上越数学教育研究，第 21 号，上越教育大学数学教室，2006 年，pp.201-210.

小学校算数の授業構成における図的表現に関する研究

－認識論的三角形を視座として－

柳　健
上越教育大学大学院修士課程 1 年

1．はじめに

これまで、現場で具体と抽象の世界を結ぶ役割を果たすイメージモデルを大切にしながら算数の授業を行ってきた。金子(1996)は

> 問題文脈に適合したイメージモデルを手がかりに、記号的操作、概念操作を行う(p.7)

とし特に〈水平的数学化活動を中心とした問題解決活動〉の中での一連の活動におけるイメージモデルの役割を述べている。

このイメージモデルが数学における抽象的な概念を、より具体的に表現しているものであるとの考えから、イメージモデルの決定を教材開発の柱として授業を構成してきた。

例として、高学年の算数では、演算の決定場面において比例数直線を柱とした授業の構成を行ってきた。これは比例数直線が二量の関係を考える際のイメージモデルとなり、その問題構造を表現しているという点で適切であるという教師側の解釈が前提としてあったためである。このイメージモデルが問題構造を明らかにすることにより、子どもが問題を解決するにあたっての重要な方策の意図を示す等の役割を果たすことができると考え、現場で実践をしてきた。

しかし、全ての子どもに有効に機能させるまでには至らなかった。例えば、6 年生の「倍と割合」の単元ではイメージモデルとして設定した比例数直線に数字や数直線の項目を問題文脈に即してあてはめることができない子どもが続出した。

また、一見イメージモデルを積極的に活用しているように思われる子ども達であっても出題の仕方に若干手を加えるだけで太刀打ちができなくなってしまうという状況も生まれた。

上記のようなことを教材解釈の段階で想定はできなかったのかという疑問は当然のこととして生じる。この点については、教材解釈の中心が学級の学力実態と難易度を中心とした教材との関係から最も適切と思われる内容と方法を吟味し、実践するということに重きをおかれていること、そして、それらを具体的に分析・評価する視座が欠如していることが現場での経験から強く感じられるようになってきた。

本当に算数・数学を理解することとは数学的概念を獲得することである。数学的概念を子ども達が身につけるためには構造的な理解を得なければならない。

算数では自分の考えを表現し、他の子ども達に伝え、評価し合えることをその目的とした場合に、全体で共有しやすい図的表現が最も有効であると考えた。

そこで、特にイメージモデルのような図的表現に焦点をあて、これを用いながら算数概念の構造的理解を意図した授業をいかに構成できるかについて、認識論的三角形を視座に研究をすすめていく。

２．算数における図的表現

2.1 表現方法について

中原（1999）は算数の学習における絵や図、式、学習具などの様々な表現を有効に活用することによって、子どもたちの算数的知識の構成を促進するとし、ブルーナーの EIS 原理をもとに算数・数学における表現方法を次の５つに類型化した。

E1：現実的表現…実世界の状況、実物、具体物などによる表現

E2:操作的表現…学習具などに動的操作を施すことによる表現

I：図的表現…絵、図、グラフなどによる表現

S1：言語的表現…日本語、英語など日常言語を用いた表現

S2：記号的表現…数字、記号など数学的記号を用いた表現

さらに、図的表現の基本的な記号的、認知的特性としては、２次元的、静的で、指示対象と類似性をもつ表現であることをあげている。

これまで現場でイメージモデルとしてとらえてきたものは、I の図的表現に相当する。子どもの表現方法を親しみやすさという観点から図的表現のみに限定し、教師の側で理想とする表現の形式をあらかじめ推測し、いかにそれに子どもの表現を近づけられるかという授業を構成しようとしてきたことが実に多くあった。表現体系全体における図的表現の役割、あるいは図的表現そのものについての構造的な理解といった全体的な視野が不足していたことは明らかである。

2.2　図的表現

田中(2003)は「算数的表現法」として「絵や図にかいて考える指導」を提案し、図の２通りの役目として

その１

わからないことを解決するための図

その２

わかったことを説明するための図

と分類し、

> この２通りの役割を一緒に指導しようとするから、子どもたちは混乱するのである。(p.60)

