推測する。

［2］２桁の７の倍数を 200 台まで列記し，事例検証をする。しかし，一位の数が 7,4,1,8,5,2,9,6,3,0 をくり返すが，７の倍数の判定法に結びつかないと判断する。

［3］9,3 の倍数のように，各位の数の和や差が７の倍数にならないか推測する。

［4］２桁の７の倍数の範囲から２つの数を取り出し，各位の数の和や差が７の倍数にならないか事例検証する。しかし，各位の数の和も差も，７の倍数にならない。

和… 14 : 1+4=5，35 : 3+5=8

差… 14 : 4-1=3，35 : 5-3=2

［5］4,6 の倍数のような，一位の数の２倍が十位の数になる数（21，42，63）が，２つおきに出てくるので，一位の数の２倍と十位以上の数の差が，７の倍数になるのではないかと推測する。

［6］［5］について事例検証する。

28 : 8 × 2-2=14，35 : 5 × 2-3=7

［7］差は７の倍数になるという確信が高まる。さらに，大きな２桁の７の倍数に対して，事例検証を行う。

63 : 3 × 2-6=0，91 : 9-1 × 2=7

［8］さらに，確信が高まったので，３桁以上の７の倍数で成り立つか，計算機を活用して確かめる。105，364，1757 を事例検証する。

［9］1757 のとき，差が 161 になり，７の倍数か

判断できない。そこで，６の倍数の判定法の考え（③）を用いて，差が大きな数になってしまったときは，もう一度，一位の数の２倍と十位以上の数の差を調べればよいと考える。

［10］161 について検証し，161 が７の倍数であることを確認する。

［11］一位の数の２倍と十位以上の数の差が，７の倍数になればよい。そして，差が大きかったら，もう一度同じことをして，７の倍数か確かめればよいと推測する。

［12］［11］の推測が、桁数の大きな７の倍数でも成り立つだろうという確信を得たので、文字式を用いて説明しようと考える。4,6 の倍数判定法で行ったように，７で割り切れる数と割り切れない数に分けようと考える。

a を自然数，b を９以下の自然数または０として，

$$10a+b = 7a+\underline{3a+b}$$

［13］下線部が一位の数の２倍と十位以上の数の差にならないので, a-2b を導こうと考える。

$$10a+b = 7a+3a+7b-6b$$
$$= 7(a+b)+3(a-2b)$$

［14］文字を活用して説明されたので，推測に対する確信を高めた。しかし，今までの倍数判定法と比較すると，７の倍数の判定法は複雑である。そこで，4,6 の倍数判定法のように条件を２つにすることで，判定法を簡潔にすることができないか考える。

［15］そこで，［12］の式を見直す。

a,b を９以下の自然数または０として，

$$10a+b = 7a+\underline{3a+b}$$
$$= 7a+\underline{2a}+\underline{a+b}$$

［16］a+b が７の倍数であるとすると，2a も７の倍数でなければならない。つまり，a も b も７の倍数ということになると考える。

［17］［16］の条件に当てはまる具体的な数を事例検証する。(7,70,77)

［18］３桁の７の倍数で，［15］［16］のように考えることができないか式変形を試みる。

a,b,c を９以下の自然数または０として，

$$100a+10b+c = 98a+7b+2a+3b+c$$
$$= 98a+7b+\underline{a+2b}+\underline{a+b+c}$$

［19］a+b+c …(1)が７の倍数であるとすると, a+2b …(2)も７の倍数でなければならない。a,b,c の条件を導くために，(2)－(1)をすると，b-c が導かれ，これも７の倍数である必要があると考える。

［20］整理すると，a+b+c が７の倍数で，b-c も７の倍数であればよいと考えられる。

［21］［20］の条件に当てはまる具体的な数を事例検証する（7,70,77,133,266,322,…)。これによって，［16］も含まれることが分かった。

5.3. 筆者の推論過程の分析

筆者の推論過程においても，Lampert の推測と証明，反例による論駁のジグザグ過程が見られた。そして，そのジグザグ過程には，誤った推測を修正する様相と，推測を発展させる２つの様相が見られた。