と述べている。

つまり、教材解釈の上で想定している図というのは数学的内容をすでに知っている教師の側からの視点でつくられているという点で、教師が「説明するための図」そのものであることが言える。また、

> 市販の問題集などでは、関係の読みとりにくい時には、線分図やテープ図がついていることがある。でもこれは一番考えなければならないところを奪ってしまっている。(p. 60)

とし、文字から図への移行の困難さについて述べている。

本来、授業の中でねらうべき表現は、子どもが「わかったことを説明するための図」であるだろう。教材解釈にあたっては子どもの視点から今わかっていることをいかに表現していくかという図的表現をねらうべきであり、授業の中ではその図的表現の中から子どもの意図をつかんでいくべきである。

３．視座としての認識論的三角形

3.1 数学的知識の理論的概念

Steinbring(2002)はその著書の中で

> 記号なしに、人間の考え方や内的一般化は存在しないだろう(p.1)

とし、記号の重要性を述べている。

記号は思考に欠くことのできない、とても重要なものである。さらにSteinbring(2002)は、一般的に思考の際に用いられる記号の中でも、特に数学的記号のもつ特徴をあげている。記号(sign)はあくまで道具であり、何かによって意味づけられることによりはじめて有効となる。それが指示の対象（refference object)との関係性である。

object/ ⟷ **sign/**
refference context **symbol**

図１ 記号と指示の対象との関係性

数学的記号については２つの役割をあげている。１つは記号的機能、もう１つが認識論的機能である。数学的記号に対して結びつけられた解釈はさらに記号に対して新たな状態を決定する。それが数学的知識の理論的概念である。

3.2 記号について

Steinbring(2002)は、中原の表現方法に相当するものを「記号」と表現し、認識論的三角形における指示の文脈と概念との関係から互いに依存し合う記号として以下の４つをあげている。

①deictic sign（直示的記号）→直接、何かを指し示したりしながら考えを伝えようとする行為そのもの。これは学習者が指示の文脈に対して、直接指し示したりする行為をさしている。

②verbal sign（言語的記号）→言葉を使いながら自らの考えを伝えようとする行為そのもの。これは指示の文脈に対して言語によって学習者のとらえを表現しようとする記号をさしている。授業場面でいう学習者の発言である。

③written sign（文字的記号）→何らかの記号を用いて自らの考えを伝えようとする場合に用いられる文字。立式などにより、指示の文脈から学習者がとらえる概念を端的に表現するものである。

④graphical sign（図的記号）→それ単独では意味がないものでも与えられる状況により独自の意味を作り、自らの考えを伝えようとする場合に用いられる図。指示の文脈に○をつける、線を引く等、図によって関係や構造を表現しようとするものである。

3.3 数学的記号について

数学的記号のもつ特徴としてSteinbring (2002) は次の３点をあげている。

①数学的知識や数学的概念を記録することに役立つ。

②数学的知識を符号化したり述べたりするため、数学的知識を伴った操作同様に数学的知識知識を交流するため、一般的な方法でそれを発展させるための道具として見られる。

③数学的知識を発展させるための他の人達とのコミュニケーションに用いられる文化的道具でもある。

また、数学的記号としての記号の特殊性について、

①それ自身が構造、関係を具体的に表現している。

②記号と指示の対象との間の仲介には、学習者の中ですでに関係づけられている数学的概念が必要とされる。

としている。

固有の概念を完璧に表現できる記号など存在はしない。あくまでも指示の文脈との関係性が重要なのである。

これを実際の授業で置き換えてみるならば、子ども自身のもっているアイデアは記号そのものである。それらを用いて教師の用意する教材という指示の文脈に対してアイデアを表現していく。そして、学級内で子ども同士の相互作用が行われる中で数学的概念は構成されていくのである。

3.4 認識論的三角形とは

Steinbring(2002)は著書の中で

数学は知識を記録したり、符号化したりするために確かな記号や記号的枠組みを必要とする。
数学的記号と指示の文脈、および数学的知識の認識論的な条件によって影響を受ける記号と指示の文脈

との間の仲裁の関係は、認識論的三角形に基づいて説明することができる。(p.2)

と述べている。

対象／指示の文脈、記号、概念の３つの関係を表すのが認識論的三角形である。また、

最初、これらの記号はそれ自身に意味を持っていない。意味は認識論的な対象により、適切な指示の文脈への仲介を確立することによって生み出されなければならない。(p.2)

これにあるように、学習における新習事項とはここでいう意味(meaning)であり、対象／指示の文脈と記号との仲介を認識論的な対象である学習者により確立されることで概念として確立されるものである。

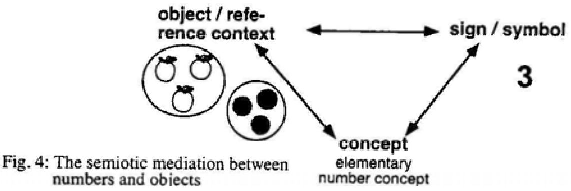


Fig. 4: The semiotic mediation between numbers and objects

図２

上の図の例は、３つのみかん、あるいは３つの黒丸が指示の文脈であり、３は記号に対応する。指示の文脈であるみかん（黒丸）と数字記号の３との関係から学習者は数学的な３という量、つまり初歩的な数概念を獲得するのである。

４．授業の実際

認識論的三角形は「指示の文脈」、「記号」、「概念」の３つの関係から成立している。

学習者の認識、知識の構成過程を授業の中ではつぶさにとらえることができること、それをあらかじめ想定することで事前に授業をデザインすることができること、授業後には明らかになったプロトコルに対して３つの関係を改めて抽出し授業の評価につなげることができるという点でこの認識論的三角形が有効であるというとらえからこれを本研究における分析の視座として採用するものとした。

認識論的三角形を分析の視座として授業を構成しようとする場合、その役割として次のことが考えられる。

①子どもが与えられた課題をどう受け止めているか→指示の文脈に何を用いているかがわかる。

②子どもが何を使って説明しようとしているか→記号に何を用いているかがわかる。

③子どもがどんな概念を獲得したのか（しつつあるのか）→指示の文脈に何を用い、記号に何を用いているかがわかる。

④子どもにとって説明をしている子どもの指示の文脈、記号は一致しているのか

今現在、教室の中で話題になっていることは何なのか？それは学級内での指示の文脈、記号、概念は何なのか？と実際の授業を想定し､授業を構想することが可能であるならば、それを認識論的三角形を分析の視座として評価しながら授業を組み立てることが可能であると考えた。

５．具体的な場面の分析と解釈

これまで行ってきた現場での授業を認識論的三角形の枠組みから分析し、改善点を探っていく。

ここでは本課題におけるイメージモデルを用いた指導が、その後の練習問題にどのような形で反映されたかという結果をもとに指導過程の分析と考察を行うこととする。

5.1 実践例　６年下「倍と割合」

本課題は次の通りである。

ゆき子さんたちはソフトボール投げをして、投げきょりをくらべました。平均は 18 mでした。 ①ゆき子さんの記録は 24 mです。24 mは平均の倍でしょうか。分数で表しましょう。

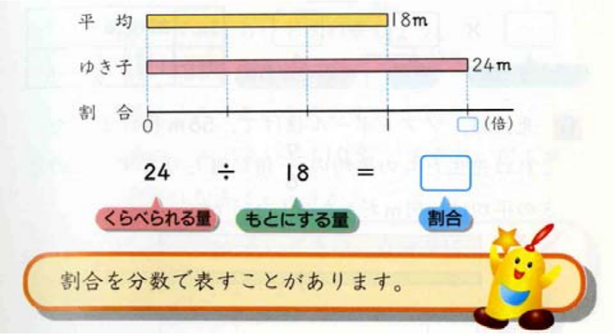


図3 本課題①

②ひろ子さんの記録は 15 mでした。平均の何倍でしょうか。

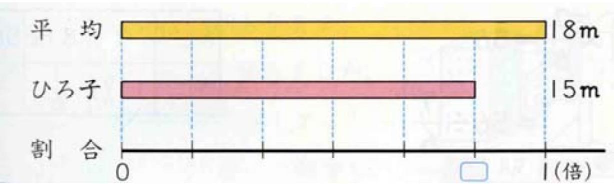


図4 本課題②

新修事項を子どもたちに理解させようとする時に、伝えようとする教師、伝えられる子どもという視点からすれば、帯図２本と数直線の組み合わせは帯によって２つの量の違いが視覚的に表現され、数直線によって関係が表現されているという点でわかりやすく非常に有効である。