5.3.1. 誤った推測を修正する「推測と証明，反例による論駁のジグザグ過程」

［1］から［6］では，推測［5］「一位の数の２倍と十位以上の数の差が，７の倍数になればよい。」を導くまでの過程で，３つの推測と事例検証，反例による論駁のジグザグをたどっている。はじめの推測を立てるために，今までに明らかになった倍数の規則性の視点（5.5.の①～③）が数学的なアイデアとして働き，簡潔な規則性を見つけたいという価値観のもと，［1］，［3］，［5］の順序で推測が立てられている。しかし，推測［1］「一位の数や下２桁の数に規則性がないか」と［3］「各位の数の和や差が７の倍数にならないか」は，具体的な７の倍数をあてはめるという事例検証により，推測に合わない結果（反例）により論駁され，推測の修正を行った。そして，4,6 の倍数の特徴が７の倍数にも発見され，推測［5］「一位の数の２倍と十位以上の数の和や差が，７の倍数になればよい」が立てられた。ここには，類推的

な考えが働いている。この推測［5］は，２数の事例検証［6］によって，確信が得られた。この推測と事例検証，反例による論駁のジグザグ過程では，誤った推測を修正していく様相を捉えることができる。

5.3.2. 推測の確信を高める「推測と証明のジグザグ過程」

［7］から［13］では，推測［5］「一位の数の２倍と十位以上の数の和や差が，７の倍数になる」と証明のジグザグをたどっている。この過程で注目することは，証明の方法が具体的な事例検証から文字の式を活用した抽象的な証明に変更されていることである。そこで，この変更の過程を考察する。

この証明の方法の変更には，推測への確信が大きく関わっている。推測［5］に対して，２桁の７の倍数の事例検証（[6]，[7]）が２回行われ，推測［５］への確信を高めた。次に，３桁以上の７の倍数の事例検証（[8]）が行われ，推測の適用範囲が広がったことにより発展された推測［11］が導かれ，推測への確信がさらに高まった。そこで，推測［11］を一般化することができると考え，文字の式を活用した抽象的な証明に変更したと考える。つまり，この推測と証明のジグザグ過程では，事例検証により推測の確信を高め，証明方法を変更して推測の一般化を図ろうとする様相を捉えることができる。

5.3.3. 一般化された推測から新しい推測を導く「推測と証明のジグザグ過程」

［14］から［21］では，一般化された推測［11］「一位の数の２倍と十位以上の数の和や差が，７の倍数になる」から新たな推測［14］「4,6 の倍数判定法のように条件を２つにすることで，判定法を簡潔にすることができないか」を立て，推測と証明のジグザグ過程をたどっている。この過程で注目することは，一般化された推測から新たな推測が立てられていることである。

［14］において，今までの倍数判定法と７の倍数判定法の評価が行われ，７の倍数判定法の複雑さを感じた。そこで，７の倍数判定法を簡潔するために，簡潔である 3,9 の倍数判定法と，２つの条件をもつ 4,6 の倍数判定法の考えを類推的に７の倍数にあてはめようとしている。この過程では，「簡潔」「統合」などの数学的な価値（中島,1981;中村,2005）が働いていると考える。その結果，［20］のように，局所的ではあるが，数学的な知識を統合，発展した推測を一般化することができたと考える。

また，この過程では，抽象的な証明（[16]，[19]）の後に，具体的な事例検証（[17]，[21]）が行われている。この事例検証は、一般化された推測の確信を高めるために行われている。Polya（1959）は，これを「帰納的な態度」とし，発見的な推論における重要性を指摘している。

この推測と証明のジグザグの過程では，一般化された推測を数学的な価値観によって見直し，さらに新しい推測を立て証明する様相を捉えることができた。また，抽象的な証明と具体的な事例検証のジグザグ過程も捉えることができた。