しかし、子どもが教師の手を離れ、自ら課題を解決しようとする段階に至る時、大きなギャップが生まれることとなる。それが関係の表現、問題の構造を表すことである。教科書におけるイメージモデルを子どもが自由に使いこなせないのであれば全く意味はない。そこで端的に表現することができること、そして関係が表されていることというよさを考え、２本の平行な数直線による比例数直線をここでのイメージモデルとして設定し、実践を行うこととした。

教科書にある図を下記のものに差し替え、小問題、言葉の押さえはその後のイメージモデルを子どもたち自らが表現できるように意識しながら授業を進めることとした。

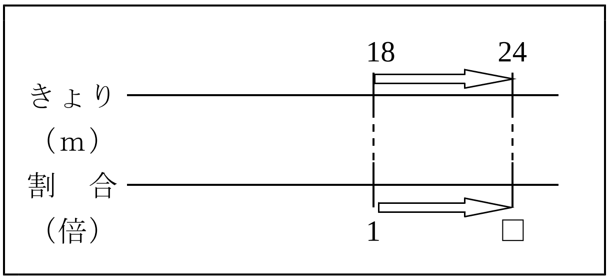
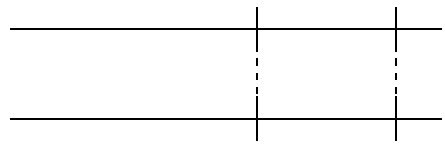


図５ イメージモデル本課題①

上記のようにした理由として、きょりを同一直線上に表現する方がより自然ではないかと考えたこと、きょりと割合との１対１の関係で考えてもらいたかったことがあげられる。

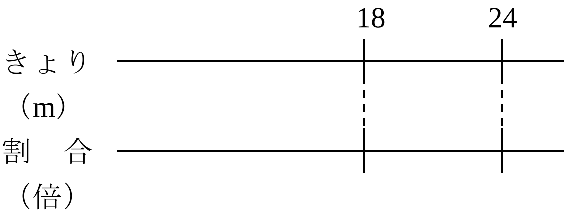
また、前単元の「分数のかけ算とわり算（２）」で同様の経験をしたばかりでありその経験が残っているであろうこともその理由としてあげられる。およその流れは以下の通りである。

～問題文を板書後、子どもは同じくノートに視写。問題文を全員で声に出して確認。その後、項目、数字の入っていない比例数直線を問題文の下に板書。～

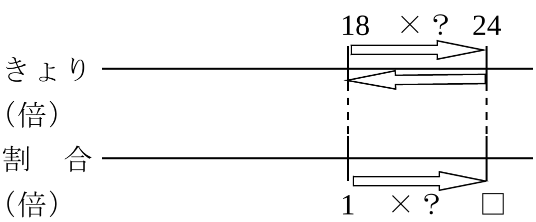


T1:みんながわかっていることは何？
C1:ソフトボール投げをしたこと。
C2:平均が 18m だったこと。
(黒板の問題文に赤で下線を引く)
C3:ゆき子さんの記録が 24m だったこと
（黒板の問題文に赤で下線を引く）
T2:あとまだ何かある？
CC:それだけ…かな。
T3:では、わかっていることを比例数直線の上にあてはめてみましょう。
T4:上の数直線をきょりにしましょう。
（比例数直線に「きょり」の項目を記入）
T5:単位は何だっけ？
CC:メートル
T6:そうだね。平均が 18m で、ゆき子さん

が 24m だからどっちがどっち？
（上の数直線の２点を交互に指しながら
C4:18 の方が小さいから 左、24 が右。
T7:そうすると下の数直線は何？
C5:何倍か
C6:割合
T8:そうだね。これは割合で単位が（倍）
（比例数直線に「割合」「倍」を記入）



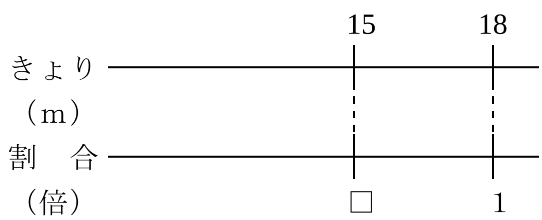
T9:求めるものは何だったっけ？
C5:ゆき子さんの記録は 24m です。24m は平均の何倍でしょうか。
T10:そうするともとになるのはどっち
C6:18m の方。
T11:そうだね。じゃあ、18m の下に１として。わからないところが□と。これでいいですかね？
T12:それでは□の中をどうやって求めたらいいかな？
C7:ここが（１から□に向かって指しながら）何倍になっているかがわかればいい
T13:ここね（１から□に向けて→をひき、×？と記入)。
T14:じゃあ、何がわかればここが何倍かがわかるかな？
C8:ここが（18 から 24 に向かって指しながら）何倍になっているかがわかれば、さっきのところも同じくなっているはずだから答えがわかる。
T15:ここからここね。(18 から 24 に向けて→をひき、×？と記入)



T16:それはどうすればわかりそう？
C9:24 ÷ 18 だと… 18 分の 24 だから約分して３分の４です。
T17:ということは何倍？
C10:３分の４倍。
T18:じゃあ、下は？
C11:下も同じだから３分の４倍で、□の中は３分の４になります。
T19:では、まとめてみましょう。

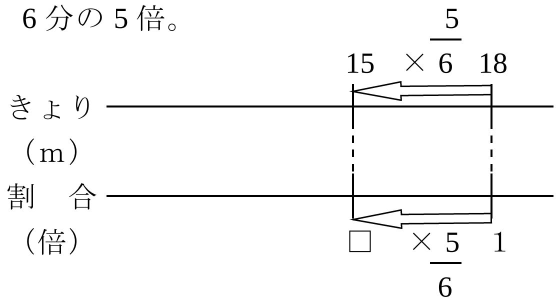
この後、数式 24 ÷ 18 ＝□、言葉の式「比べられる量÷もとにする量＝割合を対応させながら板書。

本課題②についても比例数直線をうめるところまでは同様の流れをとりながら授業を進めた（以下､前問の C7 に相当する部分から)。



T20:今度は、□の中をどうやって求めたらいいかな？
C12: 1 に何かをかけたら□になるんだから（１から□に向けて矢印と×？を記入）
18 を何倍したら 15 になるかがわかればいい。
（18 から 15 に向けて矢印と×？を記入）
C13:何倍かを求めるのに左にむかっていってもいいの？
C14:左に行くと小さくなるのに何倍で考えられるの？
C15:0.5 倍とかいうこともあるからいいと思う。
C16:もとになる量はさっきと同じで平均の 18 だから前の式にあてはめればやり方としてはあっていると思う。
T21:何倍になってるかわかりそう？
C17:15 ÷ 18 を計算して 18 分の 15 だから

6 分の 5 倍。



C18:だから□の中は 6 分の 5 になります。

この後、①同様に数式と、言葉の式を対応させながら板書し、あらためて確認をおこなった。それから、練習問題に移っていった。

□にあてはまる数を分数で求めましょう。

① 15 mは、9m の□倍

② 35kg は、42kg の□倍

以下、その後の練習問題①の取り組みの様子を例に述べていく。ここで教師の側が期待するイメージモデルは図 6 であった。

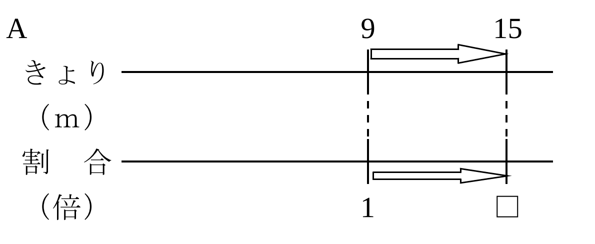


図6 イメージモデル練習問題①

個別の学習に移る前に数値、項目の入っていない数直線のみが書かれたワークシートを配布した。ここからは、それに自ら数値と項目をあてはめて考えるようにした。イメージモデルの作成を学習者に委ねることで作成の過程の中で構造をつかませたいという意図があった。さらにはこのイメージモデルを足がかりにして、問題構造の把握、立式、解を導かせたいという意図もあった。