5.4. 考察

倍数の規則性を求める問題は，倍数の規則性に対する推測を一般化しようと試みる過程で，簡潔な倍数の判定法を見つける問題へと変化した。その推論の過程において，Lampert（1990）の事例から明らかになった「推測と証明，論駁のジグザグ過程」が見られた。そのジグザグ過程には，推測を修正・発展させる様相として，「誤った推測を修正する様相」と，「推測の確信を高めて一般化する様相」を捉えることができた。さらに，Lampert の事例には見られなかった「一般化された推測から新しい推測を導く様相」も捉えることができた。これらのジグザグ過程をたどるには，

Lampert の事例と同様に，既有の数学的なアイデア，既有の知識と結びつけた類推的な考えが大きく関わっている。さらに，数学的な価値観（中島,1981;中村,2005）による評価が重要であることも新たに明らかになった。

しかし，Lampert の事例に見られた「推測のもとにある仮説を修正する様相」が筆者の推論過程から捉えることができなかった。つまり，推測のもとにある仮説が顕在化せず，数学的な知識の発展や修正を捉えていないのである。ここには，推論を行う上で，仮説を意識することの困難さも関わっていると考える。よって，意識的な推論を考察するためには，Lampert の「推測と証明，論駁のジグザグ過程」を，仮説に焦点をあてて構造化するなど検討の必要がある。

また，この事例は，あくまでも数学に関わっている筆者の推論における考察である。数学の授業において意識的な推論が行われるかは検討の必要がある。

6．おわりに

本稿では，Lakatos の意識的な推論をもとにした Lampert の「推測と証明，論駁のジグザグ」の概念を事例から考察し，数学を創り上げる意識的な推論の具体的な様相を明らかにした。しかし，数学的な知識の修正や発展を捉えるために，ジグザグ過程の構造化について検討する必要がある。また，数学的な価値観や数学的な考え方と，ジグザグ過程の関わりを明らかにする必要があると考える。これからは、これらの課題を、先行研究を精読し，事例を分析しながら検討していく。そして，中学校の数学における「推測と証明，論駁のジグザグ」の概念の妥当性を検討していく。

【引用･参考文献】

大竹宏二.（1993）.「証明と論駁」に基づく高校数学の指導.上越教育大学大学院修士論文,未公刊.

大竹宏二.（1995）.「証明と論駁」に基づく学習指導の教育的価値－高校数学の授業実践－.上越数学教育研究,*10*,153-162.

国立教育政策研究所,教育課程研究センター.（2005）.平成 15 年度小・中学校教育課程実施状況調査分析結果の概要.

古藤怜.（1990）.ﾗｯｷｰ・ﾅﾝﾊﾞｰ７-７の倍数のもつ性質-.楽しい算数の授業,55（4），（pp.4-5）.明治図書.

古藤怜・上越数学教育研究会Σ会著.（1995）.算数・数学における Do　Math の指導.東洋館出版社.

手島勝朗.（1994）.対角線についての反例による反駁-認知的葛藤の生成と解消を求めて-.上越数学教育研究,*9*,1-10.

中島健三.（1981）.算数・数学教育と数学的な考え方.金子書房.

中村光一.（2005）.授業における数学的対象に関する考察：数学的価値観の観点.数学教育論文発表会論文集,*38*,463-468.

布川和彦.（1994）.ラカトシュ理論の数学的問題解決論への援用.上越数学教育研究,*9*,23-32.

Balacheff.N.（1986）.Cognitive versus Situational Analysis of Problem-Solving Behaviors.*For the Learning of Mathematics 6,3,pp.10-12.*

Polya.G（柴垣和三雄訳）.（1959）.数学における発見はいかになされるか 1「帰納と類比」.丸善.

文部科学省.（1999）.中学校学習指導要領（平成１０年１２月）解説-数学編-.大阪書籍

Lakatos.I（佐々木力訳）.（1980）.数学的発見の論理-証明と論駁-，共立出版株式会社.

Lampert.M.（1990）.When the Problem Is Not the Question and the Solution Is Not the Answer:Mathematical Knowing and Teaching.*American Educational Research Journal,27（1）*,pp29-63.