すぐに机間指導をしながら確認を行った。しかし、こちらの意図の通りに表現した子どもたちはごく一部であり、おおむね表現されたのは以下のパターンに類別された。

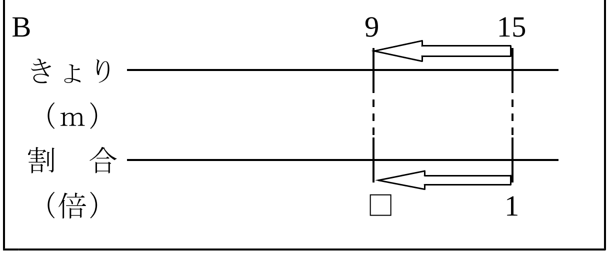


図7 イメージモデルB

B：くらべられる量ともとにする量を誤ってとらえているもの。

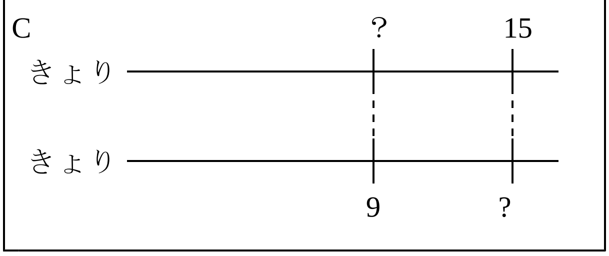


図8 イメージモデルC

C：きょりに着目をして 2 本の数直線を表現しているものの 2 本の関係（求めようとする倍の関係）をどう表現すればよいかが不明のもの。もとにする量 1 、求める量が決まっていない。

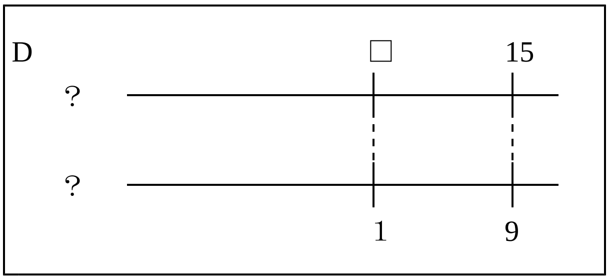


図9 イメージモデルD

D:それぞれの数直線が何に対応しているのかが不明のもの。 3 つの数字と□を無意図にならべたもの。

さらには、全く手がつかないという子どもも一部に見られるという状況であった。

教師の側としてはこれら B ～ D について

A に修正を向けるような支援をどう行っていくかということが授業の中で即座に必要とされることとなる。B ～ D の表現は誤っているもの、あるいは不十分なものであり、答えを導くことが困難であるだろうという教師の判断からである。

5.2　分析と考察

4.1 であげた問題点について、何がその要因であったのかその要因を認識論的三角形をもとにしながら分析をおこなっていく。

以下に表記する認識論的三角形は全て図10 に対応する。

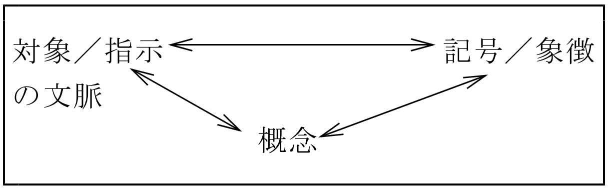


図10 認識論的三角形

A’は A についての認識論的三角形に対応する、B,C,D についても同様である。

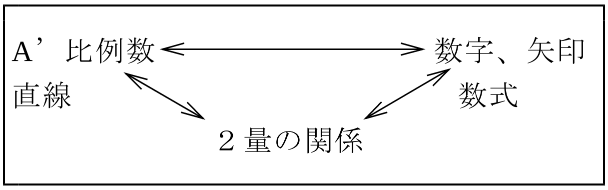


図11 認識論的三角形A’

図 11 における指示の文脈は「比例数直線」である。記号は「数字、矢印、数式」、概念は「２量の関係」である。

本課題②におけるプロトコル C13 から C16 のやりとりの中で、これまでの右向きの矢印（図的記号）が×を表しているという既習の知識に対し、左向きでも×を表すことができるという新たな意味づけを行っている。さらに C16 の部分で、式（文字的記号）によってこれを確認し、その結果として指示の文脈である比例数直線を新たにとらえ直している。本課題①、②を通してこの課題における一般化を行ったのである。

図 6 は本問題における構造を比例数直線上で的確に表しており、比例数直線をすでに自分のものとして使いこなしているととらえることができる。イメージモデルが「わかったことを説明するための図」となっている。

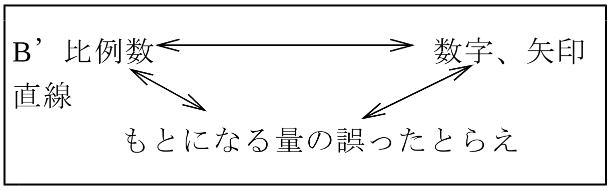


図12 認識論的三角形B’

図 12 における指示の文脈は「比例数直線」である。記号は「数字、矢印」、概念は「もとになる量の誤ったとらえ」である。A 同様に比例数直線は指示の文脈として使いこなせる段階にあるととらえる。しかし、問題文の読み違えからか、もとになる量 1 の位置を逆にしてとらえている。その要因として、問題場面はおよそ正しくとらえようとしているものの、プロトコル T9 から T11 のやりとりの中に表れている、「もとになる量を 1 とするのに対し、わからないところを□とする」という相対的な関係づけについて自分の中で十分な了承が得られなかったことが予想される。

また、本課題①、②を通してこの課題解決についての一般化がなされておらず、別個の課題であるととらえているために□と 1 の決定に対し、自信がもてないこともうかがえる。比例数直線に表した関係について吟味を行っている段階である。イメージモデルはわかったことを説明するための図となっている。

Bについては、指示の文脈である比例数直線をもとに問題文の文脈をとらえなおしていかなければならない。すなわち「～は～の」という国語的文脈から数直線上に現れる視覚的な構造を表現した数学的文脈への移行が必要である。

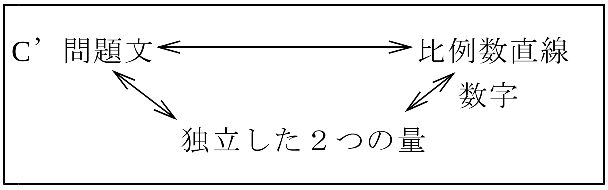


図13 認識論的三角形C’

図 13 における指示の文脈は「問題文」である。記号は「比例数直線」、概念は「独立した２つの量」である。比例数直線が子どもにとっての指示の文脈となってはいないため、問題の構造理解にはまだいたらない。問題場面の部分的理解にとどまっている。その要因としては、プロトコル T1 から CC の間のやりとりを通して、指示の文脈である問題文の上に表現されている明確な言葉のみに着目をしてしまい、それを本課題においても同様に数直線上に表現しようとしたことがあげられる。「何倍でしょう。」にあたる部分を表現できなかったのである。問題文を比例数直線に表してみようという段階であり、イメージモデルが「わからないことを解決するための図」となっている。

Ｃについては授業の中で図のようになってしまっている以上、第１に比例数直線を子どもにとっての指示の文脈へ移行することを前提とする。具体的手だてとして、問題文から比例数直線の間にもう１段階の手だてが必要である。ここでは数直線よりも抽象度を下げ 15 ｍ、９ｍをシンプルに表すような具体物について考えられるような支援としてテープ、ひも等の重ね合わせなどを行い、操作を通して図的表現である比例数直線の形に近づけていく。

また、もう一本の数直線を追加することで割合を表し、三本の数直線で関係を考えるという方法を生み出すような支援を行うことは子どもの思考を生かすという点で非常に有効であると考える。

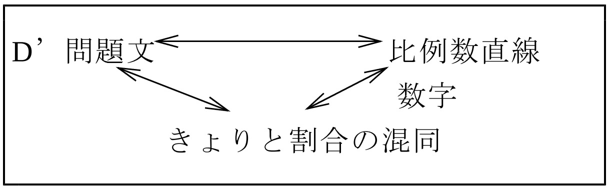


図14 認識論的三角形D’

図 14 における指示の文脈は「問題文」である。記号は「比例数直線」、概念は「きょりと割合の混同」である。C 同様に比例数直線が指示の文脈となりえていない。きょりという２つの数の量にのみ着目し、割合との関係が構成できていない。この要因として、15 と 9 の関係性にまず着目をした結果、上の数直線は 15 を、下の数直線は 9 を表現したものであるととらえ、数直線の項目が結果としてわからなくなってしまったことが予想される。C同様に問題文を比例数直線に表してみようという段階である。また、なんとなくわかっている数字と□を入れてみたという無意図的なものもこのパターンには含まれることが多い。イメージモデルが「わからないことを解決するための図」となっている。

Ｄについては指示の文脈への移行を前提とし、手だてをとる部分についてはＣ同様であるが、特に 15 と９の大小関係を明確に示し、子どもに意識させる必要がある。

６．おわりに

以上、認識論的三角形という視点から筆者のこれまでの授業過程、特にイメージモデルに基づく学習指導を分析し、その問題点と改善の具体的な方向について考察してきた。

今回の研究を通して次のことが明らかになった。

１点目に、「本時の学習過程において異なる２つの段階が同時に学級の中に存在していたこと」である。

①比例数直線を用いて問題文から問題構造をつかもうとする段階。

②比例数直線を用いて表された問題文脈か

ら構造をつかみ、解決に至ろうとする段階。

この２つの段階が同時に存在しているという状況を同じ段階における異なる反応と見てしまい、個別の状況に対応する具体的な解決の方策が示せていなかったのである。

上記のことから、この単元におけるイメージモデルは、子どものとらえ方に大きな差を生みだしたという点で、２直線による比例数直線では不適切であったという見方も可能である。しかし、これを教材解釈のミスであったと言うことは容易であるが、解釈の程度や、広がり等による授業内での想定外の出来事は当然のこととして起こり得る。これをいかにリアルタイムで分析し、即座に対応できるかという点がこの場合には重要である。今回の場合、２つの異なる段階そのものを教師がとらえ、足りない部分については適切な図的表現でそれを子どもが補っていけるような教師の支援の過程が必要となる。比例数直線が子どもにとっての指示の文脈となって初めて、立式、解決をねらった構造的理解へと進むことができるのである。

２点目に、「イメージモデルの活用法に対する改善の方向性」である。これまでは教材解釈を行う上で、イメージモデルを教師の視点から決定し、授業の中でそれを子どもに提示するという形をとってきた。しかし、これは教材の側へのアプローチが強く、学習者の視点から教材に対して学習者がもつであろうギャップや、学習者と教材との間の距離に目が向けられていなかったのである。その結果、学習者をいかにねらいとするものに近づけるかという部分に重きがおかれ、学習者がイメージモデルへアプローチしようとする過程、知識の構成過程に重きがおかれてていなかったのである。イメージモデルを教師が想定する際、これを子どもがどう構成していくかという視点を加えることではじめて指示の文脈となり得るイメージモデルを作ることができるのである。

認識論的三角形という視点からイメージモデルを捉え直すことによって既習事項と子どもの表現との関係性が明確になり、子どもの知識の構成過程をより段階的にとらえることができるようになる。

今回は認識論的三角形を用いて筆者のこれまで行ってきたイメージモデルを柱とする従来の授業の分析を通し、問題点と改善の具体的方策について述べた。今後はこれを視点とした授業構成について具体的な改善の方策を明らかにし、それらをもとに新たな授業のデザインをしていく。また、実際の授業を通し、認識論的三角形を視座に授業後のプロトコル分析を行い、図的表現の有効性についての検証を行い、授業改善へとつなげていきたい。

引用・参考文献

・Hans Freudenthal（1991）Revisiting Mathematics Education China Lecture KLUWER ACADEMIC PUBLISHERS

・Heinz Steinbring,（2002）What makes a sign a mathematical sign?-an epistemological perspective on mathematical interaction paper presented at the discussion group semiotics in mathematics education research PME26 ,Norich,UK,2002

・金子忠雄（1996） 新潟大学教育学部数学教室『数学教育研究』第32号

・中原忠男編著（1999） 構成的アプローチによる算数の新しい学習づくり 東洋館出版社

・田中博史著（2003）使える算数的表現法が育つ授業　東洋館出版社

・一松信ほか著（2001）みんなと学ぶ小学校算数6年下 学校図書

・馬場雅史（2005）　算数の授業における意味の構成に関する研究～認識論的三角形に基づく小数の乗法の授業設計～上越教育大学